Robotica I

Test 2 — 18 Dicembre 2009

Si consideri il robot con quattro giunti rotatori in Figura 1. Le terne di Denavit-Hartenberg sono già assegnate, con la terna 0 posta all'intersezione tra primo e secondo asse di giunto. La configurazione illustrata corrisponde (approssimativamente) a $\boldsymbol{\theta} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 6\pi/10 & \pi & 6\pi/10 \end{pmatrix}^T$ [rad] (o, in modo equivalente, a $\boldsymbol{\theta} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 108 & 180 & 108 \end{pmatrix}^T$ [deg]).

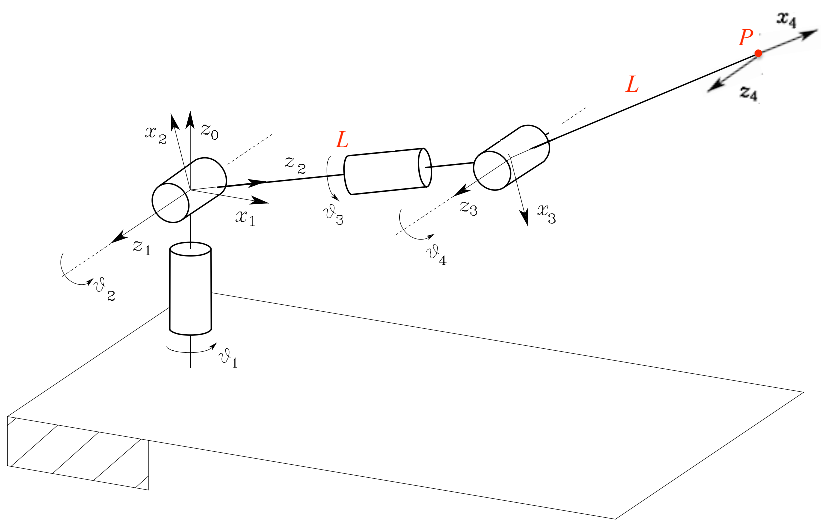

Figura 1: Un manipolatore spaziale 4R

Il robot si trova nella configurazione $\boldsymbol{\theta}^* = \begin{pmatrix} 0 & 3\pi/4 & \pi & \pi \end{pmatrix}^T$ [rad]. Se si prevede di lavorare in modo numerico, si ponga nel seguito $L = 1$ [m].

1. Ricavare lo Jacobiano geometrico $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}^*)$, di dimensioni 6×4.
2. Mostrare che il seguente vettore di velocità lineare/angolare cartesiana è ammissibile:
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_d^T & \boldsymbol{\omega}_d^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -L & 0 & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Determinare il vettore di velocità dei giunti $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ a norma minima che realizza la suddetta velocità cartesiana.
4. Calcolare il vettore di coppia ai giunti $\boldsymbol{\tau}$ che mantiene il robot in equilibrio statico quando viene applicato dall'ambiente il seguente vettore di forza/coppia cartesiana sull'organo terminale:
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{F}^T & \boldsymbol{M}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
5. Si consideri la sola velocità $\boldsymbol{v}$ del punto P. Verificare se lo Jacobiano $\boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{\theta})$ associato, di dimensioni 3×4, è singolare o meno nella configurazione $\boldsymbol{\theta}^*$.

[120 minuti; libri aperti]

Soluzione

18 Dicembre 2009

Il robot 4R spaziale è costituito dal sottoinsieme dei primi quattro giunti del manipolatore DLR considerato nel libro di testo (versione italiana, p. 80, Fig. 2.27)[1]. Tuttavia, il quarto (e ultimo) sistema di riferimento è differente, a causa della mancanza dei giunti 5, 6 e 7. I parametri di Denavit-Hartenberg sono dati nella Tabella 1 (le prime tre righe coincidono con quelle della Tabella 2.7 nel libro di testo, posto $d_3 = L$).

i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	$\frac{\pi}{2}$	0	0	θ_1
2	$\frac{\pi}{2}$	0	0	θ_2
3	$\frac{\pi}{2}$	0	L	θ_3
4	0	L	0	θ_4

Tabella 1: Parametri di Denavit-Hartenberg

Le matrici di trasformazione omogenea associate sono:

$$
\begin{aligned}
{}^0\boldsymbol{A}_1(\theta_1) &= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^0\boldsymbol{R}_1(\theta_1) & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{pmatrix}, \\
{}^1\boldsymbol{A}_2(\theta_2) &= \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & 0 & -\cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1\boldsymbol{R}_2(\theta_2) & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{pmatrix}, \\
{}^2\boldsymbol{A}_3(\theta_3) &= \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & 0 & \sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & 0 & -\cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^2\boldsymbol{R}_3(\theta_3) & {}^2\boldsymbol{p}_{23} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{pmatrix}, \\
{}^3\boldsymbol{A}_4(\theta_4) &= \begin{pmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & L\cos\theta_4 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & L\sin\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^3\boldsymbol{R}_4(\theta_4) & {}^3\boldsymbol{p}_{34}(\theta_4) \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Lo Jacobiano geometrico di dimensione 6×4

$$
\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{\theta}) \\ \boldsymbol{J}_A(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}
$$

[1] Nella Figura 2.27 gli assi $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ e $\boldsymbol{x}_3$ sono disegnati in modo errato. La Tabella 2.7 dei parametri di DH è invece corretta per il manipolatore 7R completo.

può essere calcolato in forma simbolica o numerica per una data configurazione. Viene di seguito presentata prima la derivazione simbolica e poi l'approccio numerico diretto

La parte alta $\boldsymbol{J}_L$, di dimensione 3×4, dello Jacobiano geometrico lega $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ alla velocità $\boldsymbol{v}$ del punto P. Può essere ottenuta per differenziazione del vettore $\boldsymbol{p}_{04}$, calcolato come

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{04}(\boldsymbol{\theta}) \\ 1 \end{pmatrix} = {}^0\boldsymbol{A}_1(\theta_1)\,{}^1\boldsymbol{A}_2(\theta_2)\,{}^2\boldsymbol{A}_3(\theta_3)\,{}^3\boldsymbol{A}_4(\theta_4) \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \boldsymbol{p}_{04}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}},$$

oppure dalle formula geometrica

$$\boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_0 \times \boldsymbol{p}_{04} & \boldsymbol{z}_1 \times \boldsymbol{p}_{04} & \boldsymbol{z}_2 \times \boldsymbol{p}_{04} & \boldsymbol{z}_3 \times (\boldsymbol{p}_{04} - \boldsymbol{p}_{03}) \end{pmatrix},$$

dove si è usato il fatto che $\boldsymbol{p}_{00} = \boldsymbol{p}_{01} = \boldsymbol{p}_{02} = \boldsymbol{0}$ (le origin delle terne 0, 1 e 2 coincidono).

Pertanto, per ricavare la forma simbolica esplicita occorre

$$\boldsymbol{p}_{04} = L \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \sin\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_4 + (\sin\theta_1 \sin\theta_3 + \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3)\cos\theta_4 \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_4 - (\cos\theta_1 \sin\theta_3 - \sin\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3)\cos\theta_4 \\ -\cos\theta_2 - \cos\theta_2 \sin\theta_4 + \sin\theta_2 \cos\theta_3 \cos\theta_4 \end{pmatrix},$$

e poi, se si vuole utilizzare la costruzione geometrica, anche

$$\boldsymbol{p}_{04} - \boldsymbol{p}_{03} = L \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_4 + (\sin\theta_1 \sin\theta_3 + \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3)\cos\theta_4 \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_4 - (\cos\theta_1 \sin\theta_3 - \sin\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3)\cos\theta_4 \\ -\cos\theta_2 \sin\theta_4 + \sin\theta_2 \cos\theta_3 \cos\theta_4 \end{pmatrix}$$

come pure

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z}_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{z}_1 &= {}^0\boldsymbol{R}_1(\theta_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta_1 \\ -\cos\theta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{z}_2 &= {}^0\boldsymbol{R}_1(\theta_1)\,{}^1\boldsymbol{R}_2(\theta_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \sin\theta_2 \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ -\cos\theta_2 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{z}_3 &= {}^0\boldsymbol{R}_1(\theta_1)\,{}^1\boldsymbol{R}_2(\theta_2)\,{}^2\boldsymbol{R}_3(\theta_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_1 \cos\theta_3 + \cos\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 \\ \cos\theta_1 \cos\theta_3 + \sin\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 \\ \sin\theta_2 \sin\theta_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Svolgendo i calcoli simbolici[2], e mettendo in evidenza la lunghezza L, si ottiene

$$\boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{\theta}) = L \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_{L,1} & \boldsymbol{J}_{L,2} & \boldsymbol{J}_{L,3} & \boldsymbol{J}_{L,4} \end{pmatrix},$$

[2]Nell'uso del Matlab Symbolic Toolbox, si impieghi l'istruzione `simplify` per ridurre la lunghezza/complessità dei termini.

dove:

$$\boldsymbol{J}_{L,1} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_1 \sin\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_4 + (\cos\theta_1 \sin\theta_3 - \sin\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3)\cos\theta_4 \\ \cos\theta_1 \sin\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_4 + (\sin\theta_1 \sin\theta_3 + \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3)\cos\theta_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{L,2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1(\cos\theta_2 + \cos\theta_2 \sin\theta_4 - \sin\theta_2 \cos\theta_3 \cos\theta_4) \\ \sin\theta_1(\cos\theta_2 + \cos\theta_2 \sin\theta_4 - \sin\theta_2 \cos\theta_3 \cos\theta_4) \\ \sin\theta_2 + \sin\theta_2 \sin\theta_4 + \cos\theta_2 \cos\theta_3 \cos\theta_4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{L,3} = \begin{pmatrix} (\sin\theta_1 \cos\theta_3 - \cos\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3)\cos\theta_4 \\ -(\cos\theta_1 \cos\theta_3 + \sin\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3)\cos\theta_4 \\ -\sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{L,4} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_4 - (\sin\theta_1 \sin\theta_3 + \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3)\sin\theta_4 \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_4 + (\cos\theta_1 \sin\theta_3 - \sin\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3)\sin\theta_4 \\ -\cos\theta_2 \cos\theta_4 - \sin\theta_2 \cos\theta_3 \sin\theta_4 \end{pmatrix}.$$

La parte bassa $\boldsymbol{J}_A$, di dimensione 3×4, dello Jacobiano geometrico lega $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ alla velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ della terna 4, ed è data dalla

$$\boldsymbol{J}_A(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_2 & \boldsymbol{z}_3 \end{pmatrix},$$

dove si riutilizzano le espressioni simboliche precedenti per $\boldsymbol{z}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$.

A questo punto, si valuteranno gli elementi della matrice Jacobiana $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})$ nella configurazione assegnata

$$\boldsymbol{\theta}^* = \begin{pmatrix} 0 & 3\pi/4 & \pi & \pi \end{pmatrix}^T.$$

In tale configurazione, l'organo terminale (l'origine della terna 4) si trova lungo l'asse del giunto 1.

In modo alternativo (e molto più rapido per rispondere alle domande di questo esercizio!), si possono valutare subito le matrici di trasformazione omogenea nella configurazione $\boldsymbol{\theta}^*$, sostituendo in tale caso anche $L = 1$, e svolgere poi numericamente tutte le operazione richieste, ossia i prodotti di matrici ed i prodotti vettore, fino a ottenere il valore numerico dello Jacobiano geometrico. Il codice Matlab è:

```
% dati e configurazione

th1=0;
th2=3*pi/4;
th3=pi;
th4=pi;
L=1;

% trasformazioni omogenee

A1 = [cos(th1) 0 sin(th1) 0;
      sin(th1) 0 -cos(th1) 0;
      0 1 0 0;
      0 0 0 1];
```

```
A2 = [cos(th2) 0 sin(th2) 0;
      sin(th2) 0 -cos(th2) 0;
      0 1 0 0;
      0 0 0 1];
A3 = [cos(th3) 0  sin(th3) 0;
      sin(th3) 0 -cos(th3) 0;
      0 1 0 L;
      0 0 0 1];
A4 = [cos(th4) -sin(th4) 0 L*cos(th4);
      sin(th4)  cos(th4) 0 L*sin(th4);
      0 0 1 0;
      0 0 0 1];

A12=A1*A2;
A13=A12*A3;
A14=A13*A4;

% Jacobiano geometrico

z0=[0 0 1]';
z1=A1(1:3,3);
z2=A12(1:3,3);
z3=A13(1:3,3);
p0=[0 0 0]';
p1=A1(1:3,4);
p2=A12(1:3,4);
p3=A13(1:3,4);
p4=A14(1:3,4);

J(1:3,1)=cross(z0,p4-p0);
J(1:3,2)=cross(z1,p4-p1);
J(1:3,3)=cross(z2,p4-p2);
J(1:3,4)=cross(z3,p4-p3);

J(4:6,1)=z0;
J(4:6,2)=z1;
J(4:6,3)=z2;
J(4:6,4)=z3;

% fine
```

Quale che sia la procedura seguita, si ottiene la seguente matrice (dove $L = 1$, se si è lavorato in modo numerico):

$$J(\theta^*) = \begin{pmatrix} 0 & -L\sqrt{2} & 0 & -L\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

E' immediato verificare che il rango di $J_L(\theta^*)$ è pari a 3, e quindi la configurazione θ^* assegnata non è singolare per tale matrice. Per semplice ispezione, la scelta

$$\dot{\theta}_d = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^T,$$

fornisce il vettore di velocità lineare/angolare $\begin{pmatrix} v_d^T & \omega_d^T \end{pmatrix}^T$ richiesto. Per verifica,

$$J(\theta^*)\dot{\theta}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -L \\ 0 \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, il vettore di velocità dei giunti $\dot{\theta}_d$ è l'unico a fornire la velocità lineare/angolare richiesta. Quindi, $\dot{\theta}_d$ è la soluzione a norma minima (con $\|\dot{\theta}_d\| = 1.5811$). Anche qui, è possibile verificare che

$$J^{\#}(\theta^*) \begin{pmatrix} v_d \\ \omega_d \end{pmatrix} = \dot{\theta}_d,$$

dove la pseudoinversa $J^{\#}(\theta^*)$ si può calcolare con la funzione Matlab `pinv` ovvero utilizzando la sua espressione esplicita valida nel caso di una matrice J con più righe che colonne e a rango (colonna) pieno

$$J^{\#} = (J^T J)^{-1} J^T,$$

che è poi il caso presente in quanto il rango di $J(\theta^*)$ è pari a 4. Infine, il vettore di coppia ai giunti τ che bilancia il vettore di forza/coppia cartesiana $\begin{pmatrix} F^T & M^T \end{pmatrix}^T$ specificato è dato da

$$\tau = -J^T(\theta^*) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ L\sqrt{2} \\ 0 \\ L\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

ossia il trasposto della prima riga di $J(\theta^*)$, cambiato di segno (per le coppie ai giunti vale la convenzione usuale: le coppie in senso antiorario sono positive).

* * * * *