Corso di Robotica 1

Rappresentazioni alternative dell'orientamento

(angoli di Eulero e roll-pitch-yaw)

Trasformazioni omogenee

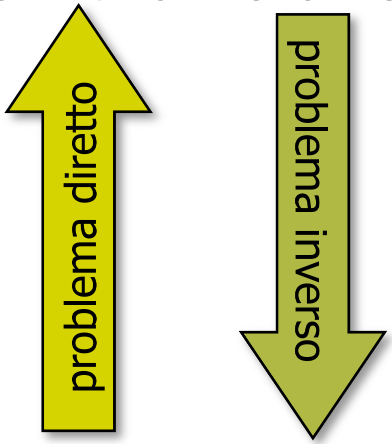
Prof. Alessandro De Luca

DIPARTIMENTO DI INFORMATICA
E SISTEMISTICA ANTONIO RUBERTI

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Rappresentazioni "minimali"

- matrici di rotazione: 9 elementi
  - \- 3 relazioni ortogonalità
  - \- 3 relazioni unitarietà
  - = 3 grandezze indipendenti

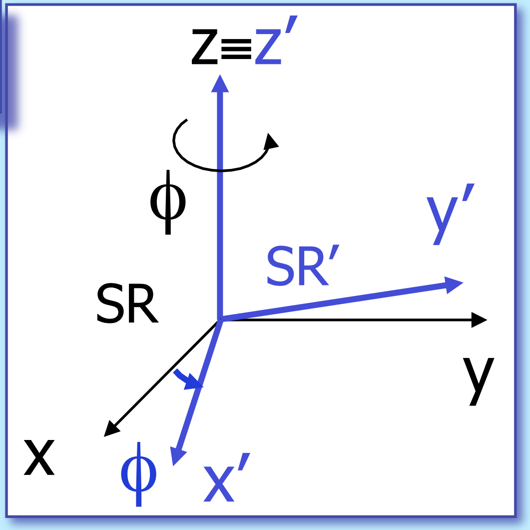


- sequenza di 3 rotazioni intorno ad assi indipendenti
  - fissi (a_i) o mobili (a'_i)
  - 12 + 12 sequenze possibili distinte (ad es., XYX)
  - di fatto solo 12 perché

$$\{(a_1\ \alpha_1), (a_2\ \alpha_2), (a_3\ \alpha_3)\} \equiv \{ (a'_3\ \alpha_3)\ , (a'_2\ \alpha_2), (a'_1\ \alpha_1)\}$$

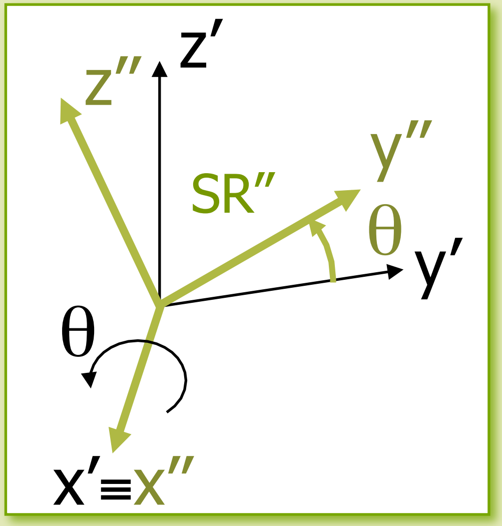
Angoli di Eulero ZX′Z″

1



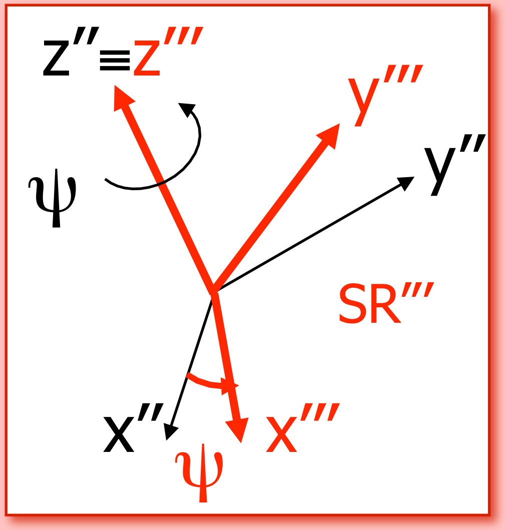
$$R_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2



$$R_{x'}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

3



$$R_{z''}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Angoli di Eulero ZX'Z"

- Problema diretto: dati ϕ , θ , ψ ; ricavare R

$$R_{ZX'Z''}(\phi, \theta, \psi) = R_Z(\phi)\, R_{X'}(\theta)\, R_{Z''}(\psi)$$

ordine di definizione della concatenazione

$$= \begin{bmatrix} c\phi\, c\psi - s\phi\, c\theta\, s\psi & -c\phi\, s\psi - s\phi\, c\theta\, c\psi & s\phi\, s\theta \\ s\phi\, c\psi + c\phi\, c\theta\, s\psi & -s\phi\, s\psi - c\phi\, c\theta\, c\psi & -c\phi\, s\theta \\ s\theta\, s\psi & s\theta\, c\psi & c\theta \end{bmatrix}$$

- dato un vettore v'''= (x''',y''',z''') espresso in SR''' le sue coordinate in SR sono date da

$$v = R_{ZX'Z''}(\phi, \theta, \psi)\, v'''$$

- l'orientamento di SR''' è lo stesso che si avrebbe con la sequenza di rotazioni:

$\boxed{\psi \text{ intorno a z, } \theta \text{ intorno a x (fisso), } \phi \text{ intorno a z (fisso)}}$

Angoli di Eulero ZX'Z''

- Problema inverso: data $R = \{r_{ij}\}$; ricavare ϕ , θ , ψ

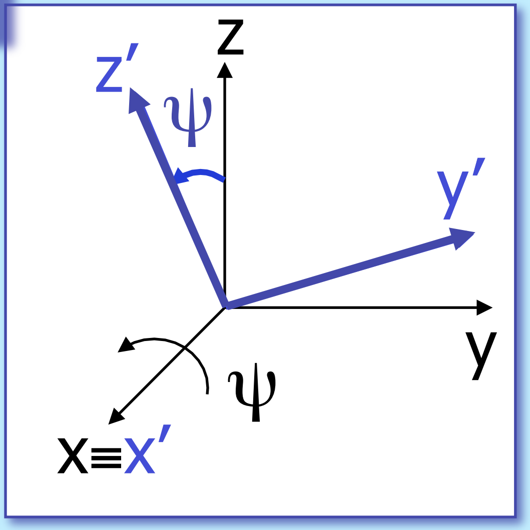
$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\phi\, c\psi - s\phi\, c\theta\, s\psi & -c\phi\, s\psi - s\phi\, c\theta\, c\psi & s\phi\, s\theta \\ s\phi\, c\psi + c\phi\, c\theta\, s\psi & -s\phi\, s\psi - c\phi\, c\theta\, c\psi & -c\phi\, s\theta \\ s\theta\, s\psi & s\theta\, c\psi & c\theta \end{bmatrix}$$

- $r_{13}^2 + r_{23}^2 = s^2\theta,\ \ r_{33} = c\theta \ \Rightarrow$ $\boxed{\theta = \text{ATAN2}\{\pm\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2},\, r_{33}\}}$
  due valori che differiscono per il segno
- se $s\theta \neq 0$

  $r_{31}/s\theta = s\psi\ ,\quad r_{32}/s\theta = c\psi \ \Rightarrow$ $\boxed{\psi = \text{ATAN2}\{r_{31}/s\theta,\, r_{32}/s\theta\}}$
- analogamente: $\boxed{\phi = \text{ATAN2}\{r_{13}/s\theta,\, -r_{23}/s\theta\}}$
- si ottiene sempre una coppia di soluzioni
- c'è sempre una singolarità (qui $\theta = 0, \pm\pi$)

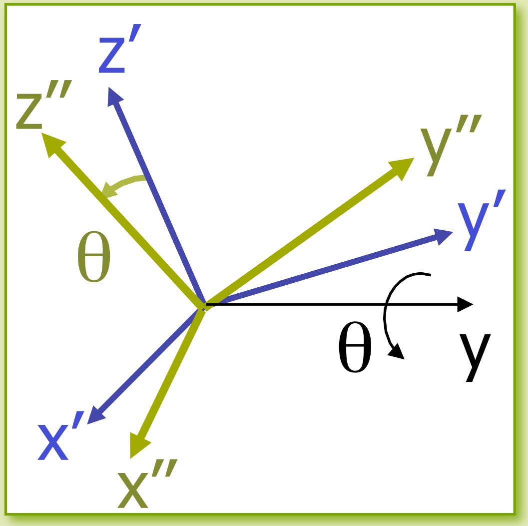
Angoli di Roll-Pitch-Yaw

1 **ROLL**



$$R_X(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}$$

PITCH **2**

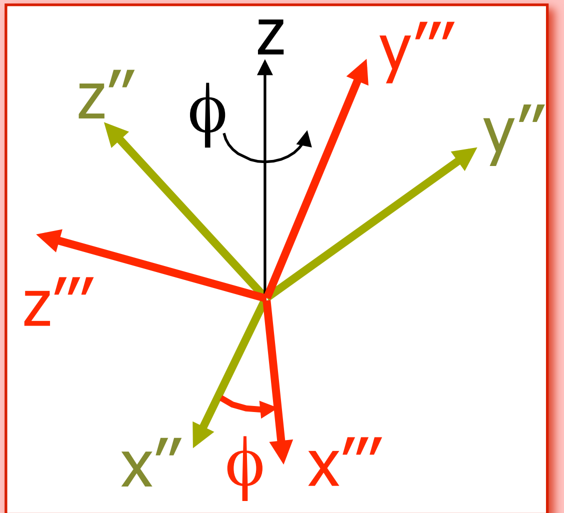


$C_1 R_Y(\theta) C_1^T$

con $R_Y(\theta) =$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

3 **YAW**



$C_2 R_Z(\phi) C_2^T$

con $R_Z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Angoli di Roll-Pitch-Yaw (su XYZ fissi)

- Problema diretto: dati ψ , θ , ϕ ; ricavare R

$$R_{RPY}(\psi, \theta, \phi) = R_Z(\phi)\, R_Y(\theta)\, R_X(\psi)$$ ⇐ notare l'ordine!

ordine di definizione

$$= \begin{bmatrix} c\phi\, c\theta & c\phi\, s\theta\, s\psi - s\phi\, c\psi & c\phi\, s\theta\, c\psi + s\phi\, s\psi \\ s\phi\, c\theta & s\phi\, s\theta\, s\psi + c\phi\, c\psi & s\phi\, s\theta\, c\psi - c\phi\, s\psi \\ -s\theta & c\theta\, s\psi & c\theta\, c\psi \end{bmatrix}$$

- Problema inverso: data $R = \{r_{ij}\}$; ricavare ψ , θ , ϕ
- $r_{32}^2 + r_{33}^2 = c^2\theta$, $r_{31} = -s\theta$ $\Rightarrow$ $\boxed{\theta = \text{ATAN2}\{-r_{31}, \pm\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\}}$

  due valori simmetrici rispetto a $\pi/2$
- se $c\theta \neq 0$

  $r_{32}/c\theta = s\psi$, $\quad r_{33}/c\theta = c\psi$ $\Rightarrow$ $\boxed{\psi = \text{ATAN2}\{r_{32}/c\theta, r_{33}/c\theta\}}$
- analogamente: $\boxed{\phi = \text{ATAN2}\{ r_{21}/c\theta, r_{11}/c\theta \}}$
- singolarità per $\theta = \pm\,\pi/2 + k\,\pi$

… perché in questo ordine?

$$R_{RPY}(\psi, \theta, \phi) = R_Z(\phi)\, R_Y(\theta)\, R_X(\psi)$$

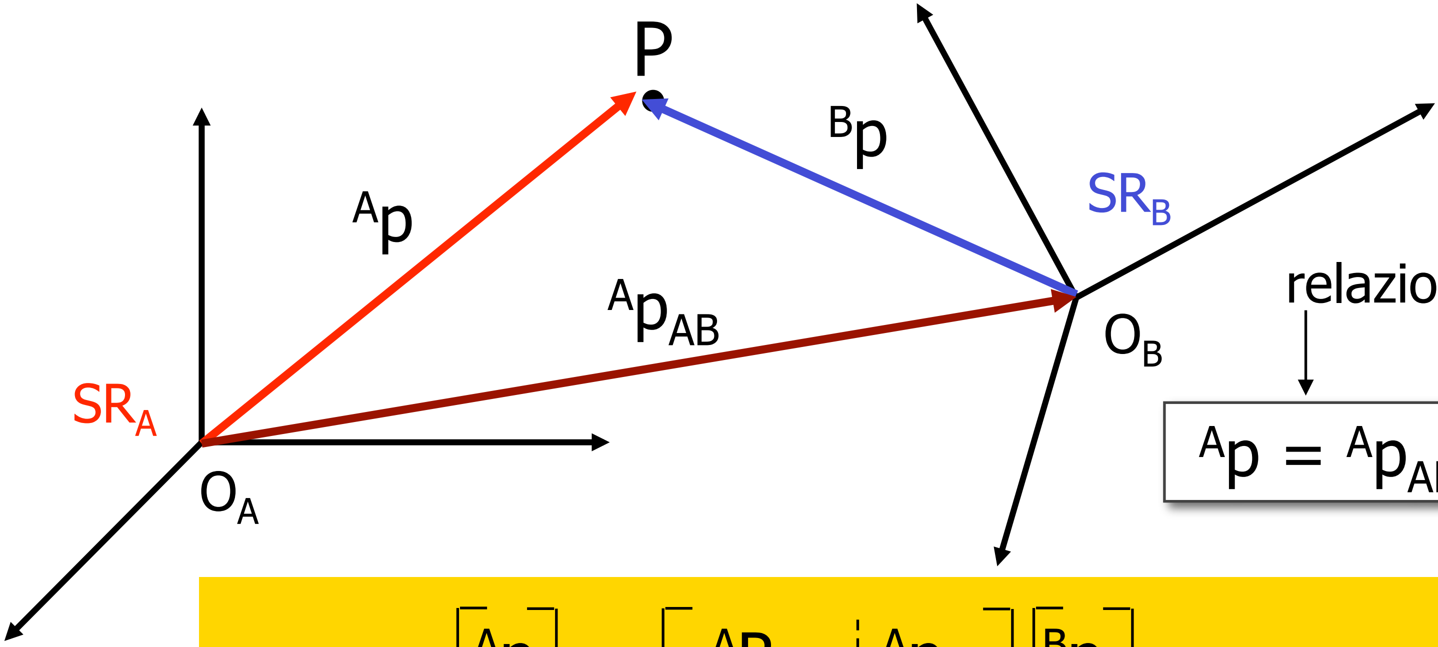
ordine di definizione ordine "inverso" nel prodotto

- occorre riportare ogni rotazione della sequenza sull'asse fisso originario

concatenazione di tre rotazioni: [ ] [ ] [ ]…

$$\begin{aligned} R_{RPY}(\psi, \theta, \phi) &= [R_X(\psi)]\,[R_X^T(\psi)\, R_Y(\theta)\, R_X(\psi)] \\ &\quad [R_X^T(\psi)\, R_Y^T(\theta)\, R_Z(\phi)\, R_Y(\theta)\, R_X(\psi)] \\ &= R_Z(\phi)\, R_Y(\theta)\, R_X(\psi) \end{aligned}$$

Trasformazioni omogenee



relazione 'affine'

$$ {}^A p = {}^A p_{AB} + {}^A R_B \, {}^B p $$

$$ {}^A p_{hom} = \left[\begin{array}{c} {}^A p \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^A R_B & & {}^A p_{AB} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} {}^B p \\ \hline 1 \end{array}\right] = {}^A T_B \, {}^B p_{hom} $$

relazione lineare

vettore in coordinate omogenee

matrice 4X4 di trasformazione omogenea

Proprietà della matrice T

- descrive la relazione (posizione e orientamento relativi) tra sistemi di riferimento
- trasforma la rappresentazione di un vettore posizione (applicato) da un riferimento ad un altro
- è un operatore di roto-traslazione su vettori nello spazio
- è sempre invertibile $({}^{A}T_{B})^{-1} = {}^{B}T_{A}$
- è componibile, cioè ${}^{A}T_{C} = {}^{A}T_{B}\,{}^{B}T_{C}$ ← attenzione, non commuta!

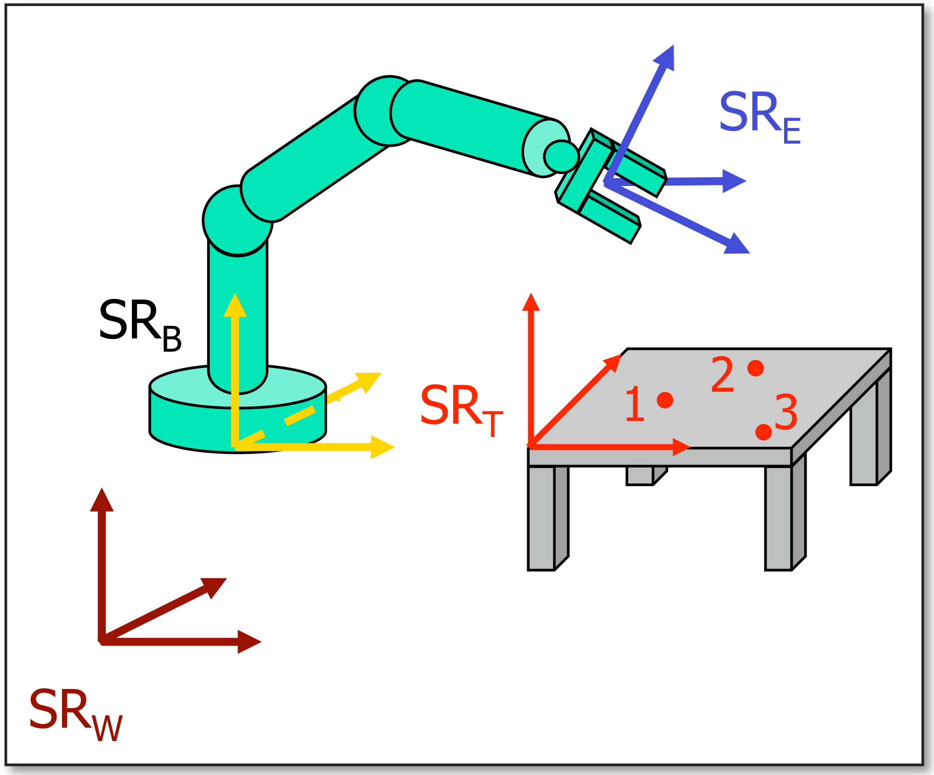
Inversa di una trasformazione omogenea

$${}^{A}p = {}^{A}p_{AB} + {}^{A}R_B\,{}^{B}p \qquad {}^{B}p = {}^{B}p_{BA} + {}^{B}R_A\,{}^{A}p = -\,{}^{A}R_B^T\,{}^{A}p_{AB} + {}^{A}R_B^T\,{}^{A}p$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} & {}^{A}R_B & & {}^{A}p_{AB} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} & {}^{B}R_A & & {}^{B}p_{BA} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} & {}^{A}R_B^T & & -\,{}^{A}R_B^T\,{}^{A}p_{AB} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$${}^{A}T_B \qquad {}^{B}T_A \qquad ({}^{A}T_B)^{-1}$$

Descrizione di un compito



descrizione assoluta del task

descrizione del task relativa all'end-effector

$$ {}^{W}T_{T} = {}^{W}T_{B}\, {}^{B}T_{E}\, {}^{E}T_{T} $$

nota, montato il robot

cinematica diretta del braccio (funzione di q)

$$ {}^{B}T_{E}(q) = {}^{W}T_{B}^{\ -1}\, {}^{W}T_{T}\, {}^{E}T_{T}^{\ -1} = \text{cost} $$

Commenti finali sulle matrici T

- sono lo strumento principale per il calcolo della cinematica diretta dei robot manipolatori
- si usano in molti settori applicativi (robotici e non)
  - nel posizionamento di una telecamera (matrice ${}^{b}T_{c}$ con i parametri estrinseci di posa)
  - in computer graphics, per le trasformazioni di visualizzazione di solidi 3D al variare del punto di osservazione

$$
{}^{A}T_{B} = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}R_{B} & & {}^{A}p_{AB} \\ \hline \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z & \sigma \end{array}\right]
$$

tutti nulli in robotica

coefficienti di deformazione prospettica

coefficiente di scalatura

sempre unitario in robotica