Corso di Robotica 1

Cinematica differenziale inversa
Statica

Prof. Alessandro De Luca

Dipartimento di Informatica
e Sistemistica Antonio Ruberti

Sapienza
Università di Roma

Inversione della cinematica differenziale

- trovare le velocità di giunto che realizzano una velocità "generalizzata" (lineare e angolare) assegnata per l'E-E

velocità generalizzata

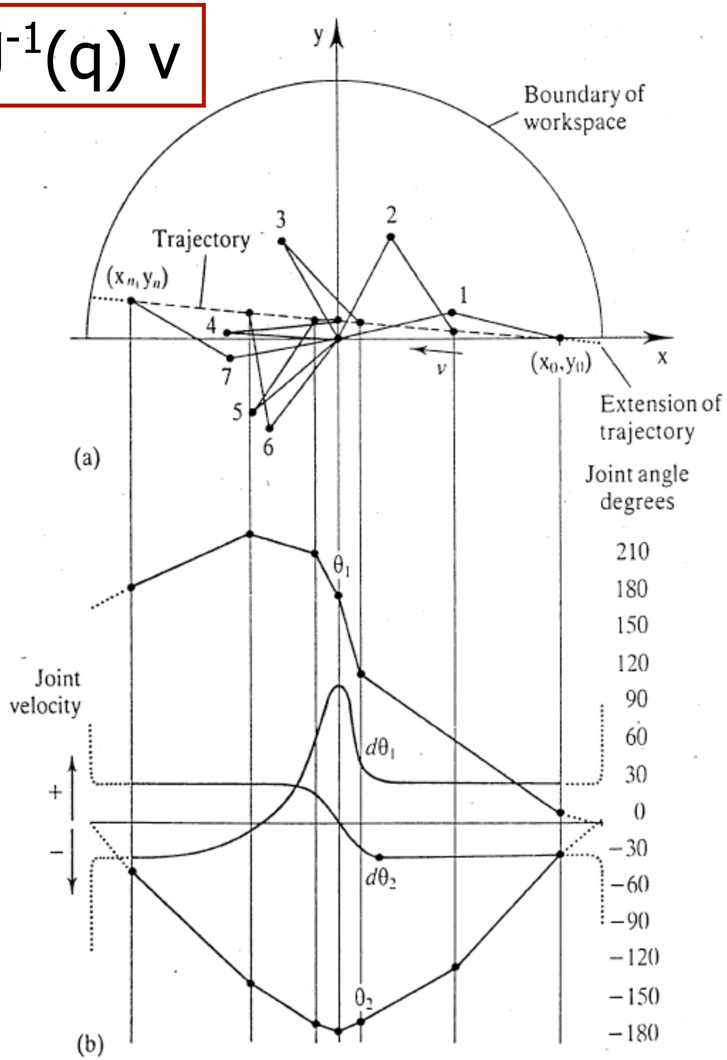
$$v = J(q)\,\dot{q} \xrightarrow{\text{J quadrata e non singolare}} \dot{q} = J^{-1}(q)\,v$$

- problemi
  - intorno a singolarità dello Jacobiano ($\dot{q}$ elevate)
  - per robot ridondanti ("inversa" non definita per matrici rettangolari)

in tali casi servono metodi di inversione "più robusti"

Comportamento vicino a singolarità

$$\boxed{\dot{q} = J^{-1}(q)\, v}$$



- i problemi insorgono solo se si comanda il movimento dei giunti tramite inversione di un compito cartesiano assegnato
- esempio di cammino rettilineo cartesiano per robot 2R planare
- si ha un brusco aumento di spostamenti/velocità del primo giunto vicino a $\theta_2 = -\pi$ (E-E nell'intorno dell'origine), nonostante lo spostamento lineare cartesiano sia piccolo

Metodo "Damped Least Squares"

$$\min_{\dot{q}} H = \frac{\lambda}{2}\|\dot{q}\|^2 + \frac{1}{2}\|J\dot{q} - v\|^2, \qquad \lambda \geq 0$$

$$\dot{q} = (\lambda I_n + J^T J)^{-1} J^T v = J^T(\lambda I_m + J J^T)^{-1} v$$

espressioni equivalenti, ma conviene questa per robot ridondanti!

- inversione cinematica differenziale come problema di ottimizzazione
- funzionale H = somma pesata di due obiettivi (minimo errore sulla velocità dell'E-E e minima velocità di giunto)
- λ = 0 se "sufficientemente lontani" da singolarità
- con λ > 0 si ha un errore nell'esecuzione della velocità dell'E-E, a fronte di una riduzione delle velocità di giunto ("smorzate")
- si può usare sia per m = n che per m < n

Uso della pseudoinversa

un problema di ottimizzazione (norma minima) vincolata

$$\min_{\dot{q}} H = \frac{1}{2}\|\dot{q}\|^2 \quad \text{con il vincolo} \quad J\dot{q} - v = 0$$

soluzione $\boxed{\dot{q} = J^{\#}v}$ pseudoinversa di J

- se $v \in \mathcal{R}(J)$, il vincolo è soddisfatto (v realizzabile)
- altrimenti $J\dot{q} = v^{\perp}$ dove $v^{\perp}$ minimizza l'errore $\|J\dot{q} - v\|$

proiezione ortogonale di v in $\mathcal{R}(J)$

Proprietà della pseudoinversa

è l'unica matrice che verifica le quattro relazioni

- $$J J^{\sharp} J = J \qquad J^{\sharp} J J^{\sharp} = J^{\sharp}$$

  $$(J^{\sharp} J)^T = J^{\sharp} J \quad (J J^{\sharp})^T = J J^{\sharp}$$

- se rango ρ = m = n: $J^{\sharp} = J^{-1}$

- se ρ = m < n: $J^{\sharp} = J^T (J J^T)^{-1}$

esiste sempre e si calcola in generale in modo numerico con la SVD = Singular Value Decomposition di J
(ad esempio, con la funzione **pinv** di MATLAB)

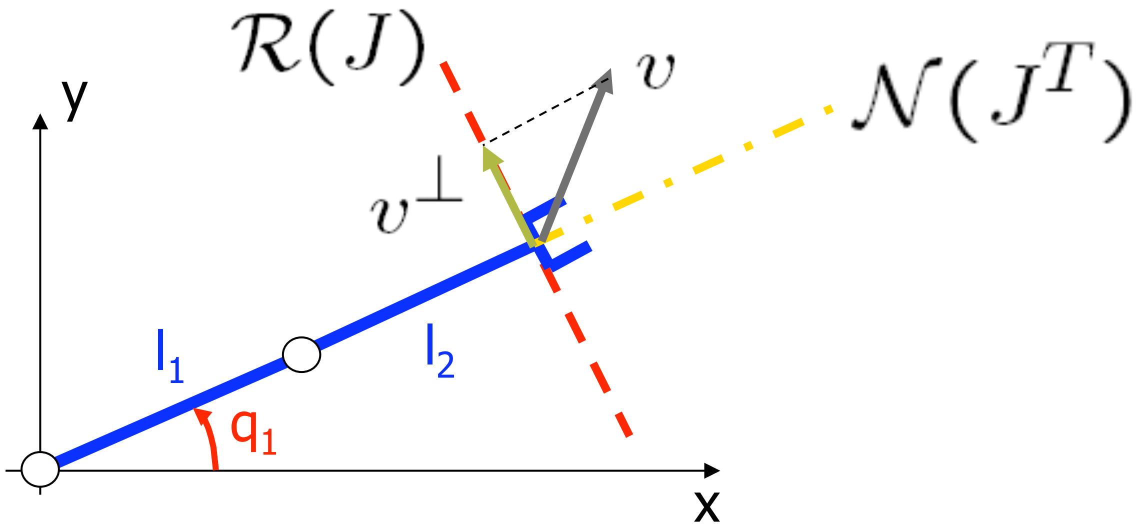
Esempio numerico

Jacobiano 2R con $l_1 = l_2 = 1$ e $q_2 = 0$ (rango $\rho = 1$)

$$J = \begin{bmatrix} -2s_1 & -s_1 \\ 2c_1 & c_1 \end{bmatrix} \qquad J^\# = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2s_1 & 2c_1 \\ -s_1 & c_1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{q} = J^\# v$$

è il vettore di velocità di giunto a norma minima che realizza $v^\perp$



Soluzione generale per m<n

tutte (le infinite) soluzioni della cinematica differenziale inversa possono essere scritte come

$$\dot{q} = J^{\#} v + (I - J^{\#} J)\xi$$

generica velocità di giunto

"proiettore" nel nucleo di J

è anche la soluzione di un problema modificato di ottimizzazione vincolata (polarizzato su ξ)

$$\min H = \frac{1}{2}\|\dot{q} - \xi\|^2 \quad \text{con il vincolo} \quad J\dot{q} - v = 0$$

Manipolabilità in velocità

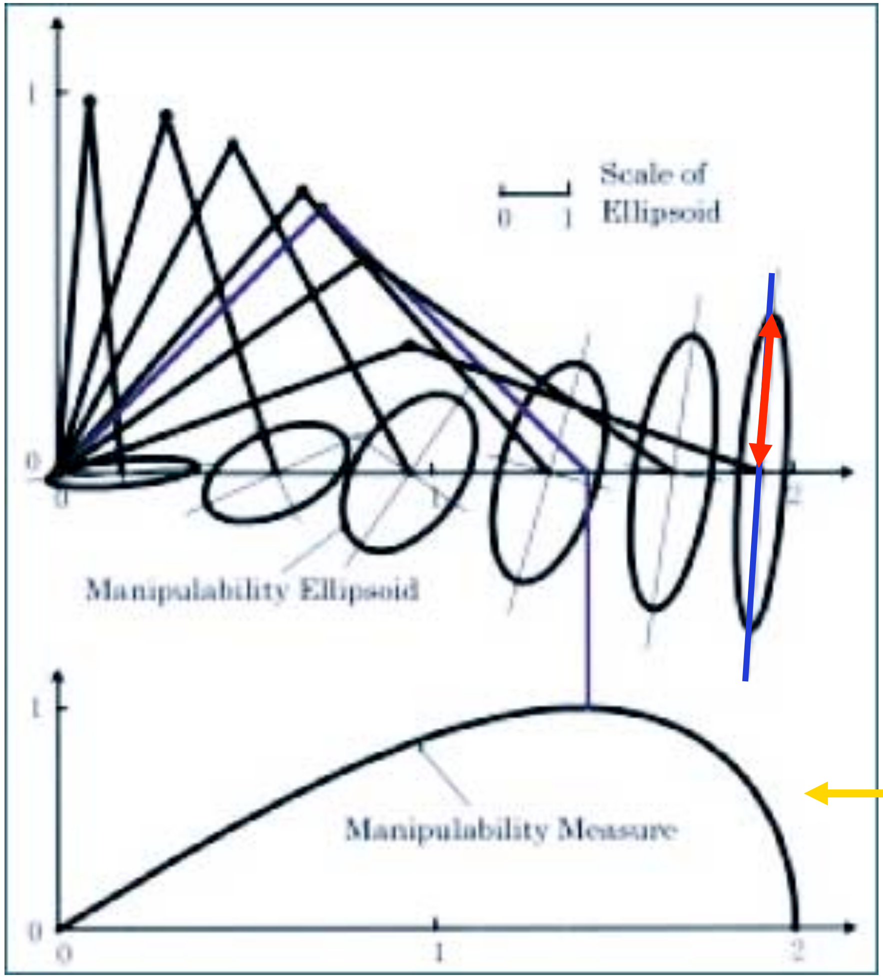
- in una data configurazione, si vuole valutare l'efficienza della trasformazione tra velocità di giunto e cartesiane
  - "quanto facilmente" il robot possa muoversi nelle varie direzioni dello spazio operativo
  - viceversa, "quanto vicino" il robot sia ad una singolarità
- si considerano le velocità dell'E-E che possono essere realizzate con velocità di giunto a norma unitaria

$$\dot{q}^T \dot{q} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v^T J^{\#T} J^{\#} v = 1}$$

ellissoide di manipolabilità (in velocità cartesiana)

$\boxed{(JJ^T)^{-1}}$ se $\rho = m$

Ellissoide di manipolabilità
in velocità



lunghezza semiassi: valori singolari di J

$$\sigma_i\{J\} = \sqrt{\lambda_i\{JJ^T\}} \geq 0$$

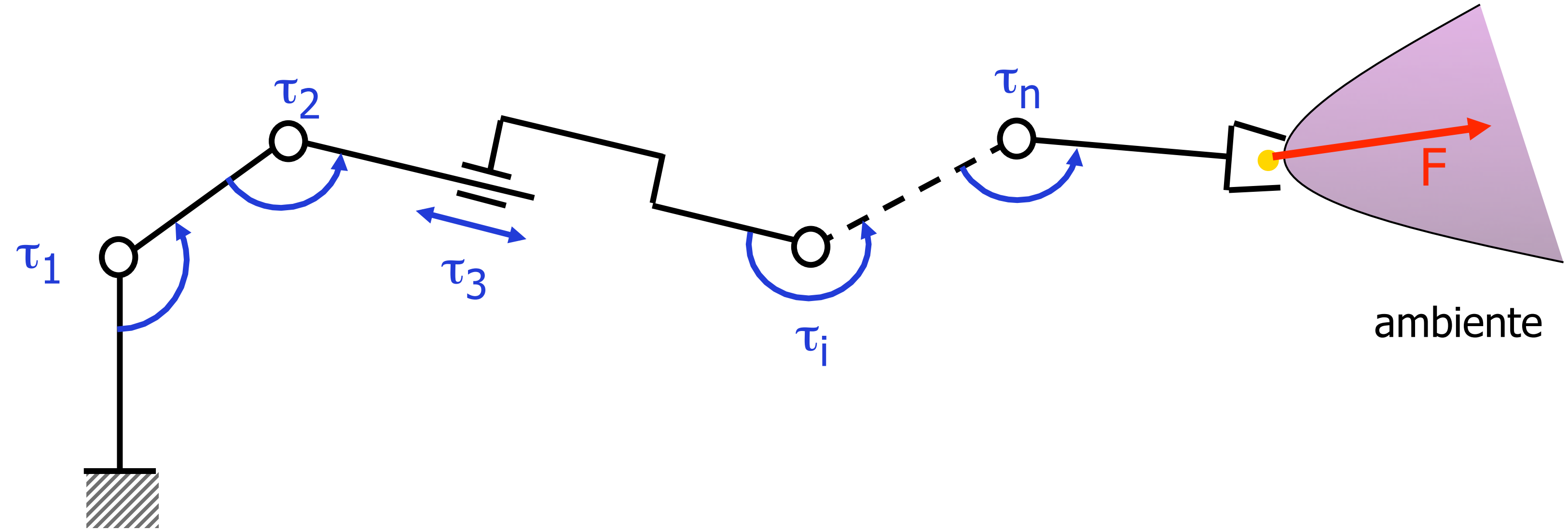
in singolarità (per m=2) l'ellisse diventa segmento

direzione assi: autovettori associati a λ_i (ortogonali)

$$w = \sqrt{\det JJ^T}$$

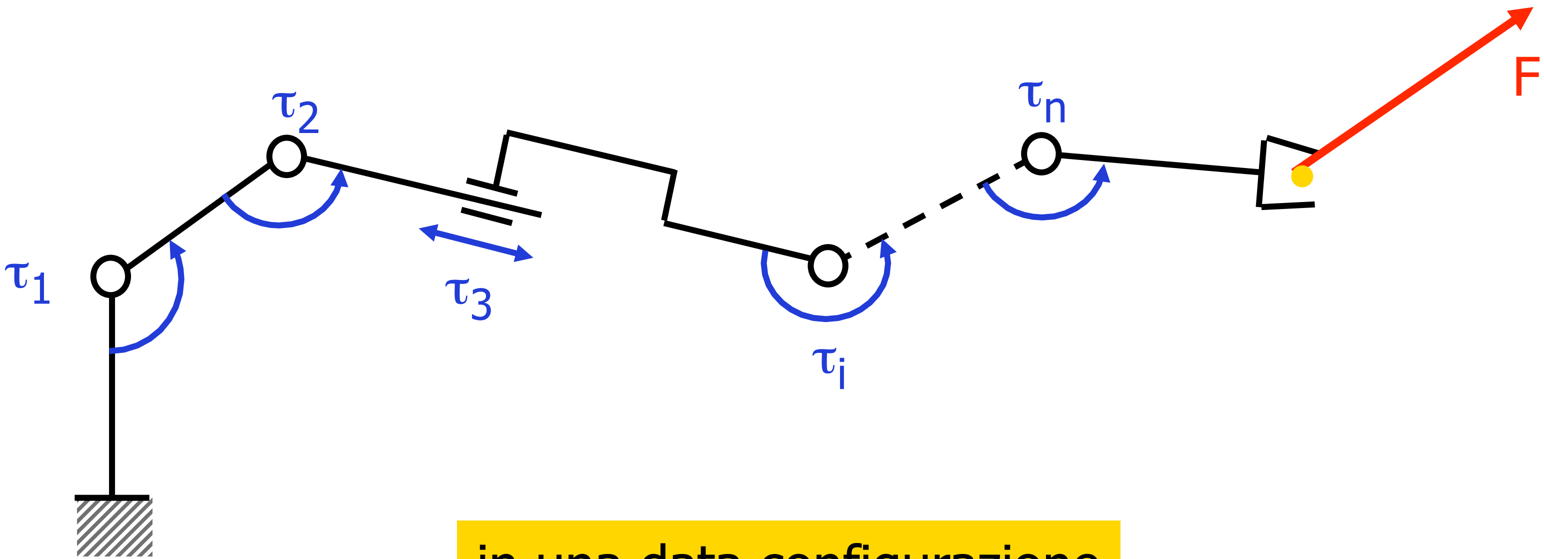
proporzionale all'area (per m=2)

Statica - Trasformazione di forze



- τ vettore delle forze/coppie ai giunti
- F vettore delle forze/momenti esercitate dall'E-E sull'ambiente (uguali e opposte a quelle di reazione esercitate dall'ambiente sull'E-E)
- **relazione fra τ e F all'equilibrio (ovvero con robot fermo)?**

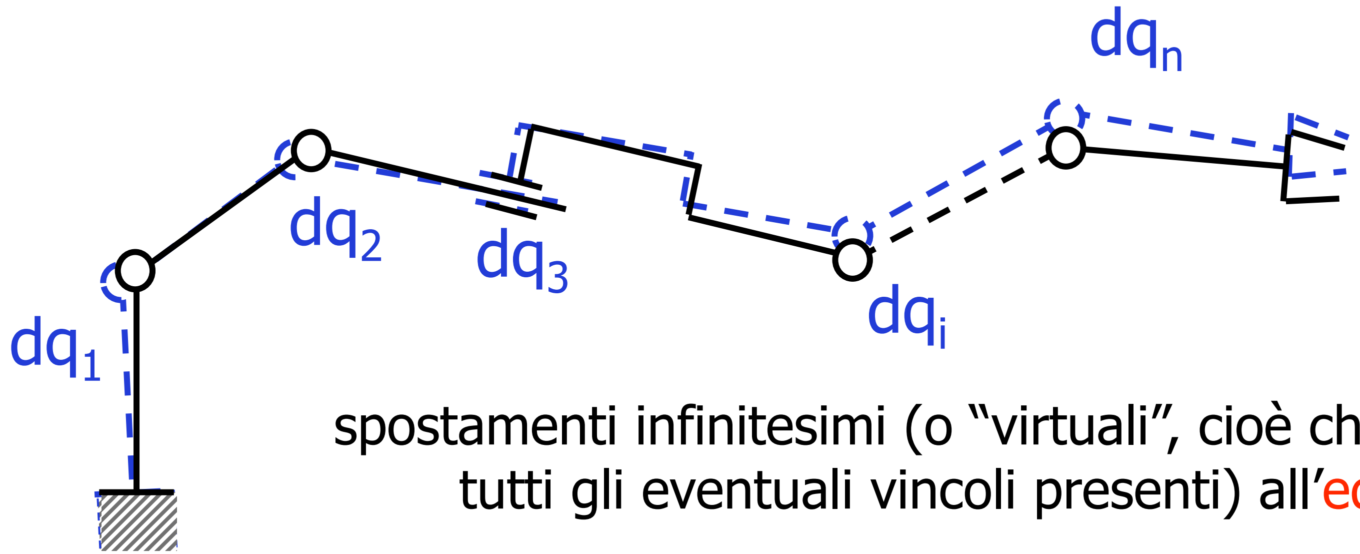
Statica - Formulazioni equivalenti



in una data configurazione

- quale τ applicare ai giunti affinché il robot eserciti una F sull'ambiente?
- quale τ ai giunti equilibra una forza -F esercitata dall'ambiente sull'E-E?
- qual è l'effetto τ "sentito" ai giunti in presenza di una forza -F esercitata dall'ambiente sull'E-E?

Spostamento e lavoro virtuale



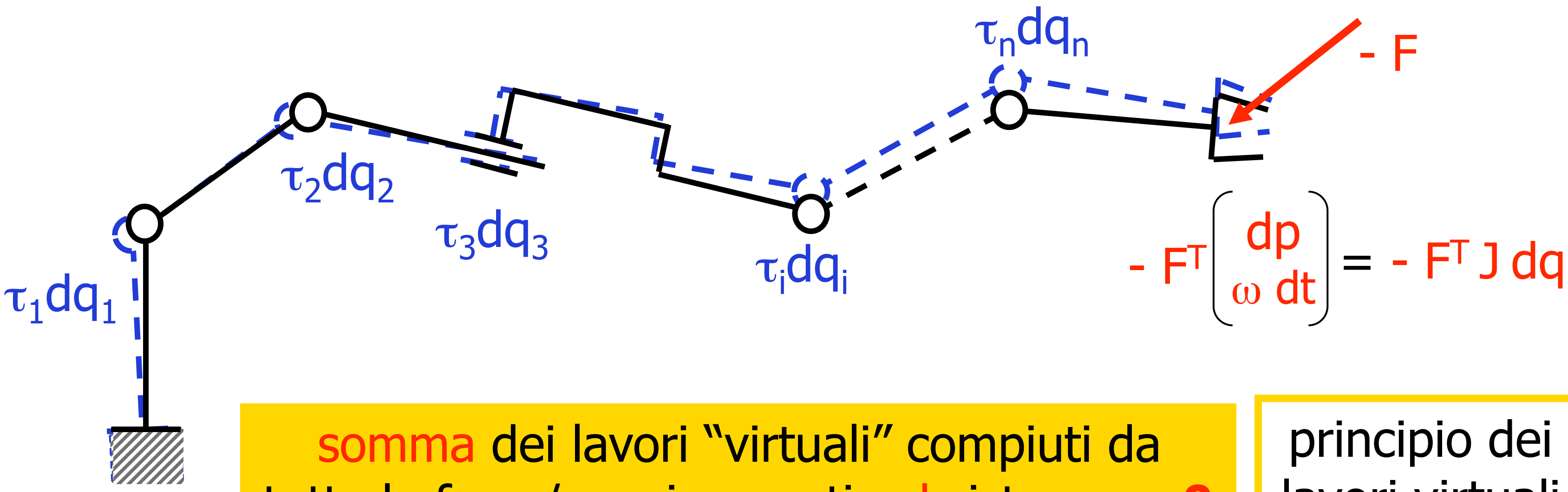
$$\begin{pmatrix} dp \\ \omega\, dt \end{pmatrix} = J\, dq$$

spostamenti infinitesimi (o "virtuali", cioè che soddisfano tutti gli eventuali vincoli presenti) all'equilibrio

- senza variazione di energia cinetica (accelerazioni nulle)
- senza dissipazione (velocità nulle)

il lavoro "virtuale" è il lavoro compiuto da tutte le forze/coppie agenti sul sistema per uno spostamento virtuale

Principio dei lavori virtuali



somma dei lavori "virtuali" compiuti da tutte le forze/coppie agenti sul sistema **= 0**

principio dei lavori virtuali

$$\tau^T dq - F^T \begin{bmatrix} dp \\ \omega dt \end{bmatrix} = \tau^T dq - F^T J dq = 0 \qquad \boxed{\forall dq}$$

$$\boxed{\tau = J^T(q) F}$$

Dualità tra velocità e forze

$J(q)$

velocità $\dot{q}$
(o spostamenti dq)
nello spazio dei giunti

velocità v
(o spostamenti dell'E-E $\begin{bmatrix} dp \\ \omega dt \end{bmatrix}$)
nello spazio cartesiano

coppie generalizzate τ
ai giunti

forze generalizzate F
cartesiane sull'E-E

$J^T(q)$

le singolarità in velocità sono
le stesse di quelle in forza

$\rho(J) = \rho(J^T)$

Sottospazi duali di velocità e forza

definizioni

$$\mathcal{R}(J) = \{v \in \mathbb{R}^m : \exists \dot{q} \in \mathbb{R}^n, J\dot{q} = v\}$$

$$\mathcal{N}(J^T) = \{v \in \mathbb{R}^m : \nexists \dot{q} \in \mathbb{R}^n, J\dot{q} = v\}$$

$$= \{F \in \mathbb{R}^m : J^T F = 0\}$$

$$\mathcal{R}(J) + \mathcal{N}(J^T) = \mathbb{R}^m$$

$$\mathcal{R}(J^T) = \{\tau \in \mathbb{R}^n : \exists F \in \mathbb{R}^m, J^T F = \tau\}$$

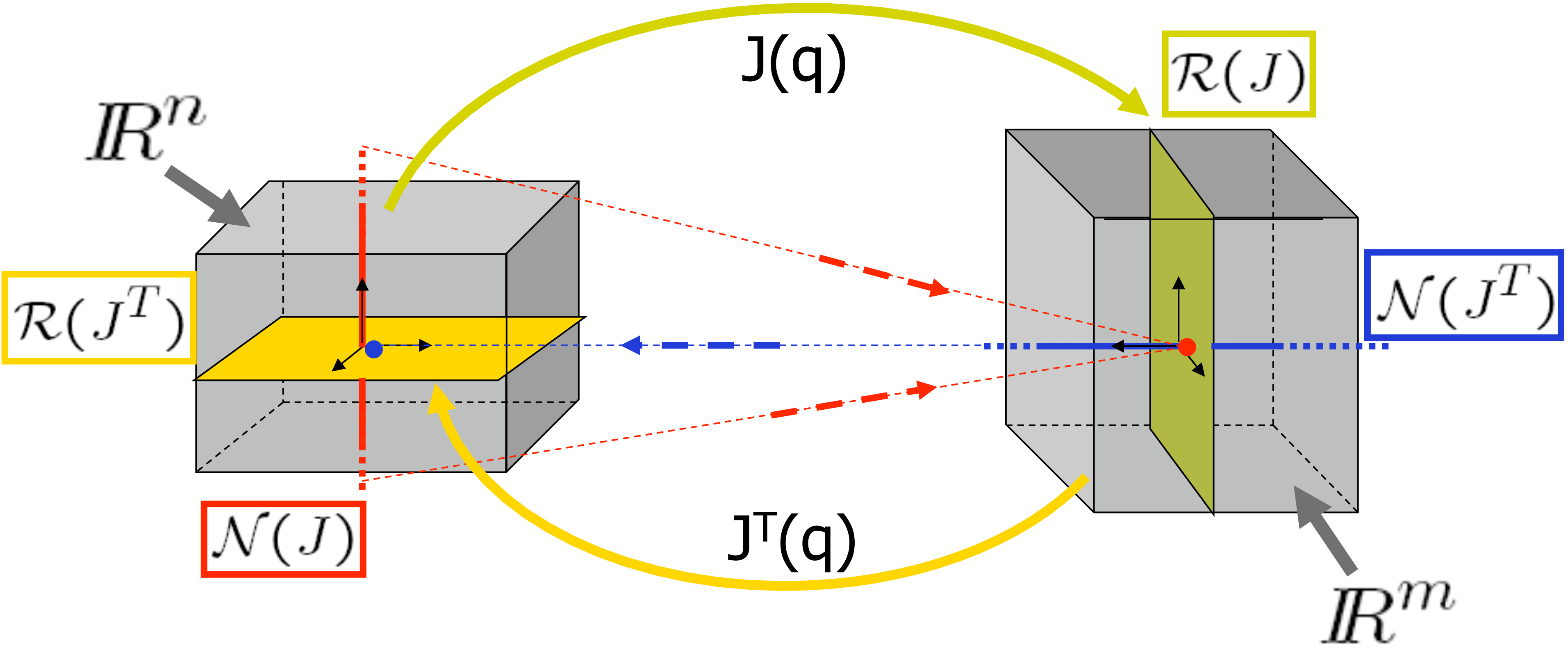
$$\mathcal{N}(J) = \{\tau \in \mathbb{R}^n : \nexists F \in \mathbb{R}^m, J^T F = \tau\}$$

$$= \{\dot{q} \in \mathbb{R}^n : J\dot{q} = 0\}$$

$$\mathcal{R}(J^T) + \mathcal{N}(J) = \mathbb{R}^n$$

Sottospazi duali di moto e di forza

una rappresentazione grafica

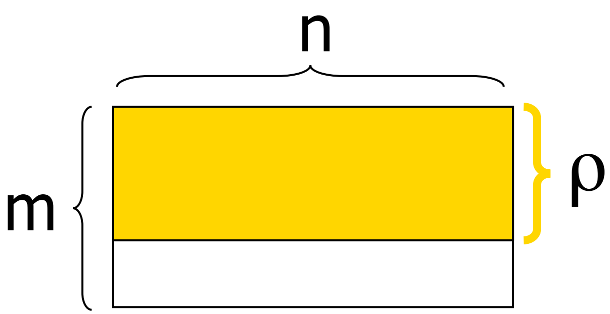


sottospazi lineari: le origini appartengono a tutti gli insiemi definiti!

Singolarità di moto e di forza

lista dei casi possibili

$$\rho = \text{rango}(J) = \text{rango}(J^T) \leq \min(m,n)$$

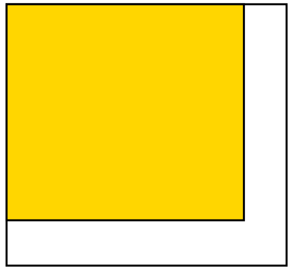


1. $\rho < m$

$$\exists \dot{q} \neq 0 : \quad J\dot{q} = 0$$
$$\exists F \neq 0 : \quad J^T F = 0$$

2. $\rho = m$

$$\exists \dot{q} \neq 0 : \quad J\dot{q} = 0$$
$$\mathcal{N}(J^T) = \{0\}$$

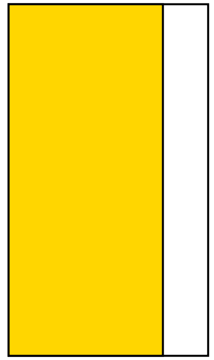


1. $\det J = 0$

$$\exists \dot{q} \neq 0 : \quad J\dot{q} = 0$$
$$\exists F \neq 0 : \quad J^T F = 0$$

2. $\det J \neq 0$

$$\mathcal{N}(J) = \{0\}$$
$$\mathcal{N}(J^T) = \{0\}$$



1. $\rho < n$

$$\exists \dot{q} \neq 0 : \quad J\dot{q} = 0$$
$$\exists F \neq 0 : \quad J^T F = 0$$

2. $\rho = n$

$$\exists F \neq 0 : \quad J^T F = 0$$
$$\mathcal{N}(J) = \{0\}$$

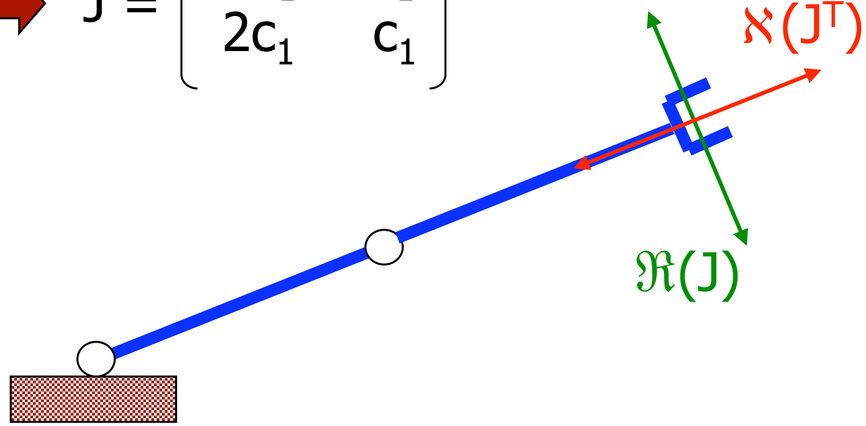
Esempio di analisi delle singolarità

- robot 2R planare con $l_1=l_2=1$ $\quad J(q) = \begin{bmatrix} -s_1-s_{12} & -s_{12} \\ c_1+c_{12} & c_{12} \end{bmatrix}$ $\quad \det J(q) = s_2$

singolarità braccio steso ($q_2 = 0$) $\Rightarrow$ $J = \begin{bmatrix} -2s_1 & -s_1 \\ 2c_1 & c_1 \end{bmatrix}$

$\Re(J) = \alpha \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$ $\quad \aleph(J^T) = \alpha \begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \end{bmatrix}$

$\Re(J^T) = \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \aleph(J) = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$



singolarità braccio ripiegato ($q_2 = \pi$) $\Rightarrow$ $J = \begin{bmatrix} 0 & s_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}$

$\Re(J)$ e $\aleph(J^T)$ come prima $\quad \Re(J^T) = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \aleph(J) = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Manipolabilità in forza

- in una data configurazione, si vuole valutare l'efficienza della trasformazione tra coppie ai giunti e forze cartesiane
  - "quanto facilmente" il robot può applicare forze generalizzate (o resistere a forze dall'ambiente) nelle direzioni dello spazio operativo
  - in singolarità, esistono direzioni dello spazio cartesiano lungo le quali qualsiasi forza esterna è equilibrata ai giunti (dalle reazioni vincolari della struttura meccanica) senza necessità di coppie ai giunti
- si considerano le forze all'E-E che possono essere realizzate/equilibrate da coppie ai giunti a norma unitaria

$$\tau^T \tau = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F^T J J^T F = 1}$$

stessi assi di quello in velocità ma semiassi di lunghezza inversa

ellissoide di manipolabilità in forza cartesiana

Trasformazioni di velocità e forze

- lo stesso ragionamento fatto per trovare relazione fra forze/coppie all'E-E e forze/coppie ai giunti (equilibrio + principio lavori virtuali) si può utilizzare per porre in relazione forze e momenti applicati in punti diversi e/o espressi in diverse terne di riferimento

relazione tra velocità generalizzate

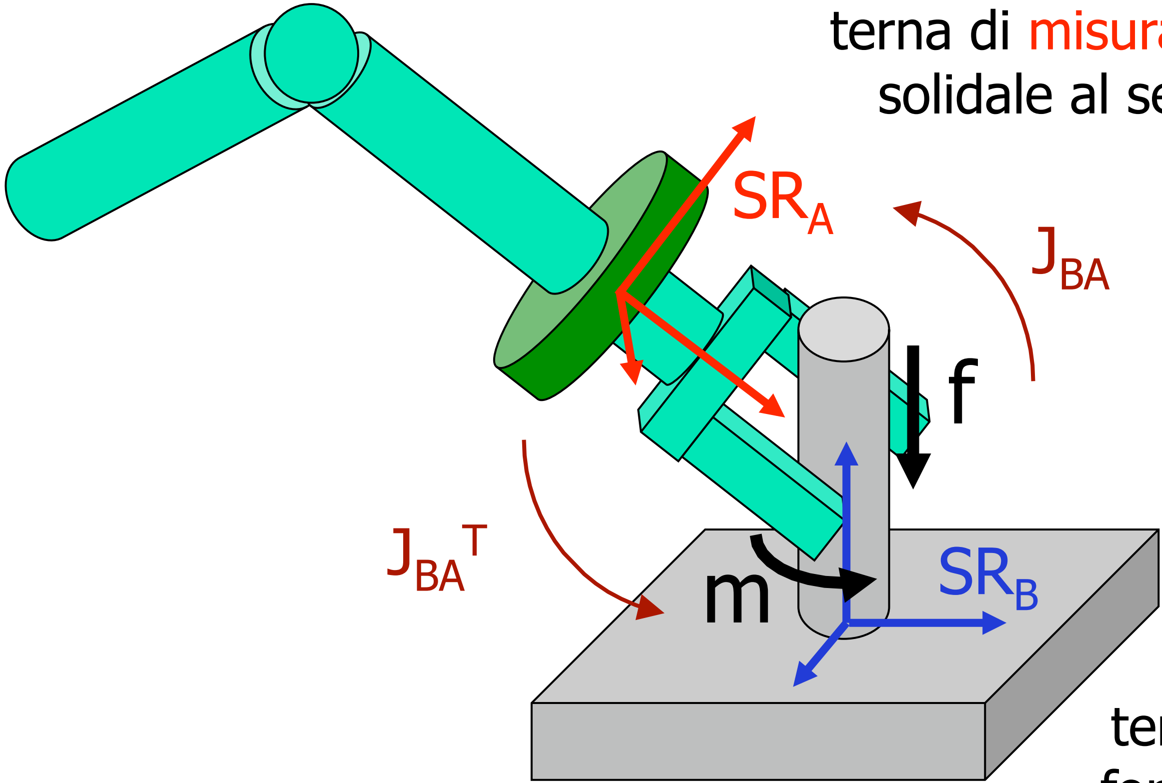
$$\begin{bmatrix} v_A \\ \omega_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R_B & -{}^A R_B S({}^B r_{BA}) \\ 0 & {}^A R_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_B \\ \omega_B \end{bmatrix} = J_{BA} \begin{bmatrix} v_B \\ \omega_B \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} f_B \\ m_B \end{bmatrix} = J_{BA}^T \begin{bmatrix} f_A \\ m_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B R_A & 0 \\ S({}^B r_{BA}) {}^B R_A & {}^B R_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_A \\ m_A \end{bmatrix}$$

relazione tra forze generalizzate

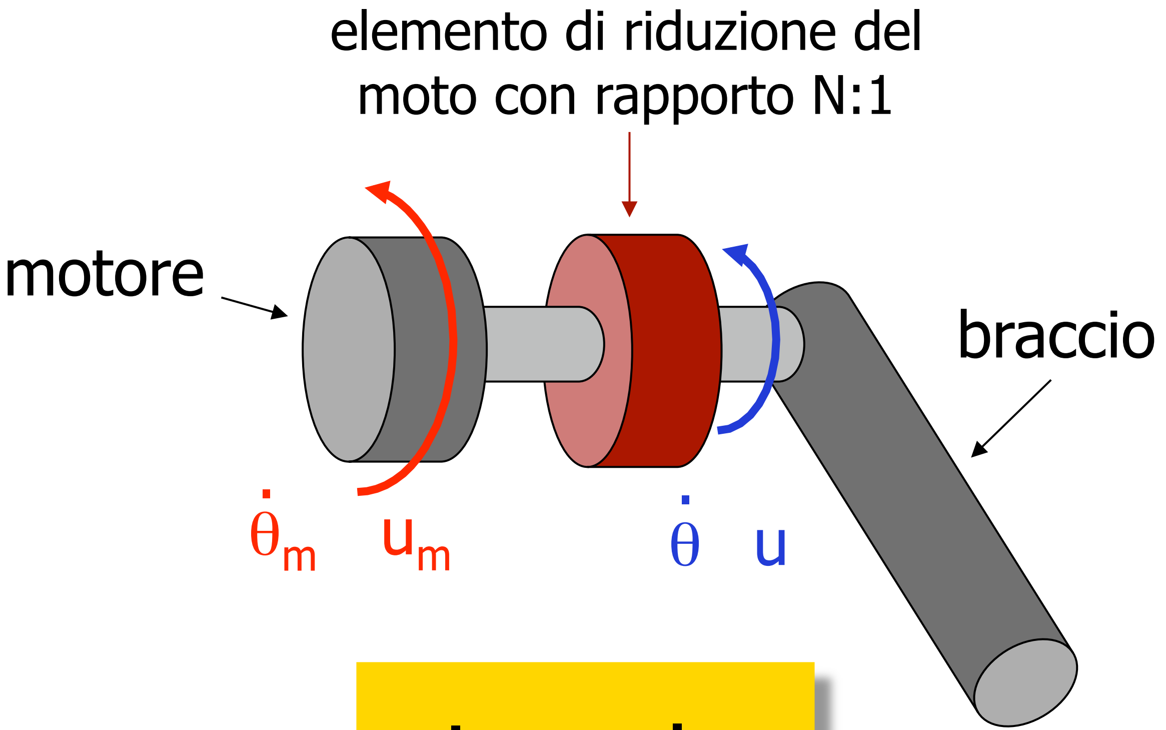
Esempio 1: Sensore di forza 6D



terna di misura di forze/coppie solidale al sensore al polso

terna di interesse per le forze/coppie nel compito di contatto ambientale

Esempio 2: Riduttore al giunto



$$\dot{\theta}_m = N\dot{\theta}$$

$$u = N u_m$$