Esame di Fondamenti di Automatica (9 crediti)

15 Gennaio 2014

Compito A

1) Dato il processo $\mathcal{S}$ rappresentato dal sistema di equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_3 + u \\ \dot{x}_2 &= u \\ \dot{x}_3 &= -2x_3 \\ y &= x_1 + x_2 + \alpha x_3\end{aligned}$$

con $\alpha \in I\!R$ parametro generico.

1. Studiare la raggiungibilità di $\mathcal{S}$ e, se necessario, individuarne la scomposizione di Kalman rispetto alla raggiungibilità.
2. Individuare il valore di α per il quale esiste una dinamica inosservabile stabile asintoticamente. Effettuare la scomposizione del sistema rispetto alla inosservabilità. Usare il valore di α individuato per i punti successivi.
3. Sulla base della scomposizione precedente, si può pensare, utilizzando il principio di separazione, ad un controllore dinamico di dimensione inferiore a 3 per la stabilizzazione di $\mathcal{S}$? Perché?
4. Individuare la funzione di trasferimento del processo $\mathcal{S}$ e valutare se si riesce a stabilizzarlo con un semplice guadagno in uno schema di controllo a retroazione.
5. Individuare un controllore che assegni i poli -1, -2 e -3 al sistema ad anello chiuso in retroazione unitaria dall'uscita del processo.
6. Come risponde, a regime permanente, il sistema di controllo precedentemente individuato ad un riferimento $r(t) = 2\delta_{-1}(t)$. Motivare la risposta.

N.B. La maggior parte delle domande precedenti sono indipendenti tra di loro.

2) Studiare, al variare di $K \in I\!R$, la stabilità del sistema

$$F(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+100)^2}$$

in uno schema a retroazione unitaria sia con il criterio di Nyquist che tramite il luogo delle radici. Esiste una dinamica dominante ad anello chiuso e, in caso affermativo, qual è il suo contributo all'aumentare di K positivo?

3) Caratterizzazione del transitorio nel dominio del tempo.

4) Sia il sistema

$$F(s) = \frac{10}{s(s+11)}$$

in quale campo di frequenza (specificare se rad/sec o Hertz) il sistema $F(s)$ chiuso in retroazione unitaria garantisce un'attenuazione di almeno 20 dB a segnali di disturbo sinusoidali sul ramo di reazione? Si ammette una soluzione approssimata purché motivata.

5) La stabilità semplice nei sistemi lineari e stazionari.

Bozza di soluzione

1) Data la struttura triangolare della matrice dinamica, gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = -2$.

1a) La matrice di raggiungibilità $\mathcal{R}$ è singolare e ha rango 2 pertanto esiste una dinamica non raggiungibile di dimensione 1. Il sottospazio degli stati raggiungibili $\mathcal{P}$ è dato da

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P} = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

e quindi la T^{-1} può essere scelta come

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{matrice identità}$$

Il sistema $\mathcal{S}$ è già nella forma scomposta rispetto alla raggiungibilità quindi non è necessaria nessuna scomposizione

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A_{22} = -2, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il sistema $\mathcal{S}$ ha una dinamica non raggiungibile caratterizzata dall'autovalore $\lambda_3 = -2$.

1b) L'unica dinamica stabile asintoticamente è quella individuata dall'autovalore λ_3 e quindi C (e di conseguenza α) deve essere individuato in modo tale da avere una dinamica inosservabile caratterizzata da λ_3. Usando il PBH test si ha

$$\text{rango}\begin{pmatrix} C \\ A - \lambda_3 I \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 < 3 \quad \text{sse} \quad 6\alpha - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 1/3$$

La matrice di osservabilità $\mathcal{O}$ e il sottospazio degli stati inosservabili $\mathcal{I}$ sono dati da

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/3 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{I} = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

e quindi la $\tilde{T}^{-1}$ può essere scelta come

$$\tilde{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \tilde{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

La scomposizione rispetto all'inosservabilità porta a

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \; \tilde{B} = \tilde{T}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1c) Dalla scomposizione del punto precedente si nota che la sottomatrice A_{21} è nulla e quindi si ha

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

con $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$ raggiungibile e $(\tilde{A}_{11}, \tilde{C}_1)$ osservabile. La dinamica stabile asintoticamente caratterizzata dall'autovalore λ_3 è sia non raggiungibile che inosservabile.

Volendo stabilizzare il sistema utilizzando il principio di separazione, partizionando lo stato coerentemente con la scomposizione precedente

$$z = \tilde{T}x = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \text{ con } z_1 \in \mathbb{R}^2$$

la reazione dallo stato, qualora fosse misurabile, sarebbe $u = F_1 z_1$ e quindi, se possibile, solo z_1 deve essere ricostruita. Dalla struttura diagonale a blocchi di $\tilde{A}$ si nota che basta costruire l'osservatore asintotico del solo sistema osservabile, coincidente con il solo sistema raggiungibile

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \tilde{A}_{11}\xi_1 + \tilde{B}_1 u + K_1(y - y_r) \\ y_r &= \tilde{C}_1 \xi \end{aligned}$$

e, per il principio di separazione, porre $u = F_1\xi_1$. Il controllore dall'uscita y avrà dimensione pari alla dimensione di ξ_1 cioè 2.

1d) Data la struttura diagonale a blocchi di $\tilde{A}$ e quindi di $(sI - \tilde{A})$ (si ricorda che l'inversa di una matrice diagonale a blocchi è ancora una matrice diagonale a blocchi avente sulla diagonale le matrici inverse dei blocchi della matrice di partenza) e data la particolare struttura sia di $\tilde{B}$ che di $\tilde{C}$ si ha

$$P(s) = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = \tilde{C}_1(sI - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1 = \frac{2s-1}{s(s-1)}$$

Il polinomio dei poli del sistema ad anello chiuso con un controllore statico $C(s) = K$ è pari a

$$p(s, K) = s(s-1) + K(2s-1) = s^2 + s(2K-1) - K$$

da cui si desume che il sistema non è stabilizzabile con un semplice guadagno (in alternativa un semplice luogo delle radici portava allo stesso risultato).

1e) Si può impostare un problema di assegnazione dei poli con $n = 2$ e quindi con un controllore parametrico di dimensione $n - 1$ (il sistema ad anello chiuso ha quindi $2 + 1 = 3$ poli)

$$C(s) = \frac{as+b}{s+c}$$

Il polinomio desiderato è dato da

$$p^*(s) = (s+1)(s+2)(s+3) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

mentre il polinomio dei poli del sistema ad anello chiuso è

$$p(s) = (s+c)s(s-1) + (as+b)(2s-1) = s^3 + (2a+c-1)s^2 + (2b-a-c)s - b$$

Dall'uguaglianza dei polinomi si ha $a = 30$, $b = -6$ e $c = -53$ da cui

$$C(s) = \frac{30s-6}{s-53}$$

1f) Il controllore individuato al punto precedente è tale da assegnare i tre poli -1, -2 e -3 al sistema ad anello chiuso il quale quindi risulta stabile asintoticamente (la dinamica nascosta ha l'autovalore $\lambda_3 = -2$) e quindi esiste la risposta a regime permanente. Il sistema di controllo è sollecitato da un riferimento a gradino e, grazie alla presenza del polo nell'origine in $s = 0$ in catena diretta, risponderà a regime permanente con un'uscita coincidente con il riferimento.

2) Tracciamento del diagramma di Nyquist e del luogo delle radici standard. Dal luogo delle radici, nel luogo positivo, si nota come due dei tre poli rimangono "lontani" (parte reale circa sempre pari a -10) dal terzo polo che rimane confinato nel segmento $[-1, 0)$. Questo terzo polo è il polo dominante. Inoltre si nota che all'aumentare di K questo terzo polo si avvicina allo zero in -1 e quindi il suo contributo è sempre meno importante al tendere di K all'infinito.

4) La funzione di trasferimento disturbo sul ramo di reazione/uscita è data dalla funzione di sensitività complementare cambiata di segno

$$W_{ny}(s) = -\frac{F(s)}{1 + F(s)} = -\frac{10}{s(s + 11) + 10} = -\frac{10}{(s + 1)(s + 10)}$$

Dal tracciamento del relativo diagramma di Bode del modulo (guadagno unitario e due fattori binomi), si osserva che si ha l'attenuazione richiesta dalla seconda pulsazione di rottura (10 rad/s) in poi.

Utilizzando l'approssimazione della funzione di sensitività complementare, si arrivava ad un risultato simile.