Sapienza Università di Roma

Unità Didattica Sistemi Digitali di Controllo

Prova Scritta del 26 Marzo 2008

Si consideri il sistema digitale di controllo rappresentato in Fig. 1 in cui il periodo di campionamento e'

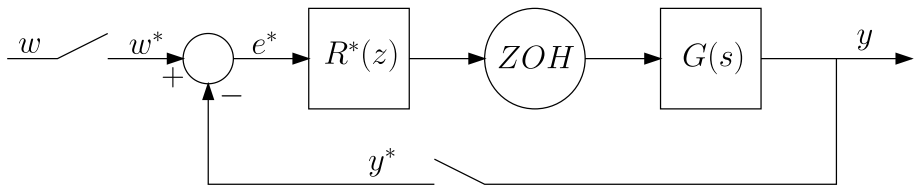

Figura 1: Sistema digitale di controllo

pari ad 1 e

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s-1)} \; .$$

Progettare $R^*(z)$ in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

1. l'errore e^* corrispondente ad un riferimento a scalino sia nullo a regime permanente;
2. la funzione di trasferimento del corrispondente sistema retroazionato tempo discreto abbia denominatore di secondo grado e abbia poli in modulo minore di 0,5.

Nota: si ricorda che il numero di Nepero e è compreso tra 2 e 3.

Proposta di soluzione

Al fine del soddisfacimento delle specifiche è sufficente considerare il sistema di controllo a tempo discreto di Fig. 2

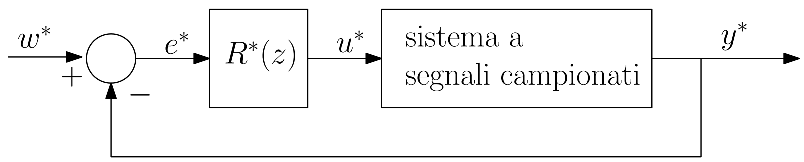

Figura 2: Sistema di controllo a tempo discreto

La funzione di trasferimento $G^*(z)$ del sistema a segnali campionati può essere calcolata usando la apposita procedura e si ottiene

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s+1}{s^2(s-1)} = \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} \\ y^*(k) &= (2e^k - k - 2)\mathrm{sca}(k) \\ Y^*(z) &= \frac{2z}{z-e} - \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{2z}{z-1} \\ G^*(z) &= Y^*(z)\frac{z-1}{z} = \frac{(2e-3)z+2-e}{(z-1)(z-e)} \ . \end{aligned}$$

Dalla teoria si ricava che il sistema a segnali campionati è di ordine due; visto che $G^*(z)$ possiede due poli, ne segue che il sistema a segnali campionati è raggiungibile ed osservabile.

Per determinare $R^*(z)$ utilizziamo il metodo di assegnamento del modello. Dapprima dobbiamo determinare una funzione di trasferimento del sistema retroazionato

$$F^*(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \tag{1}$$

che renda le specifiche soddisfatte. $F^*(z)$ deve avere grado relativo pari almeno ad 1 in modo da garantire la realizzabilità di $R^*(z)$; inoltre, $A(z)$ deve avere tutte radici in modulo minori di 1, e in più devono essere soddisfatte le relazioni

$$\begin{aligned} A(1) &= B(1) \\ A(e) &= B(e) \end{aligned} \tag{2}$$

in modo da garantire contemporaneamente la stabilità asintotica del sistema retroazionato e il soddisfacimento della specifica 1. Notare che $G^*(z)$ possiede uno zero in

$$\frac{e-2}{2e-3} \tag{3}$$

che è in modulo minore di 1 e quindi può essere cancellato da un polo di $R^*(z)$. In aggiunta la specifica 2 richiede che $A(z)$ sia di secondo grado e abbia tutte le radici in modulo minori di 0,5. Poniamo allora $A(z) = z^2$ e $B(z) = b_1 z + b_0$ in modo da avere due parametri liberi che possiamo determinare imponendo le condizioni (2); queste portano al seguente sistema di equazioni

$$1 = b_1 + b_0 \tag{4}$$
$$e^2 = b_1 e + b_0 \ , \tag{5}$$

la cui soluzione è

$$\begin{aligned} b_0 &= -e \qquad (6) \\ b_1 &= e+1\ . \qquad (7) \end{aligned}$$

Pertanto poniamo

$$F^*(z) = \frac{(e+1)z - e}{z^2}\ . \tag{8}$$

Di conseguenza risulta

$$R^*(z) = \frac{(z-1)(z-e)}{(2e-3)z+2-e} \cdot \frac{(e+1)z-e}{z^2-(e+1)z+e} = \frac{(e+1)z-e}{(2e-3)z+2-e}\ . \tag{9}$$