SISTEMI DIGITALI DI CONTROLLO

Prof. Alessandro De Luca

DIS, Università di Roma “La Sapienza”

deluca@dis.uniroma1.it

Lucidi tratti dal libro

C. Bonivento, C. Melchiorri, R. Zanasi: “Sistemi di Controllo Digitale”

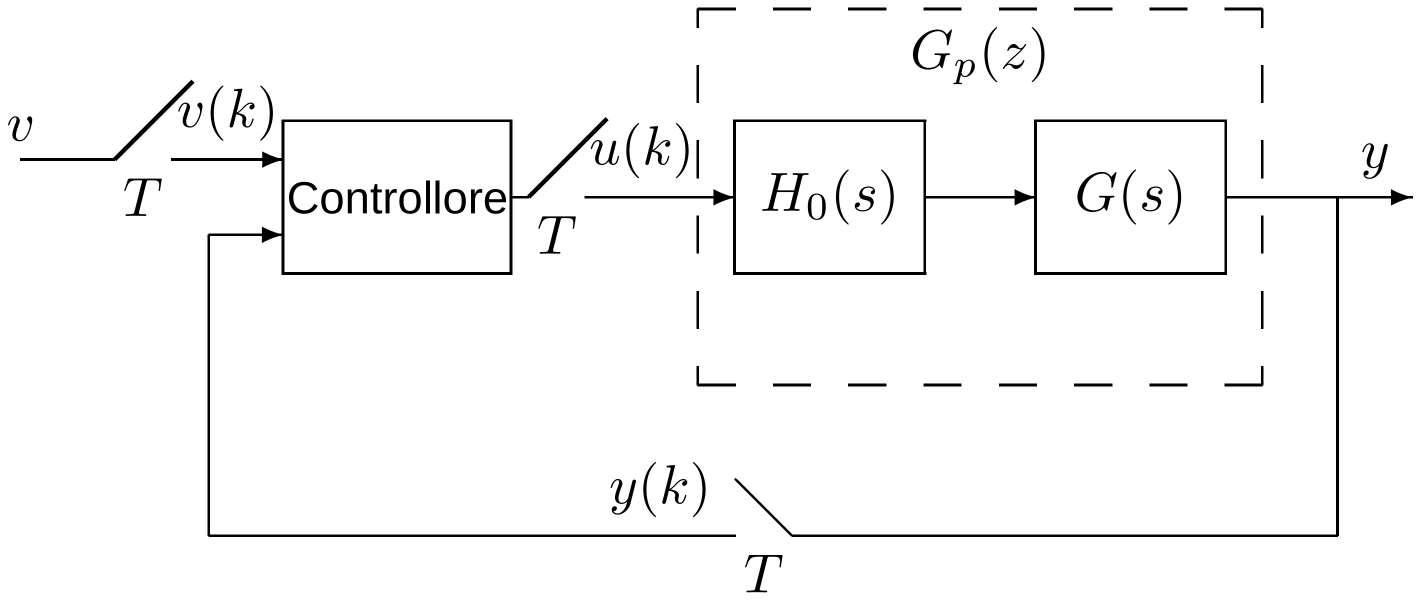
Capitolo 10: Progetto con metodi analitici

Si ringraziano gli autori

Progetto con metodi analitici – Sommario

- Assegnazione dei poli e degli zeri ammissibili
  - due ingressi per il controllore (segnale di riferimento e variabile di uscita controllata)
- Progetto con specifiche “deadbeat”
  - un solo ingresso (errore di uscita) per il controllore
  - campioni di errore a regime nulli in tempo finito (minimo) in risposta a segnali tipici (gradino, rampa, . . .)
  - eventuale assenza di oscillazioni dell’uscita continua tra gli istanti di campionamento (risposta piatta)
- Tecniche semplificate di progetto analitico
  - deadbeat a totale cancellazione
  - metodo di Dahlin
  - specifica diretta sulla variabile di controllo
  - variazioni di carico e distutbi in uscita

Schema di controllo per l'assegnazione di poli e zeri – 1



$$G_p(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

dove $B(z)$ e $A(z)$ sono polinomi coprimi (primi tra loro) in z, di grado m e n (con $m < n$)

Relazione di controllo

$$R(z)\,U(z) = T(z)\,V(z) - S(z)\,Y(z)$$

dove $R(z)$, $T(z)$ e $S(z)$ sono opportuni polinomi in z da progettare

Nota: $k = n - m =$ eccesso poli-zero $\simeq$ ritardo di tempo, pari a $(n-m)T$, del processo discretizzato

Schema di controllo per l'assegnazione di poli e zeri – 2

Il controllore prevede una combinazione di una azione in avanti (feedforward) da $V(z)$

$$H_{ff}(z) = \frac{T(z)}{R(z)}$$

e di una retroazione (feedback) da $Y(z)$

$$H_{fb}(z) = \frac{S(z)}{R(z)}$$

Per assicurare la realizzabilità (vincolo di causalità) del controllore, occorre che

$$grado(R) \geq grado(T) \qquad grado(R) \geq grado(S)$$

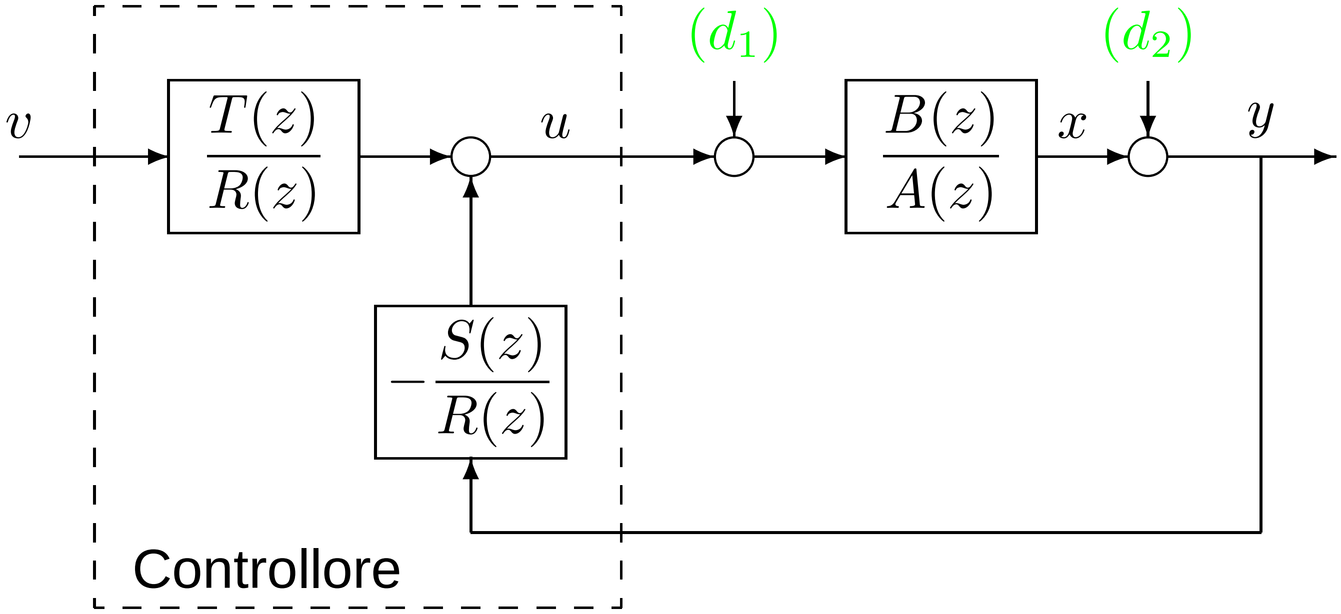
In pratica, se è trascurabile (come di norma) il tempo di elaborazione, si pone

$$grado(R) = grado(T) = grado(S)$$

oppure se il tempo di elaborazione è comparabile a un periodo di campionamento

$$grado(R) = grado(T) + 1 = grado(S) + 1$$

Schema di controllo per l'assegnazione di poli e zeri – 3



Sistema complessivo con feedback e feedforward $\dfrac{Y(z)}{V(z)} = \dfrac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)}$

Modello di riferimento ingresso-uscita desiderato $G_m(z) = \dfrac{B_m(z)}{A_m(z)}$ (A_m e B_m coprimi)

Relazione del progetto analitico $\dfrac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} = \dfrac{B_m(z)}{A_m(z)}$ con

$$grado(A_m) - grado(B_m) \geq grado(A) - grado(B)$$

$\Leftrightarrow$ il ritardo ad anello chiuso non può essere inferiore al ritardo dell'anello aperto

Progetto per assegnazione di poli e zeri – 1

Poichè la retroazione è dall'uscita, si può tenere conto di possibili dinamiche stabili interne ("dell'osservatore") non presenti nel legame ingresso-uscita e porre

$$G_m(z) = \frac{A_0(z)B_m(z)}{A_0(z)A_m(z)}$$

con $A_0(z)$ stabile che influenza, come si vedrà nel seguito, solo i legami disturbo-uscita

Se si vuole attenuare l'errore in uscita per disturbi a bassa frequenza, il guadagno di anello

$$\left. \frac{B(z)S(z)}{A(z)R(z)} \right|_{z=e^{j\omega T}} \quad \text{deve essere elevato per } \omega \to 0$$

Ne segue un controllo di tipo integrale (se non già presente o sufficiente un'azione integrale in $G_p(z)$)

$$R(z) = (z-1)^q \, R_1(z) \qquad q \geq 0$$

Se poi $T(z) = S(z)$, si ha solo reazione dall'errore: $R(z)U(z) = S(z)(V(z) - Y(z))$

Obiettivo: progettare $R(z)$, $S(z)$ e $T(z)$ sotto opportuni vincoli analitici

Progetto per assegnazione di poli e zeri – 2

E' possibile la cancellazione tra radici di B (zeri del processo) e radici di $A\,R + B\,S$ (poli del sistema ad anello chiuso) limitata agli zeri a fase minima (radici di B^+ con $|z| < 1$)

$$B(z) = B^+(z)B^-(z) \quad \Rightarrow \quad B_m(z) = B^-(z)B'_m(z) \qquad \text{(gli zeri in } B^- \text{ si conservano)}$$

Come visto, la presenza di zeri a modulo $>$ 1 ($B^-(z) \neq 1$) in $G_p(z)$ dipende da T! Si ha

$$G_p(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}G(s)\right] \quad \Rightarrow \quad \lim_{T\to 0} G_p(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{1}{s^l}\right]$$

con $l =$ eccesso poli-zero di $G(s)$; per $l \geq 3$ si hanno sempre zeri a fase non minima in $G_p(z)$, ad esempio con $l = 3$

$$\lim_{T\to 0} G_p(z) = \frac{T^3}{3!}\,\frac{z^{-1}(1+4\,z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^3} \qquad \Rightarrow \qquad \text{uno zero in } z = -3.73$$

Il fattore $B^+(z)$ stabile può invece essere cancellato ponendo $R(z) = B^+(z)R'(z)$

Si può quindi riscrivere la relazione di progetto come

$$\frac{B^+(z)B^-(z)T(z)}{B^+(z)(A(z)R'(z)+B^-(z)S(z))} = \frac{B^-(z)B'_m(z)}{A_m(z)} \quad \Rightarrow \quad \frac{T(z)}{A(z)R'(z)+B^-(z)S(z)} = \frac{B'_m(z)}{A_m(z)}$$

Progetto per assegnazione di poli e zeri – 3

Tenendo conto della dinamica dell'osservatore $A_0(z)$, si hanno quindi due equazioni fondamentali di progetto (tralasciando d'ora in poi la dipendenza da z)

$$A\,R' + B^- S = A_0 A_m$$

$$T = A_0 B'_m$$

la prima da risolversi in R' e S, la seconda usata per il calcolo diretto di T

Il polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso (moltiplicando la prima delle precedenti per B^+) risulta pari a

$$A\,R + B\,S = B^+ A_0 A_m$$

le cui radici (ossia i poli ad anello chiuso, ovviamente tutti stabili) sono dunque

- gli zeri stabili del sistema ad anello aperto cancellati dal controllore (B^+)
- i poli del modello di riferimento desiderato (A_m)
- i poli della “dinamica dell'osservatore” (A_0)

la cancellazione di B^+ va fatta con una certa cautela: meglio limitarsi agli zeri sufficientemente interni al cerchio unitario per questioni di robustezza pratica

Soluzione analitica generale: Equazione diofantina – 1

La prima equazione fondamentale di progetto è della forma polinomiale generale (studiata da Diofanto)

$$A\,X + B\,Y = C$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una soluzione (X, Y) è che il massimo comun divisore di A e B sia un fattore di C (dimostrazione in App. D del libro)

Tale condizione è ovviamente verificata se A e B sono polinomi coprimi (ipotesi di partenza su $G_p(z)$)

Se (X_0, Y_0) è una soluzione, allora esistono infinite soluzioni (parametrizzazione di tutte le soluzioni polinomiali) ottenibili nella forma (con Q polinomio arbitrario)

$$X = X_0 + Q\,B \qquad Y = Y_0 - Q\,A$$

Esiste invece un'unica soluzione se si pone la condizione aggiuntiva sui gradi

$$grado(X) < grado(B)$$

oppure (quella che utilizzeremo nel problema di assegnazione di poli e zeri)

$$grado(Y) < grado(A)$$

NOTA: nelle applicazioni possono sussistere ulteriori vincoli sui gradi di X e Y; ad es., nell'assegnazione dei poli e zeri si ha $X{=}R$ e $Y{=}S$, con $grado(S) \leq grado(R)$ per la necessaria causalità di S/R)

Soluzione analitica generale: Equazione diofantina – 2

La soluzione dell'equazione diofantina si riconduce alla soluzione di un sistema di equazioni lineari nei coefficienti incogniti dei polinomi X e Y

Si applica il principio di identità tra polinomi, uguagliando i coefficienti dei termini di uguale grado. Posto (attenzione all'ordine di numerazione dei pedici dei coefficienti!)

$$\begin{aligned} A(z) &= z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n && \text{polinomio monico} \\ B(z) &= b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \cdots + b_m && (\text{con } m<n) \\ C(z) &= c_0 z^p + c_1 z^{p-1} + c_2 z^{p-2} + \cdots + c_p \end{aligned}$$

Scegliendo allora $grado(Y) = n - 1 \geq 0$ e quindi $grado(X) = p - n$ (≥ 0 senza perdita di generalità)

$$\begin{aligned} Y(z) &= y_0 z^{n-1} + y_1 z^{n-2} + \cdots + y_{n-1} \\ X(z) &= x_0 z^{p-n} + x_1 z^{p-n-1} + \cdots + x_{p-n} \end{aligned}$$

si ha una e una sola soluzione

Infatti $grado(C) = p$ e quindi il principio di identità si traduce in $p+1$ equazioni nelle $p+1$ incognite $(y_0, \ldots, y_{n-1}, x_0, \ldots, x_{p-n})$ (sistema lineare quadrato di ordine $p+1$)

Soluzione analitica generale: Equazione diofantina – 3

Il sistema di $(p+1)$ equazioni lineari in $(p+1)$ incognite è dato da

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
a_1 & 1 & \ddots & \vdots & b_0 & 0 & \ddots & \vdots \\
a_2 & a_1 & \ddots & 0 & b_1 & b_0 & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\
a_n & \vdots & & a_1 & b_m & \vdots & & b_0 \\
0 & a_n & & \vdots & 0 & b_m & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \ddots & \ddots & \\
0 & \dots & 0 & a_n & 0 & \dots & 0 & b_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{p-n} \\ y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{p-2} \\ c_{p-1} \\ c_p
\end{bmatrix}
$$

ottenuto per convoluzione (Matlab!) dei polinomi AX e BY e loro somma

La prima equazione fornisce direttamente $x_0 = c_0$ e quindi x_0 si può considerare noto nelle restanti p equazioni

Soluzione analitica generale: Equazione diofantina – 4

Si ottiene un sistema lineare quadrato ridotto all'ordine p

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & \ddots & \vdots & b_1 & b_0 & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & 0 & b_2 & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_n & \vdots & & a_1 & b_m & \vdots & & b_1 \\ 0 & a_n & & \vdots & 0 & b_m & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_n & 0 & \dots & 0 & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{p-n} \\ y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - c_0 a_1 \\ c_2 - c_0 a_2 \\ \vdots \\ c_n - c_0 a_n \\ c_{n+1} \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

la cui matrice dei coefficienti è nella forma di Sylvester

Condizione necessaria e sufficiente per la non singolarità di tale matrice (e quindi per l'esistenza e unicità della soluzione) è che i polinomi A e B siano coprimi, come infatti assunto nel nostro problema di assegnazione di poli e zeri

Esempi di soluzione dell’equazione diofantina – 1

Dati i tre polimomi

$$A(z) = z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 \;\; (n = 4) \qquad B(z) = b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3 \;\; (m = 3)$$

$$C(z) = c_0 z^7 + c_1 z^6 + c_2 z^5 + c_3 z^4 + c_4 z^3 + c_5 z^2 + c_6 z + c_7 \;\; (p = 7)$$

(si noti che i coefficienti c_i delle potenze più elevate di $C(z)$ potrebbero anche essere nulli, fornendo $p<7$; si può però sempre ‘immergere’ il problema in una dimensione p opportuna)

la struttura delle soluzioni è ($grado(Y)=n-1=3$, $grado(X)=p-n=3 \Rightarrow Y/X$ propria!)

$$Y(z) = y_0 z^3 + y_1 z^2 + y_2 z + y_3 \qquad X(z) = x_0 z^3 + x_1 z^2 + x_2 z + x_3$$

Dalla in $AX + BY = C$, si hanno $p+1 = 8$ equazioni nei $p+1 = 8$ coefficienti incogniti

grado 7	$x_0 = c_0$
grado 6	$a_1x_0+x_1+b_0y_0 = c_1$
grado 5	$a_2x_0+a_1x_1+x_2+b_1y_0+b_0y_1 = c_2$
grado 4	$a_3x_0+a_2x_1+a_1x_2+x_3+b_2y_0+b_1y_1+b_0y_2 = c_3$
grado 3	$a_4x_0+a_3x_1+a_2x_2+a_1x_3+b_3y_0+b_2y_1+b_1y_2+b_0y_3 = c_4$
grado 2	$a_4x_1+a_3x_2+a_2x_3+b_3y_1+b_2y_2+b_1y_3 = c_5$
grado 1	$a_4x_2+a_3x_3+b_3y_2+b_2y_3 = c_6$
grado 0	$a_4x_3+b_3y_3 = c_7$

Esempi di soluzione dell’equazione diofantina – 2

La forma matriciale rivela la struttura generale

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 \\ 0 & 0 & a_4 & a_3 & 0 & 0 & b_3 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{bmatrix}$$

che ha soluzione unica se e solo se $A(z)$ e $B(z)$ sono coprimi

Esempi di soluzione dell'equazione diofantina – 3

Data l'equazione $AX + BY = C$

$$(z^2 + a_1 z + a_2)X(z) + (b_0 z + b_1)Y(z) = c_0 z^2 + c_1 z + c_2 \qquad n = 2,\ m = 1,\ p = 2$$

si pone $Y(z) = y_0 z + y_1$ (grado $n - 1 = 1$) e $X(z) = x_0$ (grado $p - n = 0$), ottenendo

$$(x_0 + b_0 y_0)z^2 + (a_1 x_0 + b_0 y_1 + b_1 y_0)z + (a_2 x_0 + b_1 y_1) = c_0 z^2 + c_1 z + c_2$$

ossia le tre equazioni in tre incognite

$$\begin{array}{l} \text{grado 2} \\ \text{grado 1} \\ \text{grado 0} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & b_0 & 0 \\ a_1 & b_1 & b_0 \\ a_2 & 0 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

che ha soluzione unica se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti

$$\det = b_1^2 + a_2 b_0^2 - a_1 b_0 b_1 \neq 0$$

Questa condizione è soddisfatta se e solo se $A(z)$ e $B(z)$ sono coprimi. Infatti la radice di $B(z) = 0$ è pari a $z^* = -b_1/b_0$ (con $b_0 \neq 0$) e per essere anche radice di $A(z)$ . . .

$$A(z)|_{z=z^*} = \left(\frac{-b_1}{b_0}\right)^2 + a_1\left(\frac{-b_1}{b_0}\right) + a_2 = \frac{\det}{b_0^2} = 0$$

Risoluzione della prima equazione fondamentale di progetto

Tornando al nostro problema di assegnazione di poli e zeri

$$A\,R' + B^- S = A_0 A_m$$

si pone per l'unicità della soluzione (in analogia al caso generale)

$$grado(S) = grado(A) - 1$$

Per la causalità del controllore doveva già aversi

$$grado(A_m) - grado(B_m) \geq grado(A) - grado(B)$$

Dalla espressione del polinomio caratteristico ad anello chiuso

$$A\,R + B\,S = B^+ A_0 A_m$$

è possibile mostrare che per ottenere causalità è anche necessario che sia

$$grado(A_0) \geq 2 \cdot grado(A) - grado(A_m) - grado(B^+) - 1$$

o, più in generale, assumendo la forma $R(z) = (z-1)^q R_1(z)$ con $q \geq 0$ (controllo di tipo integrale se $q \geq 1$)

$$grado(A_0) \geq 2 \cdot grado(A) - grado(A_m) - grado(B^+) + q - 1$$

Passi del progetto per assegnazione di poli e zeri

1. Si assumono come dati $G_p = B/A$, $G_m = B_m/A_m$ e A_0
2. Si fattorizza

$$B = B^+ B^- \qquad B_m = B^- B'_m \qquad \text{con } B^+ \text{ posto monico}$$

3. Si risolve il sistema di equazioni in R'_1 e S

$$(z-1)^q A\, R'_1 + B^-\, S = A_0 A_m \qquad (q \geq 0)$$

   con

$$grado(S) = grado(A) + q - 1$$

$$grado(R'_1) = grado(A_0) + grado(A_m) - grado(A) - q$$

4. La legge di controllo complessiva è

$$R\, u = T\, v - S\, y \qquad \text{con} \qquad R = B^+ R' \qquad R' = (z-1)^q R'_1 \qquad T = A_0 B'_m$$

5. Realizzazione come equazione alle differenze (con z operatore di shift di un intervallo di campionamento)

$$R(z)u(k) = T(z)v(k) - S(z)y(k)$$

Nota sulla scelta del modello di riferimento

Nelle applicazioni pratiche la scelta di $G_m = B_m/A_m$ avviene in base a pochi parametri globali di specifica (banda passante, modulo alla risonanza, poli dominanti, ...)

Si può prendere

$$G_m(z) = \frac{Q(1)\,B^-(z)}{B^-(1)\,z^k Q(z)}$$

dove

- $B^-(z)$ sono gli zeri non cancellabili del processo discretizzato
- si sceglie $Q(z) = z^2 + p_1 z + p_2$, in base a poli dominanti a pulsazione naturale ω_n e coefficiente di smorzamento δ, con

  $$p_1 = -2e^{-\delta\omega_n T}\cos(\omega_n T\sqrt{1-\delta^2}) \qquad p_2 = e^{-2\delta\omega_n T}$$

  oppure $Q(z) = z - a$, con $a = e^{-T/\tau}$, per un comportamento desiderato senza sovraelongazione
- k in z^k è eventualmente utilizzato per gestire ritardi/eccesso poli-zeri del processo discreto (causalità del controllore)
- le constanti $Q(1)$ e $B^-(1)$ servono a rendere il guadagno statico di G_m unitario

Esempio di progetto per assegnazione di poli e zeri – 1

Si consideri il processo $G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$ con un ricostruttore ZOH. Si ha

$$G_p(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1}{s(s+1)}\right] = \frac{K(z-b)}{(z-1)(z-a)}$$

dove

$$a = e^{-T} \in (0,1) \qquad K = a + T - 1 > 0 \qquad b = 1 - \frac{T(1-a)}{K} < 0 \quad (|b| < 1)$$

La specifica per il sistema ad anello chiuso sia del tipo (con $G_m(1) = 1$)

$$G_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{z(1+p_1+p_2)}{z^2+p_1 z+p_2} \qquad (\Rightarrow \text{ stesso eccesso poli-zeri di } G_p(z))$$

$G_p(z)$ ha uno zero in $z = b$ che non è presente nella $G_m(z)$ da cui

$$B = B^+B^- \qquad B^+ = z - b \quad \text{(monico)} \qquad B^- = K$$

Inoltre un'azione integrale $(z-1)^{-1}$ è già presente in $G_p(z)$ per cui $q = 0$ (e quindi $R' = R'_1$ in $R = B^+R'$)

Esempio di progetto per assegnazione di poli e zeri – 2

Ricapitolando, deve essere

- $B'_m = \dfrac{B_m}{K} = \dfrac{z(1+p_1+p_2)}{K} \qquad (B_m = B^- B'_m)$
- $grado(A_0) \geq 2 \cdot grado(A) + grado(A_m) - grado(B^+) - 1 = 2 \cdot 2 - 2 - 1 - 1 = 0$
  si sceglie $A_0 = 1$ per semplicità
- $grado(R') = grado(A_0) + grado(A_m) - grado(A) = 0 + 2 - 2 = 0$
- $grado(S) = grado(A) - 1 = 2 - 1 = 1$

per cui

$$R' = r_0 \qquad S = s_0 z + s_1 \qquad [R = B^+ R' = r_0(z-b)]$$

L'equazione di progetto $A\,R' + B^- S = A_0 A_m$ diviene

$$(z-1)(z-a)\,r_0 + K\,(s_0 z + s_1) = z^2 + p_1 z + p_2$$

da cui

$$r_0 = 1 \qquad s_0 = \frac{1+a+p_1}{K} \qquad s_1 = \frac{p_2 - a}{K}$$

e inoltre

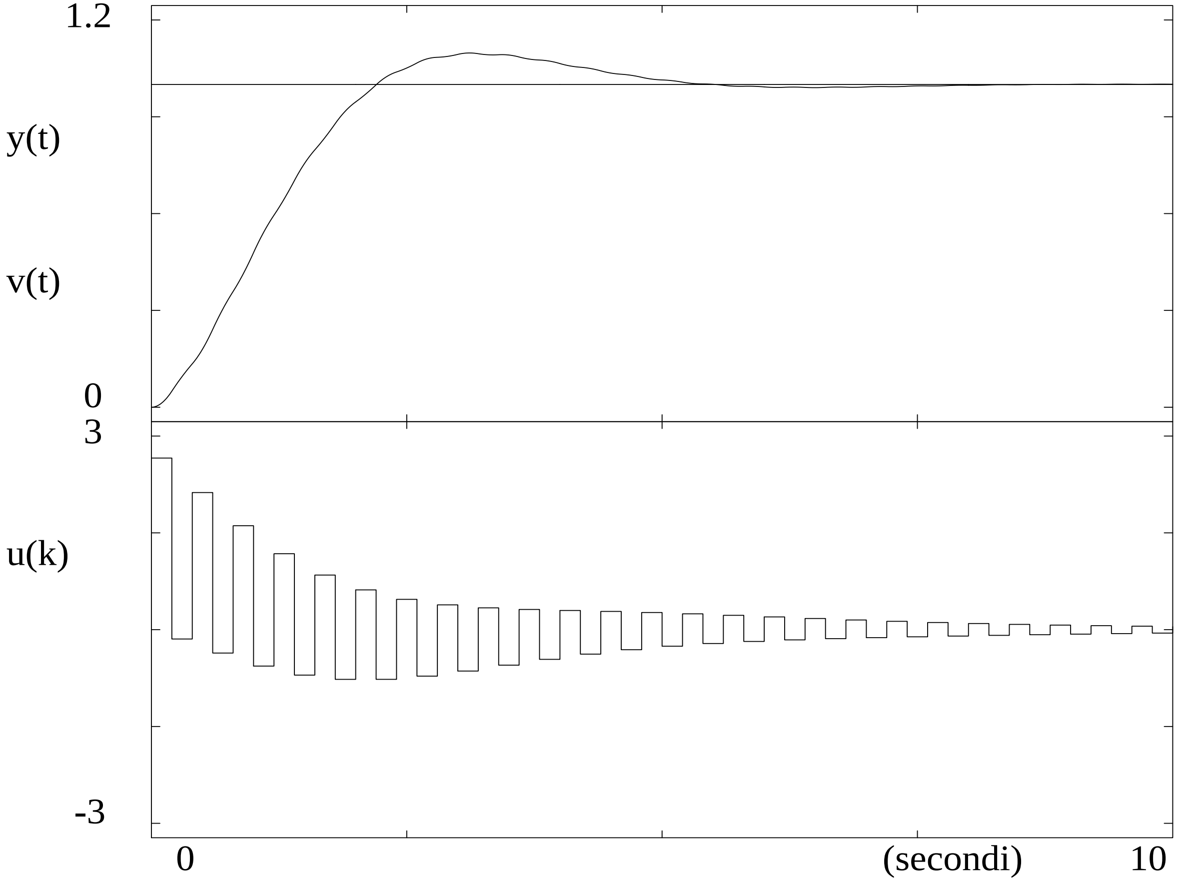
$$T(z) = A_0 B'_m = \frac{z(1+p_1+p_2)}{K} = t_0 z$$

Esempio di progetto per assegnazione di poli e zeri – 3

La legge di controllo $Ru = Tv - Sy$ è realizzata come

$$u(k) = bu(k-1) + t_0 v(k) - s_0 y(k) - s_1 y(k-1)$$

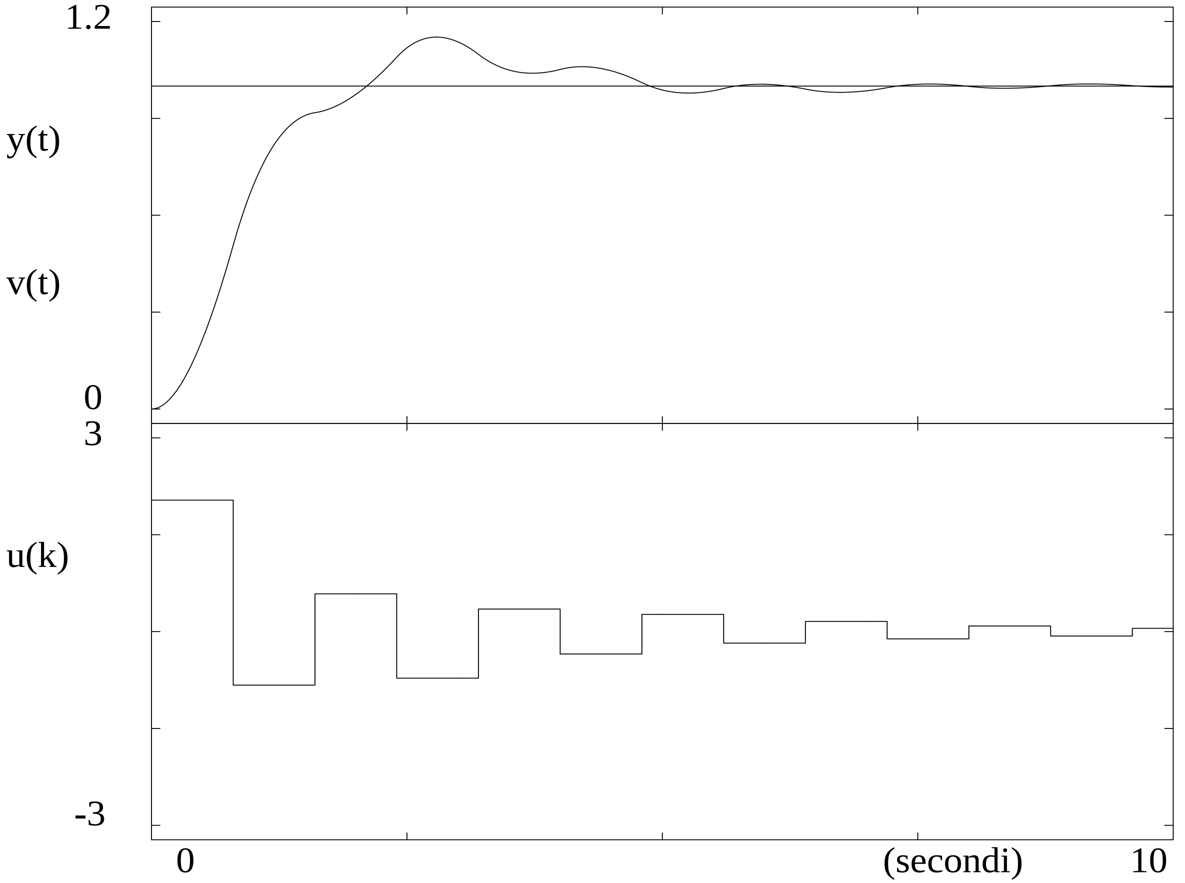
Uscita $y(t)$ e variabile di controllo $u(k)$ nel caso in cui $\delta = 0.6$, $\omega_n = 1.2$ e $T = 0.2$ s



$$\Rightarrow \quad r_0 = 1 \quad s_0 = 6.3413 \quad s_1 = -3.6821 \quad t_0 = 2.6592 \quad (b = -0.9355)$$

Esempio di progetto per assegnazione di poli e zeri – 4

Uscita $y(t)$ e variabile di controllo $u(k)$ nel caso in cui $\delta = 0.6$, $\omega_n = 1.2$ e $T = 0.8$ s



$$\Rightarrow \quad r_0 = 1 \quad s_0 = 2.5694 \quad s_1 = -0.5347 \quad t_0 = 2.0347 \quad (b = -0.7669)$$

In entrambi i casi è presente un'oscillazione dei campioni di controllo alla frequenza di campionamento (ringing), legata alla cancellazione dello zero $(z - b)$ (in B^+)

Esempio di progetto per assegnazione di poli e zeri – 5

Per eliminare il problema di 'ringing', si modifica $G_m(z)$ evitando la cancellazione dello zero in b (che era comunque ammissibile, in quanto $|b| < 1$)

$$G_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{1 + p_1 + p_2}{1 - b} \frac{z - b}{z^2 + p_1 z + p_2}$$

essendo ora $B^+ = 1$, $B^- = K(z - b)$, e quindi $B_m = B^- B'_m$ con

$$B'_m = \frac{1 + p_1 + p_2}{K(1 - b)}$$

Poichè $grado(A_0) \geq 2 \cdot grado(A) - grado(A_m) - grado(B^+) - 1 = 4 - 2 - 0 - 1 = 1$, si sceglie $A_0(z) = z$

I gradi minimi di R ed S sono pertanto

$$\begin{aligned} grado(R) &= grado(A_0) + grado(A_m) - grado(A) = 1 + 2 - 2 = 1 \\ grado(S) &= grado(A) - 1 = 1 \end{aligned}$$

e si pone $R = r_0 z + r_1$ e $S = s_0 z + s_1$

Esempio di progetto per assegnazione di poli e zeri – 6

L'equazione di progetto $A\,R + B^- S = A_0 A_m$ è

$$(z-1)(z-a)(r_0 z + r_1) + K(z-b)(s_0 z + s_1) = z^3 + p_1 z^2 + p_2 z \qquad (*)$$

da cui $r_0 = 1$ e

$$r_1 = -b + \frac{b(b^2 + p_1 b + p_2)}{(b-1)(b-a)} \qquad \text{(per } z = b \text{ in } (*)\text{)}$$

$$K(1-b)(s_0 + s_1) = 1 + p_1 + p_2 \qquad \text{(per } z = 1 \text{ in } (*)\text{)}$$

$$K(a-b)(s_0 a + s_1) = a^3 + p_1 a^2 + p_2 a \qquad \text{(per } z = a \text{ in } (*)\text{)}$$

Risolvendo un sistema 2×2 si ottiene

$$s_0 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1-a} \qquad s_1 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1 a}{1-a}$$

$$\alpha_1 = \frac{1 + p_1 + p_2}{K(1-b)} \qquad \alpha_2 = \frac{a^3 + p_1 a^2 + p_2 a}{K(a-b)}$$

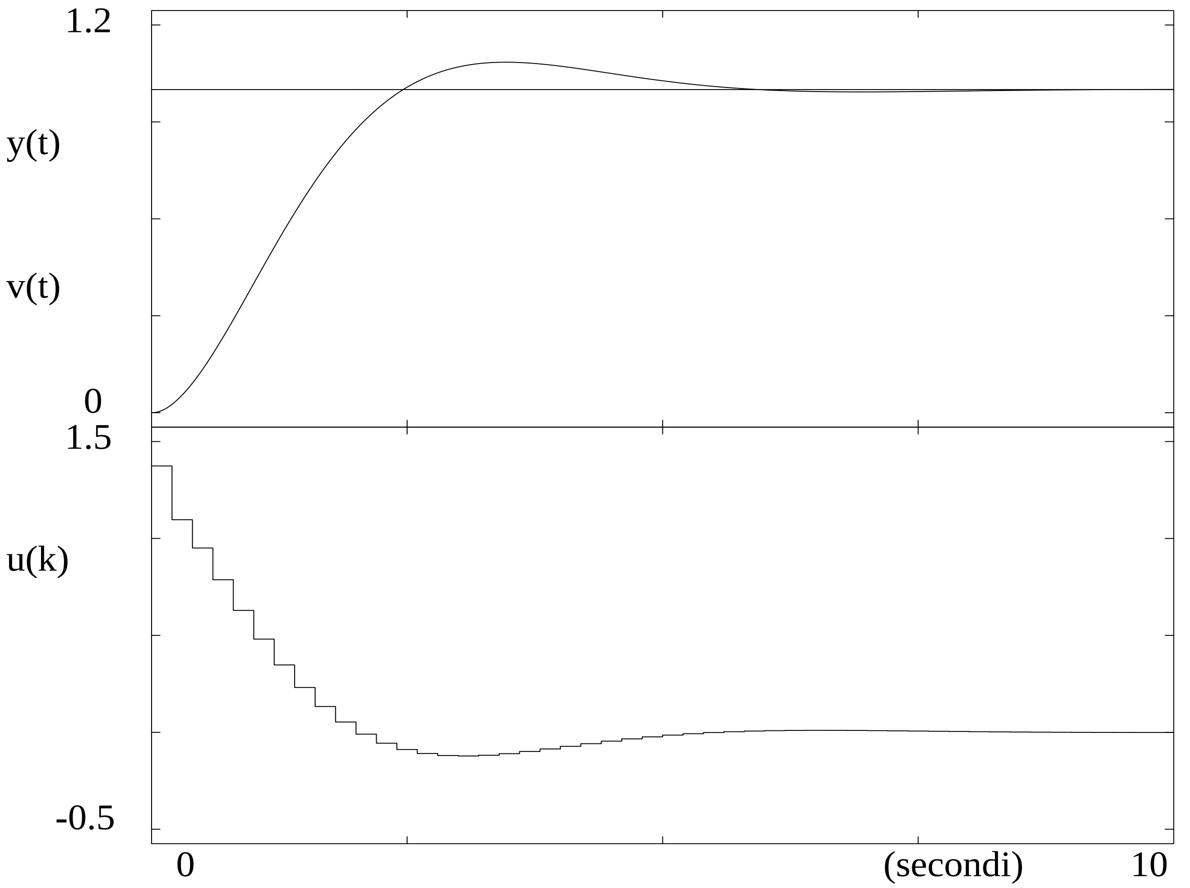
e infine $T(z) = A_0 B'_m = z\,\dfrac{1 + p_1 + p_2}{K(1-b)} = t_0 z$

Esempio di progetto per assegnazione di poli e zeri – 7

La legge di controllo $Ru = Tv - Sy$ è realizzata come

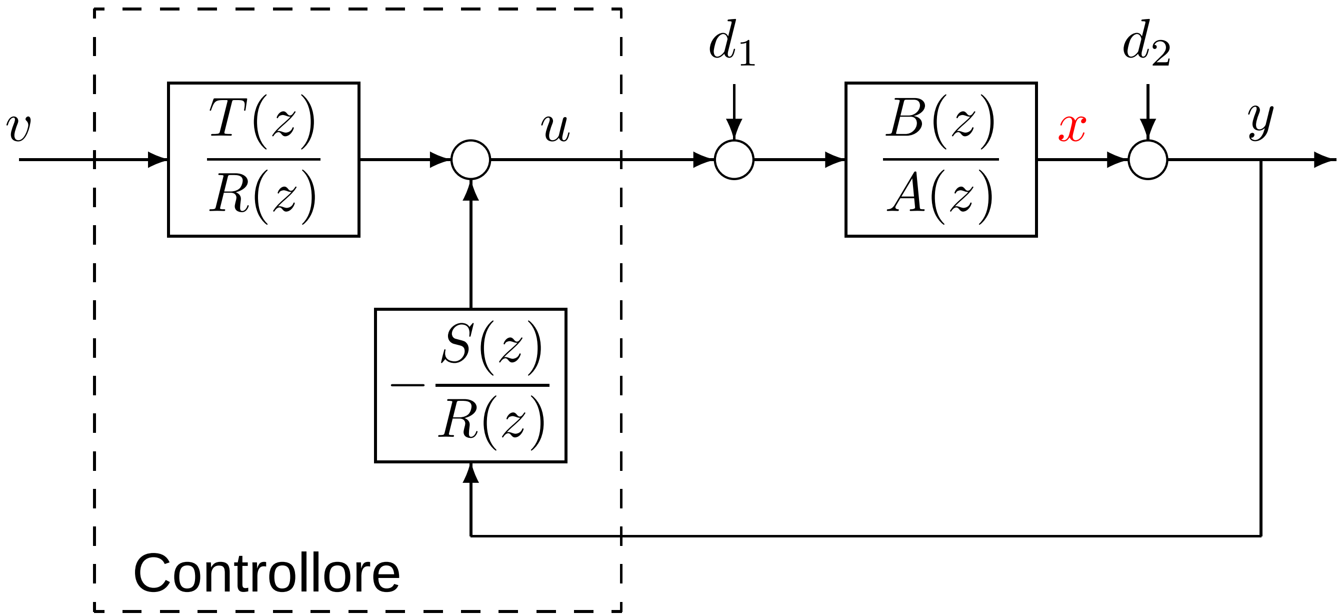
$$u(k) = -r_1 u(k-1) + t_0 v(k) - s_0 y(k) - s_1 y(k-1)$$

Uscita $y(t)$ e variabile di controllo $u(k)$ nel caso visto con $\delta = 0.6$, $\omega_n = 1.2$ e $T = 0.2$ s



Il fenomeno di ringing è scomparso

Azione dei disturbi nel progetto per assegnazione di poli e zeri – 1



$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\frac{B}{A}\frac{T}{R}}{1+\frac{B}{A}\frac{S}{R}}\,v + \frac{\frac{B}{A}}{1+\frac{B}{A}\frac{S}{R}}\,d_1 - \frac{\frac{B}{A}\frac{S}{R}}{1+\frac{B}{A}\frac{S}{R}}\,d_2 \\
&= \frac{TB}{AR+BS}\,v + \frac{RB}{AR+BS}\,d_1 - \frac{SB}{AR+BS}\,d_2
\end{aligned}
$$

Azione dei disturbi nel progetto per assegnazione di poli e zeri – 2

Ponendo

$$H_{fb} = \frac{S}{R} \quad \text{blocco in retroazione} \qquad H_a = \frac{B}{A}\frac{S}{R} \quad \text{funzione di anello}$$

si ottiene (essendo, in assenza dei disturbi, $y = x = (B_m/A_m)v$ dalla precedente sintesi ingresso-uscita)

$$x = \frac{B_m}{A_m} v + \frac{H_a}{1 + H_a} \frac{1}{H_{fb}} d_1 - \frac{H_a}{1 + H_a} d_2$$

Sostituendo infine $A\,R + B\,S = B^+ A_0 A_m$, si ha

$$\begin{aligned} x &= \frac{B_m}{A_m} v + \frac{R\,B}{B^+\,A_0\,A_m} d_1 - \frac{S\,B}{B^+\,A_0\,A_m} d_2 \\ &= \frac{B_m}{A_m} v + \frac{R\,B^-}{A_0\,A_m} d_1 - \frac{S B^-}{A_0\,A_m} d_2 \end{aligned}$$

A_0 non influenza il comportamento tra ingresso di riferimento e uscita ma condiziona la risposta ai disturbi d_1 (in ingresso al processo) e d_2 (sull'uscita). Per attenuare disturbi a pulsazione ω, si può poi inserire un filtro selettivo, $Q(z) = z^2 - 2ze^{-aT}\cos\omega + e^{-2aT}$, come fattore di S e/o R

Esempio di progetto per assegnazione in presenza di disturbi – 1

Valutiamo il possibile beneficio di A_0 sulla reiezione dei disturbi esterni, in particolare in presenza di $d_1 \neq 0$ ($d_2 = 0$) in ingresso al seguente processo

$$G_p(z) = \frac{0.1}{z-1}$$

per il quale si sceglie un semplice modello di riferimento per il comportamento ingresso-uscita dato da

$$G_m(z) = \frac{0.2}{z-0.8}$$

Se $A_0 = 1$, è immediato verificare che la legge generale con $T = S = 2$ e $R = 1$ fornisce un controllo con feedback dall'errore

$$u(k) = 2[v(k) - y(k)]$$

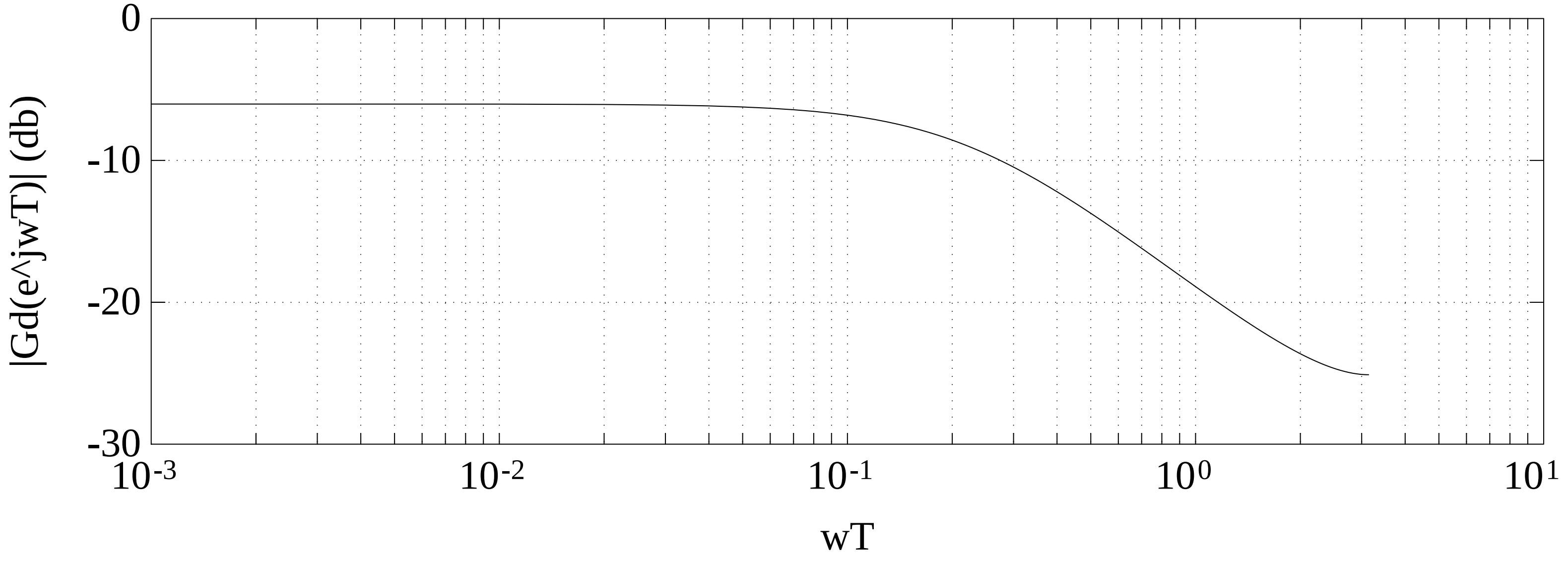
che soddisfa la specifica ingresso-uscita. In questo caso

$$x = \frac{0.2}{z-0.8}v + \frac{0.1}{z-0.8}d_1 = G_m(z)v + G_{d_1}(z)d_1$$

Poichè $G_{d_1}(1) = 0.5$, la variabile $y = x$ risulta fortemente influenzata da un disturbo d_1 costante (il 50% del disturbo si ritrova sull'uscita a regime permanente)

Esempio di progetto per assegnazione in presenza di disturbi – 2

Diagramma di Bode della funzione $G_{d_1}(e^{j\omega T})$ per $A_0 = 1$



Per diminuire tale influenza, si fissa un valore a, con $|a| < 1$, e si pone per il polinomio "osservatore"

$$A_0(z) = z - a$$

per cui l'equazione di progetto diventa

$$(z-1)(r_0 z + r_1) + 0.1(s_0 z + s_1) = (z-a)(z-0.8)$$

da cui si ha subito $r_0 = 1$, fornendo poi solo 2 equazioni nelle 3 incognite r_1, s_0 e s_1

Esempio di progetto per assegnazione in presenza di disturbi – 3

Si può allora sfruttare tale grado di libertà per imporre $R(1) = 0$, ossia un'azione integrale (a monte del disturbo). Si ricava allora

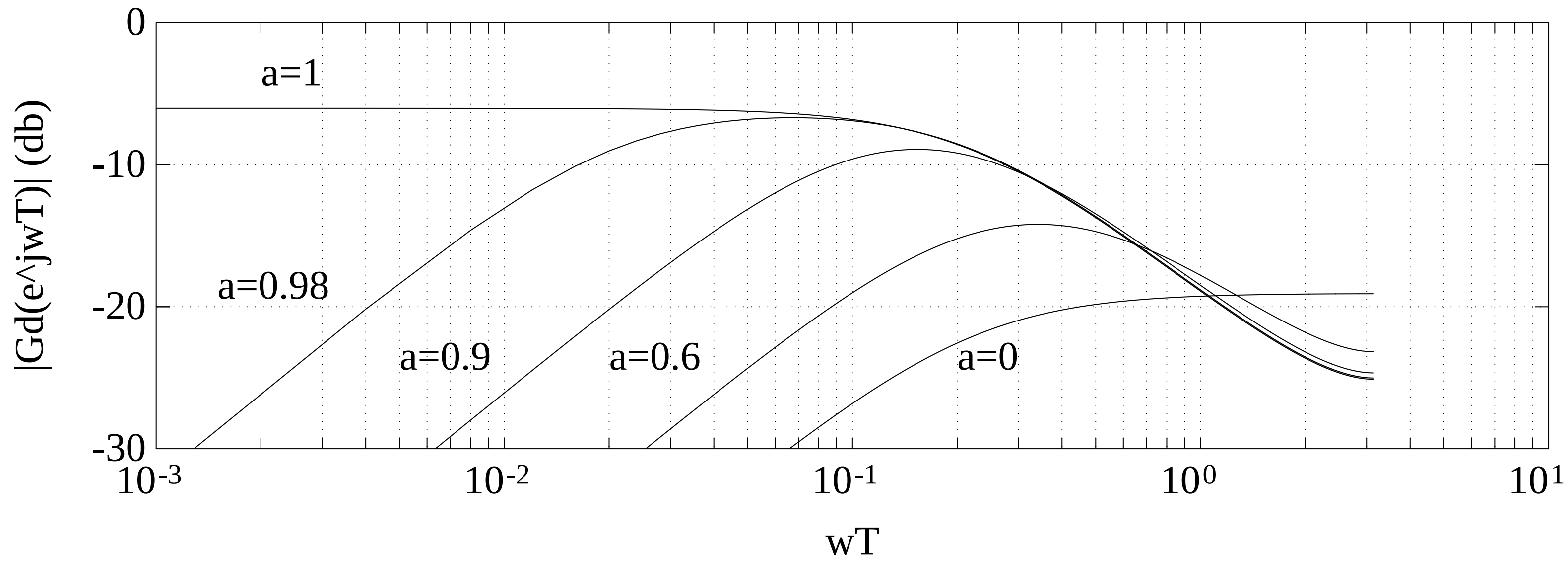
$$r_1 = -1 \qquad s_0 = 12 - 10a \qquad s_1 = 8a - 10$$

e quindi

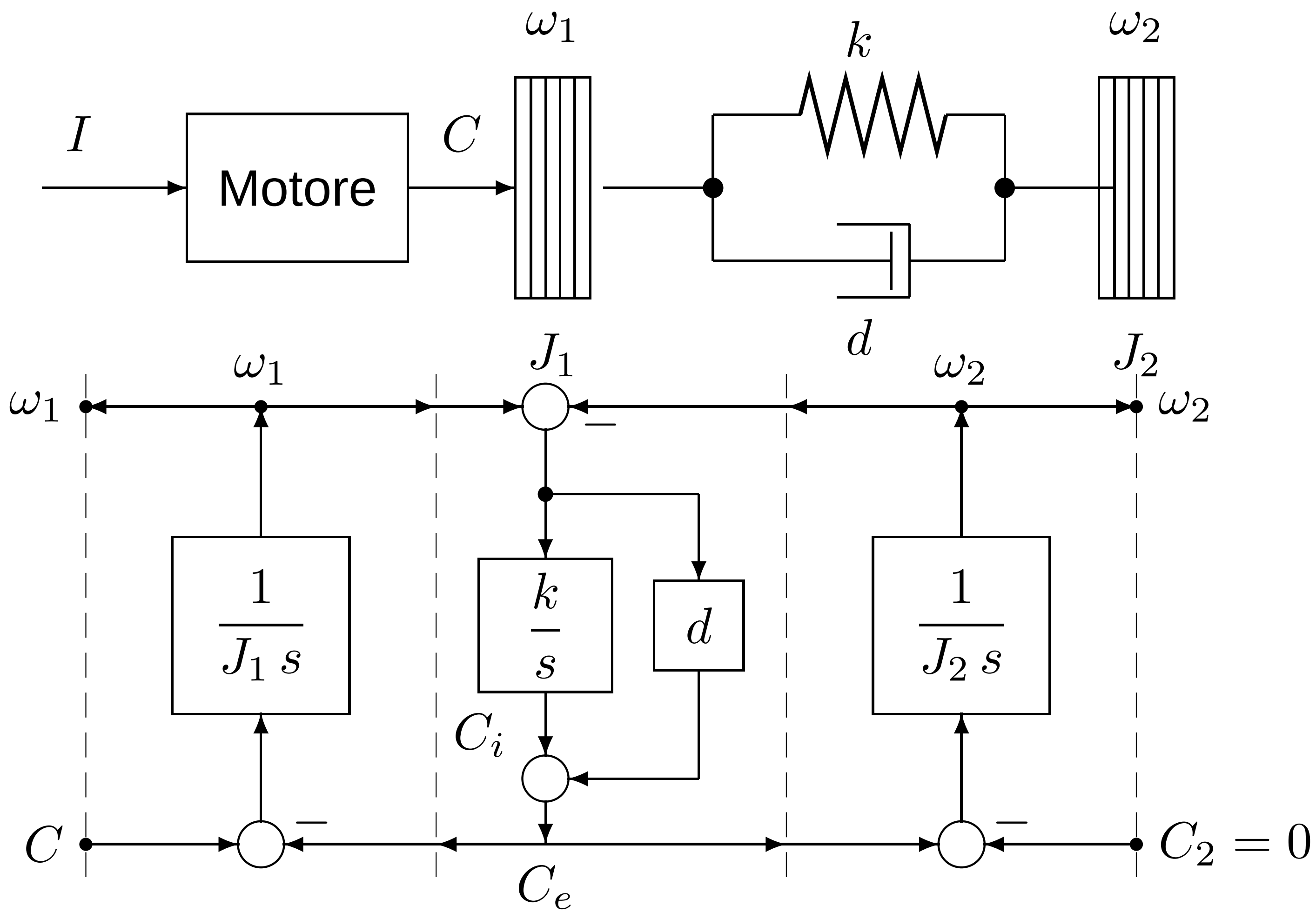
$$x = \frac{0.2}{z-0.8}\,v + \frac{0.1(z-1)}{(z-a)(z-0.8)}\,d_1$$

La funzione di trasferimento $G_{d_1}(z)$ ha uno zero per $z = 1$ per cui l'effetto di un disturbo d_1 costante sulla variabile di uscita y si annulla a regime permanente

La figura mostra il comportamento in frequenza di $|G_{d_1}(e^{j\omega T})|$ al variare di $a \in (0, 1)$



Esempio di progetto per un sistema elettromeccanico – 1



Controllo di velocità (ω_2) di un carico inerziale (J_2) tramite giunto visco-elastico. Con i valori $J_1 = 10/9, J_2 = 10, k = 1, d = 0.1$, la funzione di trasferimento tra coppia motrice (C) e uscita vale

$$\frac{\omega_2(s)}{C(s)} = G(s) = \frac{0.009(s+10)}{s\left((s+0.05)^2 + 0.9987^2\right)}$$

Esempio di progetto per un sistema elettromeccanico – 2

La coppia di poli complessi di $G(s)$ ha pulsazione naturale $\omega_n = 1$ rad/s e coefficiente di smorzamento $\delta = 0.05$. La specifica è che il sistema ad anello chiuso abbia una coppia di poli dominanti con $\omega_m = 0.5$ rad/s e $\delta_m = 0.7$

Si assume $T = 0.5$ s e si introduce un filtro anti-aliasing

$$G_f(s) = \frac{\omega_f^2}{s^2 + 1.4\,\omega_f s + \omega_f^2} \quad \text{con } \omega_f = 2 \text{ rad/s} \quad \rightarrow \quad |G_f(j\omega)|_{\omega=\frac{\omega_s}{2}=\frac{\pi}{T}} = 0.1$$

Il modello del sistema complessivo (ricostruttore $H_0(s)$, filtro $G_f(s)$ e processo $G(s)$) è

$$\begin{aligned} G_p(z) \;&=\; \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s} G_f(s)\, G_p(s)\right] \\ &=\; \frac{0.000142(z-0.00233)(z+0.2234)}{\color{red}{(z^2-0.7505z+0.2466)}(z-1)} \cdot \frac{(z+1.342)(z+12.13)}{(z^2-1.712z+0.9512)} = \frac{B(z)}{A(z)} \end{aligned}$$

In rosso la coppia di poli provenienti dal denominatore A_f di $G_f(s)$

Esempio di progetto per un sistema elettromeccanico – 3

Poichè la pulsazione $\omega_n = 1$ rad/s del processo è prossima a quella di specifica ad anello chiuso $\omega_m = 0.5$ rad/s, è opportuno introdurre nel polinomio caratteristico un polinomio smorzante $A_s(z)$ di secondo grado che conviene far coincidere con la coppia di poli del filtro anti-aliasing ($A_s = A_f$) a denominatore di $G_p(z)$

Assumendo di non cancellare nessuno degli zeri di $G_p(s)$ (ossia, $B^+ = 1$), si ha l'equazione di progetto

$$A\,R + B\,S = A_s A_0' A_m$$

Poichè A_s è un fattore di A ma non di B (A e B sono coprimi), necessariamente dovrà essere divisore di S

A_m è scelto di ordine 5, con la coppia dominante desiderata e altri tre poli in $z = 0$, mentre A_0', essendo $grado(B^+) = 0$, dovrà essere almeno di grado

$$grado(A_0') \geq 2 \cdot grado(A) - grado(A_m) - grado(A_s) - 1 = 10 - 5 - 2 - 1 = 2$$

e si pone semplicemente $A_0' = z^2$. Infine, per le condizioni sui gradi di R e S

$$\begin{aligned} grado(S) &= grado(A) - 1 = 4 \\ grado(R) &= grado(A_0') + grado(A_s) + grado(A_m) - grado(A) = 2 + 2 + 5 - 5 = 4 \end{aligned}$$

L'equazione di progetto sarà di grado 9, ma riducibile a 7 (8 equazioni in 8 incognite)

Esempio di progetto per un sistema elettromeccanico – 3

Riassumendo

$$\begin{aligned}
A_s &= (z^2 - 0.7505z + 0.2466) = A_f \\
A'_0 &= z^2 \\
A_m &= (z^2 - 1.6522z + 0.7047)z^3 = A_{m0}z^3 \\
A &= A_s(z-1)(z^2 - 1.712z + 0.9512) = A_sA_1 \\
B &= 0.000142(z - 0.00233)(z + 0.2234)(z + 1.342)(z + 12.13) = B^- \\
S &= A_s(s_0z^2 + s_1z + s_2) = A_sS_1 \\
R &= r_0z^4 + r_1z^3 + r_2z^2 + r_3z + r_4
\end{aligned}$$

Le equazioni di progetto divengono (eliminato il fattore comune A_s ed essendo $B'_m = 1$)

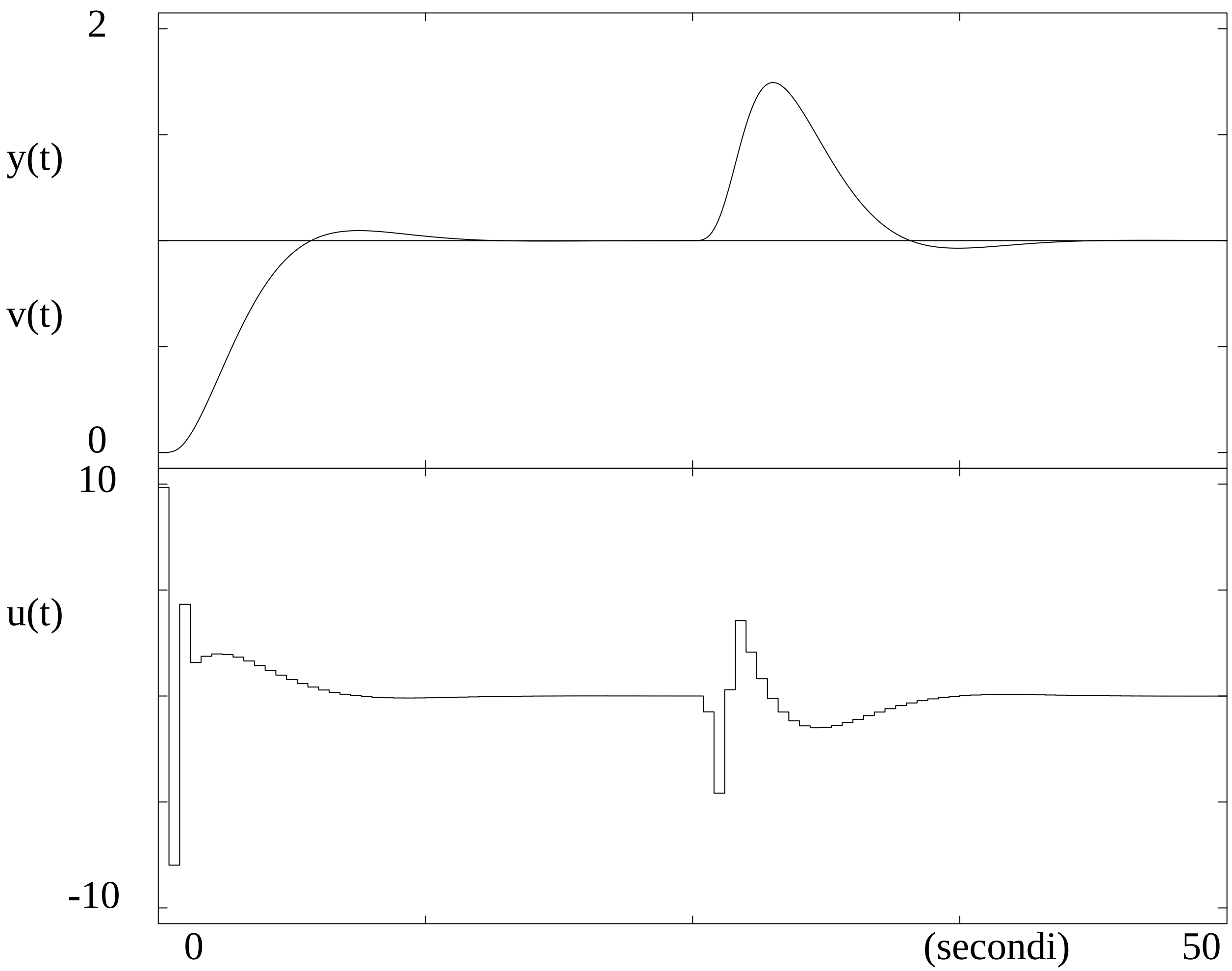
$$A_1R + BS_1 = A'_0A_m = A_{m0}z^5 \qquad\qquad T = \frac{A_m(1)}{B(1)}A_sA'_0$$

La soluzione (unica) è

$$\begin{aligned}
R &= z^4 + 1.0398z^3 + 0.6328z^2 + 0.09793z - 0.0002316 \\
S &= 140.5z^4 - 419.3z^3 + 453.3z^2 - 214.8z + 45.15 \\
T &= 9.8506z^4 - 7.393z^3 + 2.429z^2
\end{aligned}$$

Esempio di progetto per un sistema elettromeccanico – 4

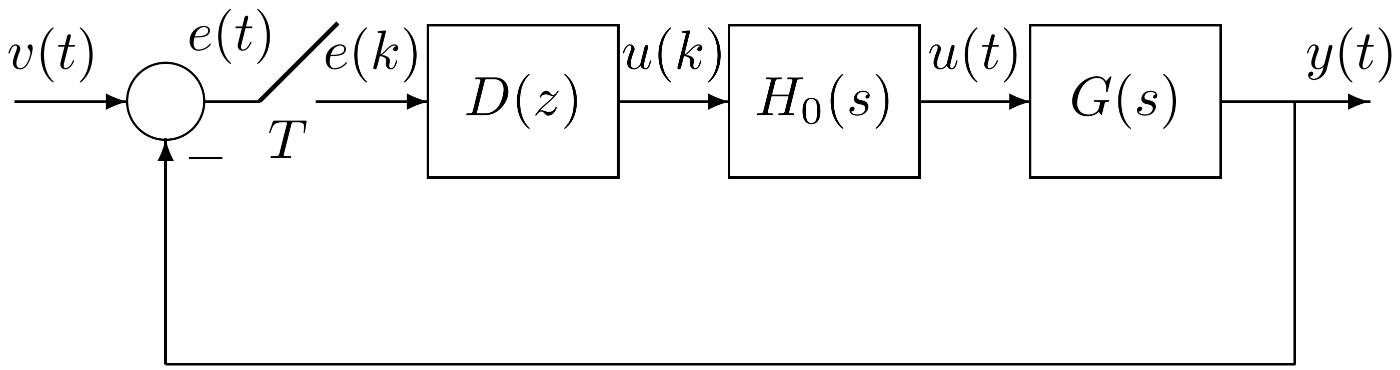
Ingresso di riferimento a gradino in $t = 0$ s e disturbo d_1 impulsivo all'istante $t = 25$ s



Specifiche di progetto deadbeat

Si farà riferimento ad un controllore con 'un solo grado di libertà', $R(z)u(k) = S(z)e(k)$, ossia

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{S(z)}{R(z)} \qquad\qquad G_p(z) = \mathcal{Z}[H_0(s)G(s)]$$



Le specifiche deadbeat, nel caso tipico di risposta al gradino, richiedono che

a) l'uscita raggiunga il valore finale in tempo finito (e minimo)

b) l'errore a regime sia nullo (sistema almeno di tipo 1)

c) in più, non ci siano oscillazioni tra gli istanti di campionamento (risposta piatta)

Progetto deadbeat – 1

Per soddisfare le specifiche deadbeat, si deve imporre un modello di riferimento

$$G_m(z) = \frac{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N}{z^N}$$

o, in modo equivalente

$$G_m(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}$$

dove $N \geq n$, con $n =$ grado del denominatore di $G_p(z)$

Dalla espressione della funzione di trasferimento ad anello chiuso, si impone

$$\frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{D(z)G_p(z)}{1 + D(z)G_p(z)} = G_m(z)$$

da cui si ricava immediatamente

$$D(z) = \frac{1}{G_p(z)} \frac{G_m(z)}{1 - G_m(z)}$$

Si noti che $D(z)$ contiene in linea di principio l'intero modello inverso di $G_p(z)$

Progetto deadbeat – 2

Le condizioni di causalità sono

1. $D(z)$ razionale propria (grado denominatore $\geq$ grado numeratore)
2. Se $G_p(z)$ presenta un fattore z^{-k} (ritardo di k passi), $G_m(z)$ deve contenere un fattore z^{-h}, con $h \geq k$ (ritardo almeno pari a quello ad anello aperto)

Le condizioni di stabilità sono (occorre evitare cancellazioni instabili)

1. Tutti i poli instabili (o critici) di $G_p(z)$ devono essere zeri di $1 - G_m(z)$
2. Tutti gli zeri a fase non minima di $G_p(z)$ devono essere anche zeri di $G_m(z)$

Verifica: fattorizzando in polinomi con radici interne (apice$^+$) e esterne (apice$^-$) al cerchio unitario i numeratori (N) e denominatori (D) delle $G_p(z)$ e $G_m(z)$ si ha

$$
\begin{aligned}
G_p(z)D(z) &= \left(\frac{N_p^+ N_p^-}{D_p^+ D_p^-}\right)\left(\frac{G_m(z)}{G_p(z)} \cdot \frac{1}{1-G_m(z)}\right) \\
D(z) &= \frac{N_m^+ N_m^- D_p^+ D_p^-}{N_p^+ N_p^-} \frac{1}{D_m^+ D_m^-} \cdot \frac{D_m^+ D_m^-}{D_m^+ D_m^- - N_m^+ N_m^-} = \frac{N_m^+ D_p^+}{N_p^+} \\
\Rightarrow G_p(z)D(z) &= \frac{N_m^+ N_p^-}{D_p^-}
\end{aligned}
$$

Progetto deadbeat – 3

Il progetto si sviluppa con riferimento ad ingressi del tipo

$$V(z) = \frac{P(z)}{(1 - z^{-1})^{q+1}}$$

- per $P(z) = 1$, $q = 0$: gradino unitario
- per $P(z) = Tz^{-1}$, $q = 1$: rampa unitaria
- per $P(z) = \frac{1}{2}T^2 z^{-1}(1 + z^{-1})$, $q = 2$: ingresso a parabola $v(t) = \frac{1}{2}t^2$ campionata

Risulta

$$E(z) = V(z) - Y(z) = V(z)\left[1 - G_m(z)\right] = \frac{P(z)\left[1 - G_m(z)\right]}{(1 - z^{-1})^{q+1}}$$

che si annullerà in tempo finito e rimarrà tale a regime quando si pone

$$1 - G_m(z) = (1 - z^{-1})^{q+1} N(z) \quad \Rightarrow \quad E(z) = P(z)N(z)$$

in quanto $E(z)$ è la somma di un numero finito di potenze di z^{-1}. Il regolatore è quindi

$$D(z) = \frac{G_m(z)}{G_p(z)(1 - z^{-1})^{q+1} N(z)}$$

Progetto deadbeat – 4

Assumendo $G(s)$ stabile, per avere inoltre una risposta continua piatta a regime (assenza di oscillazioni, o ‘ripple’, tra istanti di campionamento) si impone per $t \geq nT$

$y(t) =$ costante per ingresso a gradino

$\dot{y}(t) =$ costante per ingresso a rampa

$\ddot{y}(t) =$ costante per ingresso a parabola

che devono essere tradotte in condizioni sul controllo

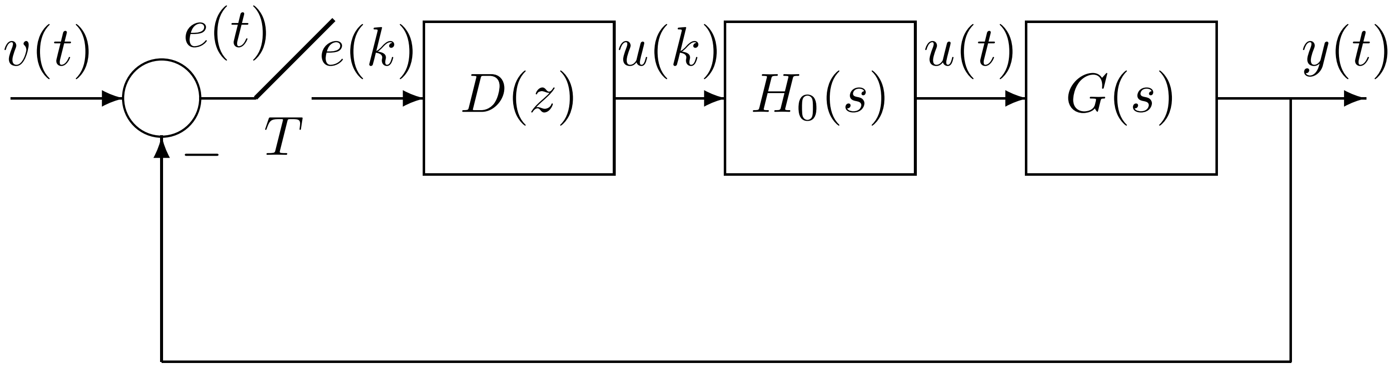
Ad esempio, per un ingresso a gradino, il controllo $u(t)$ a regime dovrà essere costante (e pari ad un opportuno valore)

Commenti

- progetto dipendente dal tipo di segnale di riferimento
- possibile ringing sul segnale di controllo, in particolare per T piccolo
- necessaria anche una minima cautela nella scelta di T (in relazione agli autovalori del processo)

Nota: per altri aspetti sulla sintesi deadbeat (in particolare con risposta piatta) si vedano i lucidi aggiuntivi

Esempio di progetto deadbeat – 1



$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Progettare il controllore $D(z)$ in modo che il sistema retroazionato abbia una risposta deadbeat per ingresso a gradino

Si scelga $T = 0.8\ s$

$$\begin{aligned} G_p(z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1}{s(s+1)}\right] = \frac{K(z-b)}{(z-1)(z-a)} = \frac{K(1-bz^{-1})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-az^{-1})} \\ &= \frac{0.2493(1+0.7669z^{-1})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.4493z^{-1})} \end{aligned}$$

Esempio di progetto deadbeat – 2

La $G_p(z)$ ha $n = 2$, presenta un ritardo z^{-1} e contiene già un'azione integrale. Si assume allora $N = 2$ con

$$G_m(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$$

Poichè il progetto è relativo ad un ingresso a gradino

$$1 - G_m(z) = (1 - z^{-1})N(z)$$

il che permette anche di evitare la cancellazione critica del polo in $z = 1$ di $G_p(z)$

Per avere risposta piatta tra gli istanti di campionamento, si deve imporre $y(t) = cost$ per $t \geq 2T$, che è garantita da $u(t) = cost$ per $t \geq 2T$, ossia

$$U(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b(z^{-2} + z^{-3} + \dots)$$

Qui deve essere poi $b = 0$ in quanto $G(s)$ contiene un integratore. Pertanto

$$U(z) = b_0 + b_1 z^{-1}$$

Esempio di progetto deadbeat – 3

Da un lato si ha

$$U(z) = \frac{Y(z)}{G_p(z)} = \frac{Y(z)}{V(z)} \frac{V(z)}{G_p(z)} = G_m(z)V(z)\frac{1}{G_p(z)}$$

$$= G_m(z)\frac{1}{(1-z^{-1})}\frac{(1-z^{-1})(1-0.4493z^{-1})}{0.2493(1+0.7669z^{-1})z^{-1}}$$

$$= G_m(z)\frac{(1-0.4493z^{-1})}{0.2493(1+0.7669z^{-1})z^{-1}}$$

Affinchè $Uz)$ sia della forma desiderata ($U(z) = b_0 + b_1 z^{-1}$), $G_m(z)$ deve essere

$$G_m(z) = (1+0.7669z^{-1})z^{-1}G_1$$

con un parametro $G_1 = cost$

Pertanto si avrà

$$U(z) = \frac{1}{0.2493}(1-0.4493z^{-1})G_1 = 4.01(1-0.4493z^{-1})G_1$$

Esempio di progetto deadbeat – 4

Dalla

$$1 - G_m(z) = 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} = (1 - z^{-1})N(z)$$

si ha

$$N(z) = n_0 + n_1 z^{-1} = 1 + (1 - a_1)z^{-1} \qquad \text{e} \qquad 1 - a_1 - a_2 = 0 \quad (*)$$

(la seconda vale perchè il primo membro deve contenere il fattore $(1 - z^{-1})$)

Uguagliando poi le espressioni trovate per G_m e usando la $(*)$ si ha

$$G_1 = a_1 \quad a_2 - 0.7669\, a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0.566 \quad a_2 = 0.434$$

Ricapitolando, si ha infine

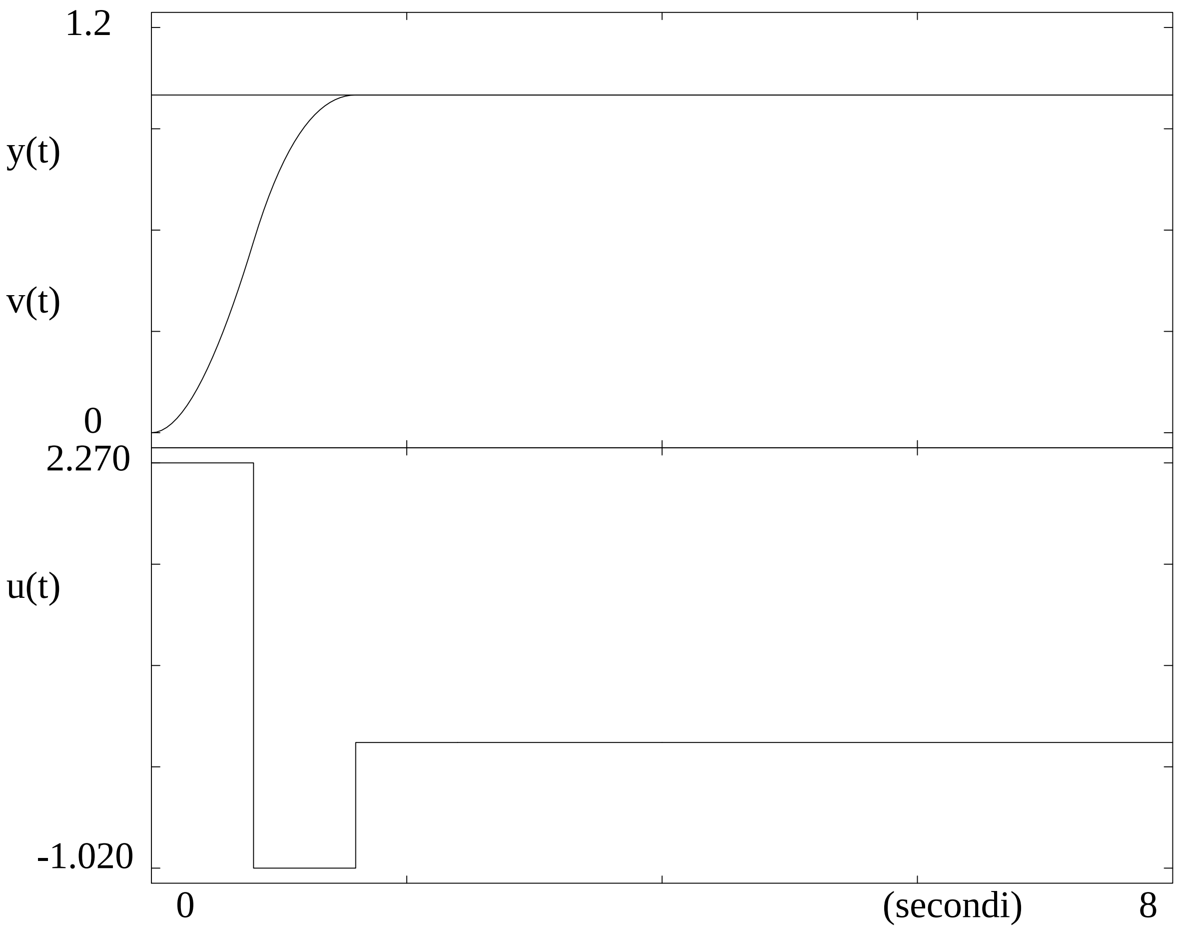
$$G_m(z) = 0.566z^{-1} + 0.434z^{-2}$$

$$N(z) = 1 + 0.434z^{-1}$$

$$D(z) = \frac{G_m(z)}{G_p(z)(1 - z^{-1})N(z)} = \frac{2.27 - 1.02\, z^{-1}}{1 + 0.434\, z^{-1}}$$

Esempio di progetto deadbeat – 5

Risposta al gradino in condizioni ‘ideali’ (il modello nominale del processo è esatto)

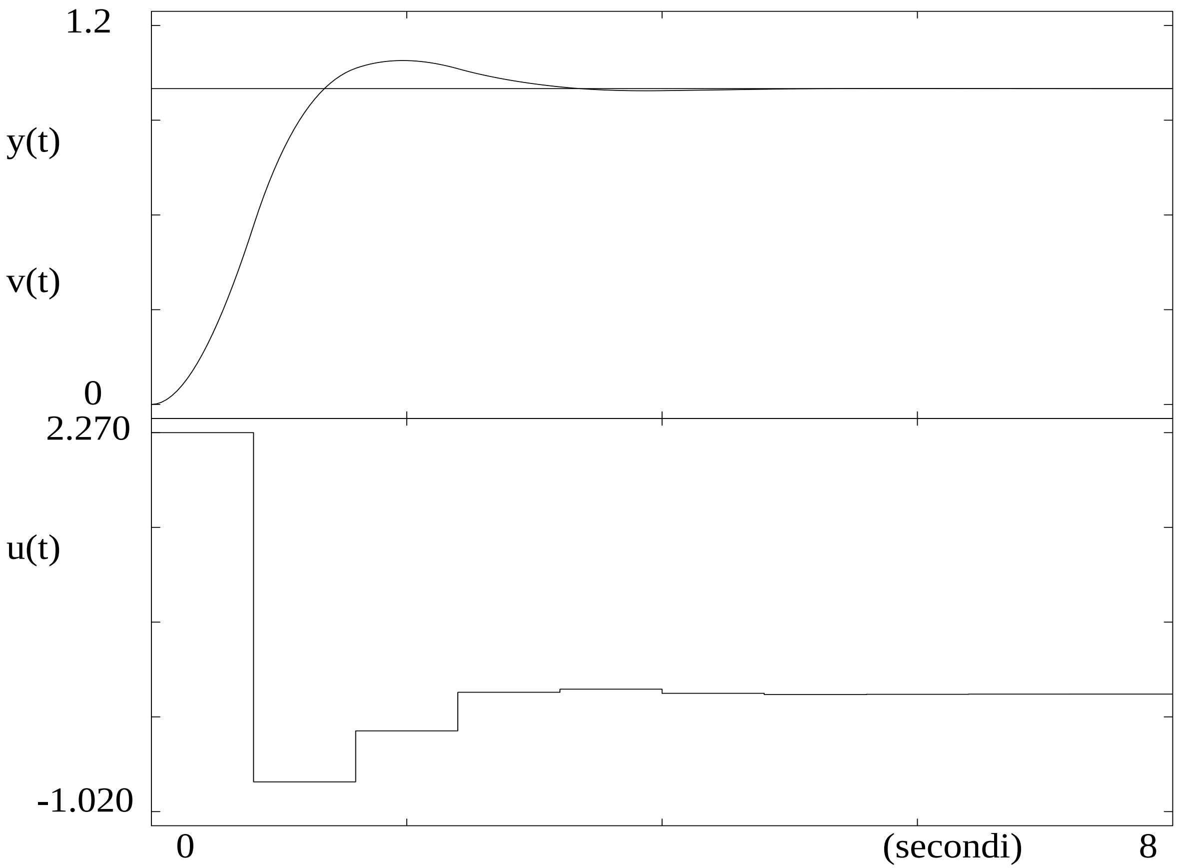


Esempio di progetto deadbeat – 6

Nel caso in cui il sistema controllato ‘reale’ presenti una dinamica non modellata, ossia

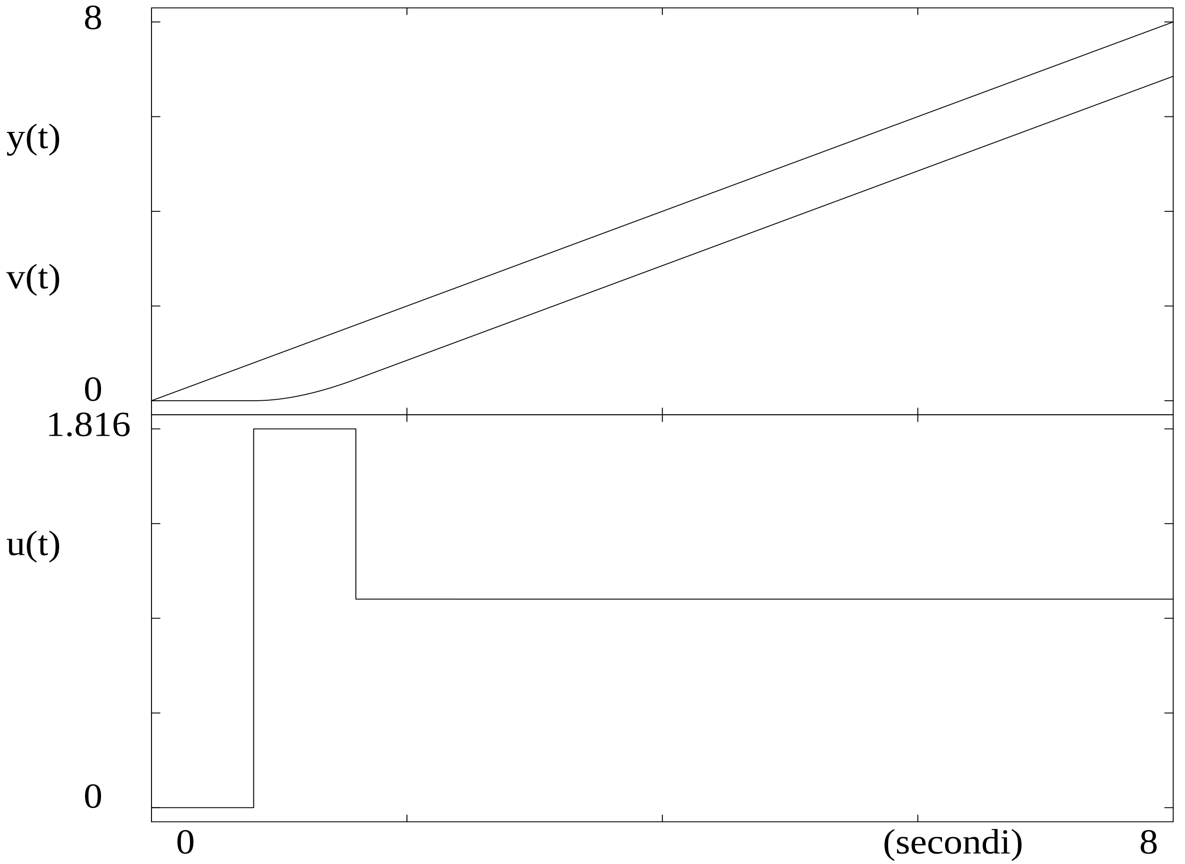
$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+10)}$$

la risposta al gradino diventa



Esempio di progetto deadbeat – 7

Inoltre la risposta a rampa per il sistema nominale è



con un errore a regime (il sistema è d'altronde di tipo 1) corrispondente a $k_v = 0.872$

Si supponga allora di voler imporre una specifica aggiuntiva sulla costante di errore di velocità, ossia $k_v = \bar{k}_v$ (ulteriore vincolo di progetto)

Esempio di progetto deadbeat – 8

A tal fine si introduce in $G_m(z)$ un grado di libertà aggiuntivo, imponendo $N = 3$

$$G_m(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}$$

Calcolando la costante di velocità

$$k_v = \lim_{z \to 1} \left[\frac{1 - z^{-1}}{T} D(z) G_p(z) \right] = \lim_{z \to 1} \left[\frac{1 - z^{-1}}{T} \frac{G_m(z)}{(1 - z^{-1}) N(z)} \right] = \frac{1}{T} \frac{G_m(1)}{N(1)} = \bar{k}_v$$

Poichè $G_m(1) = 1$, si ha

$$N(1) = \frac{1}{T \bar{k}_v}$$

Si impone una risposta piatta per $t \geq 3T$ con

$$U(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

e si prosegue come prima, salvo che G_1 è un polinomio di primo grado in z^{-1} anzichè una costante

Secondo esempio di progetto deadbeat – 1

Per il processo con ritardo finito $\theta = 5$ s

$$G(s) = \frac{e^{-5s}}{10s + 1}$$

progettare il controllore $D(z)$ in modo che il sistema retroazionato abbia una risposta deadbeat (e piatta) per ingresso a gradino

Scelto $T = 5$ s (pari al ritardo θ del processo continuo)

$$G_p(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{e^{-5s}}{10s + 1}\right] = z^{-1}(1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(10s + 1)}\right] = \frac{0.3935z^{-2}}{1 - 0.6065z^{-1}}$$

Poichè $G_p(z)$ presenta un ritardo z^{-2} (due passi di campionamento), si assume

$$G_m(z) = a_2 z^{-2}$$

che soddisfa anche alla richiesta $N \geq n$

Non si devono qui imporre condizioni di stabilità per problemi di cancellazioni polo-zero

Secondo esempio di progetto deadbeat – 2

La condizione di risposta piatta si scrive come

$$U(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b(z^{-2} + z^{-3} + \ldots)$$

dove ora $b = cost \neq 0$ in quanto $G(s)$ non ha un'azione integrale

Si ha

$$\begin{aligned} U(z) = \frac{Y(z)}{G_p(z)} &= \frac{Y(z)}{V(z)} \frac{V(z)}{G_p(z)} = G_m(z) V(z) \frac{1}{G_p(z)} \\ &= G_m(z) \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{1 - 0.6065 z^{-1}}{0.3935 z^{-2}} \\ &= G_m(z) \frac{2.541(1 - 0.6065 z^{-1})}{(1 - z^{-1}) z^{-2}} \end{aligned}$$

e inoltre

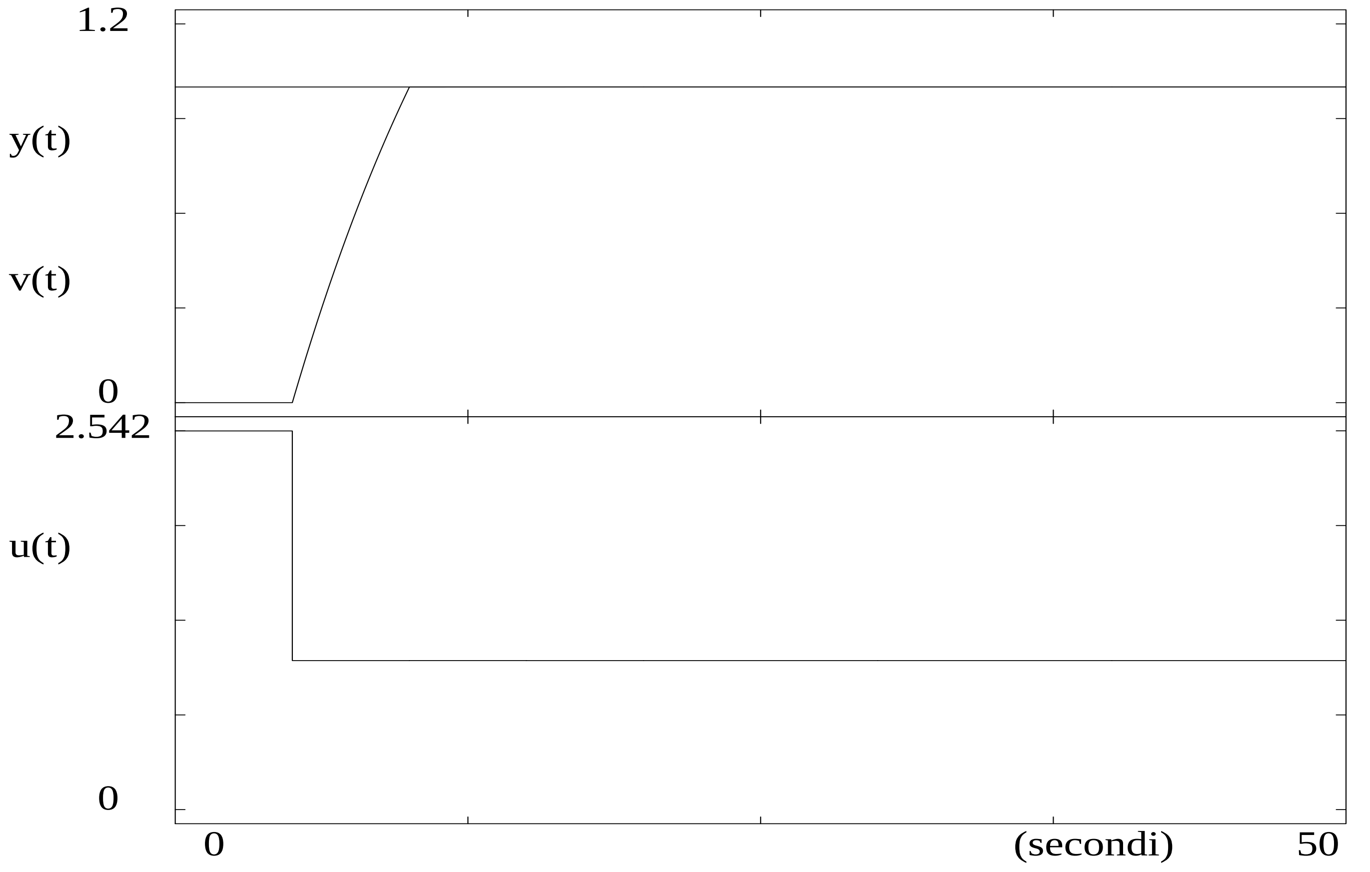
$$1 - G_m(z) = 1 - a_2 z^{-2} = (1 - z^{-1}) N(z)$$

da cui $a_2 = 1$ e $N(z) = 1 + z^{-1}$

Secondo esempio di progetto deadbeat – 3

Il controllore così determinato è

$$D(z) = \frac{G_m(z)}{G_p(z)(1-z^{-1})N(z)} = \frac{2.5413(1-0.6065z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}$$



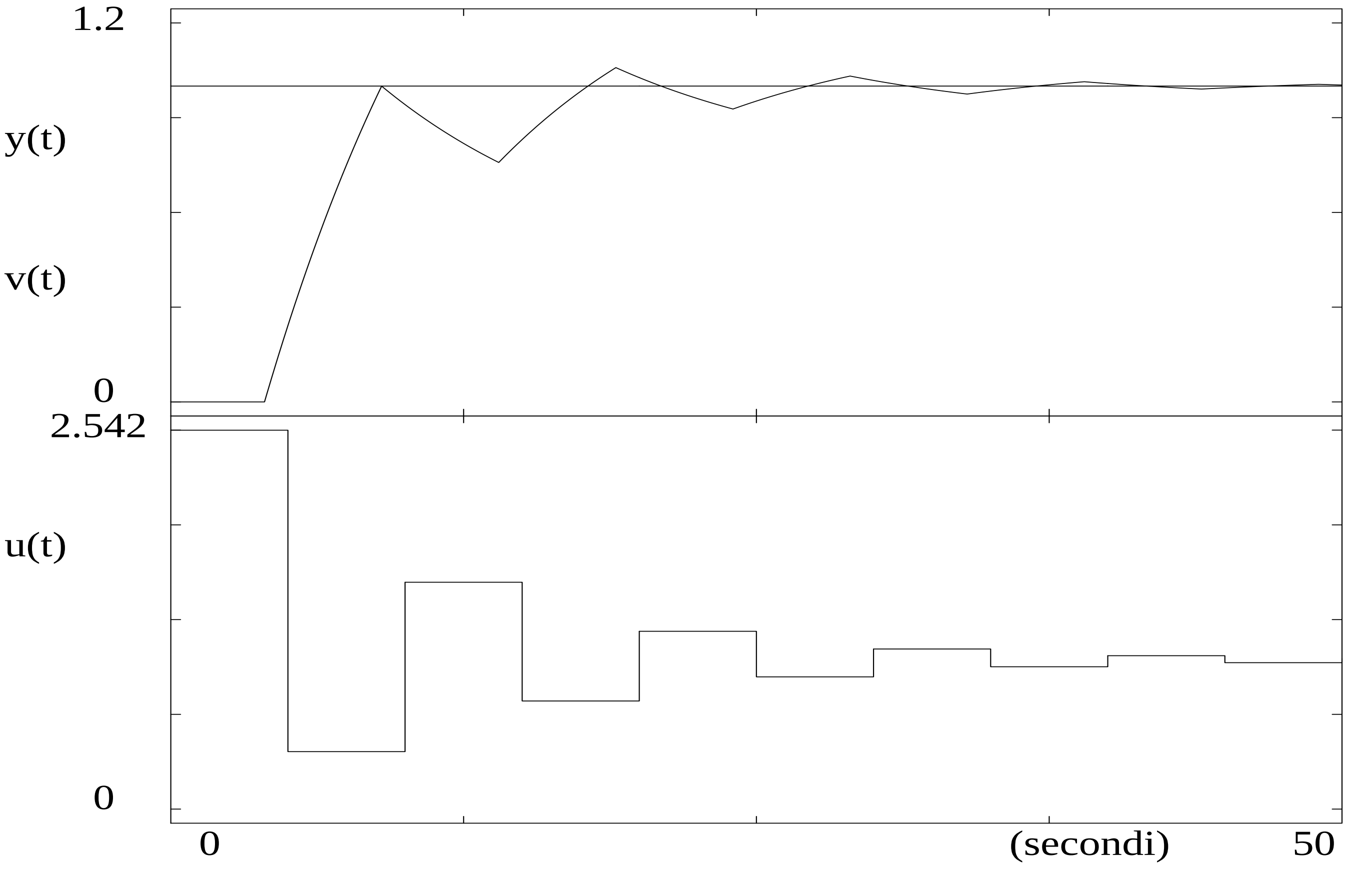
L'errore in risposta al gradino si annulla definitivamente in $2T = 10$ s

Secondo esempio di progetto deadbeat – 4

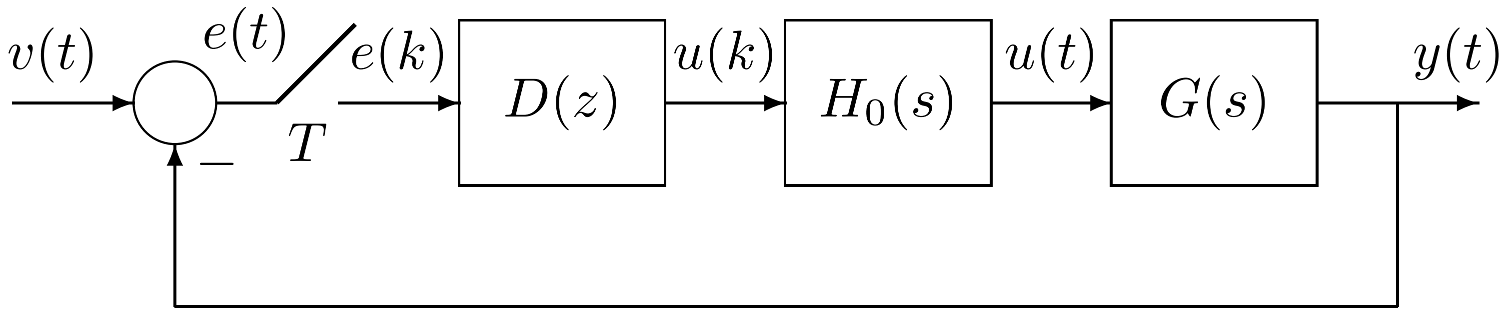
Nel caso in cui il sistema controllato ‘reale’ presenti una dinamica con un ritardo finito θ diverso, ovvero sia

$$G(s) = \frac{e^{-4s}}{10s+1}$$

si ottiene la risposta



Progetto deadbeat semplificato



- $G_p(z) = \mathcal{Z}[H_0(s)G(s)]$ senza poli nè zeri fuori dal cerchio unitario
- possibile totale cancellazione della dinamica del sistema
- solo caso di ingresso a gradino
- specifica semplificata

$$G_m(z) = z^{-k}$$

  con k maggiore o uguale al ritardo intrinseco di $G_p(z)$
- il regolatore $D(z)$ soluzione è allora direttamente

$$D(z) = \frac{1}{G_p(z)} \frac{z^{-k}}{1 - z^{-k}}$$

Esempio di progetto deadbeat semplificato – 1

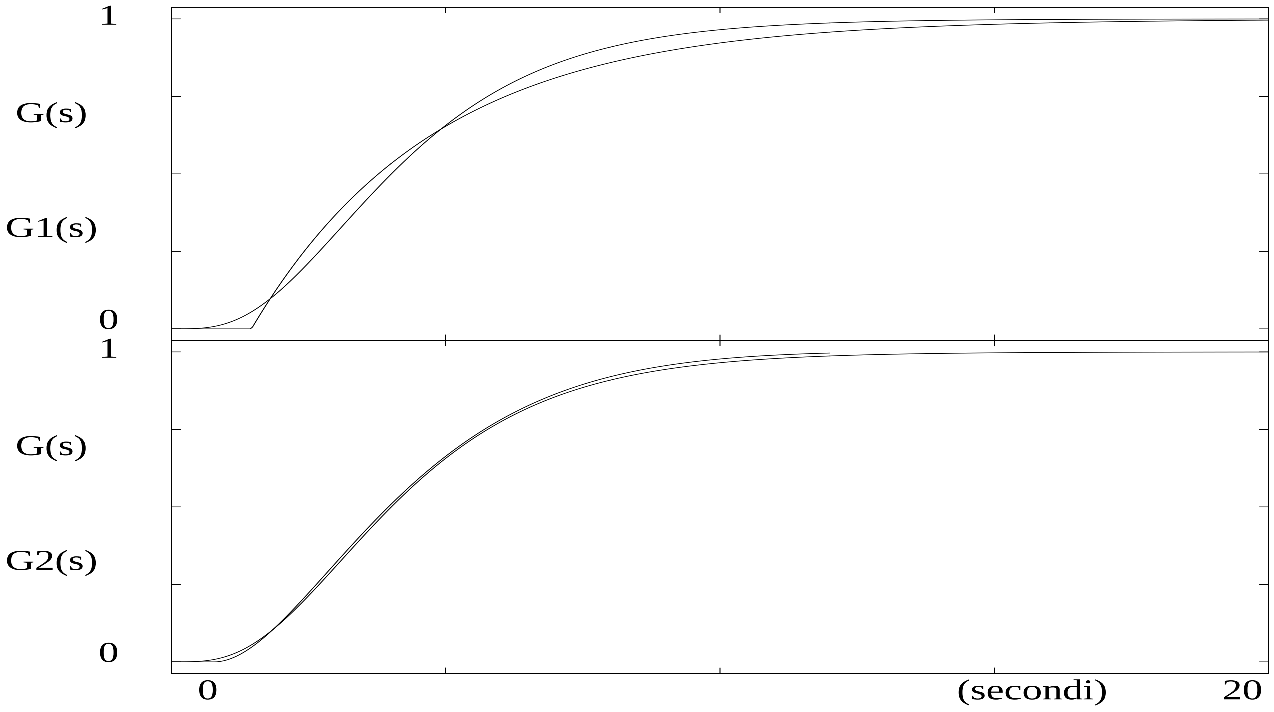
Per il processo del quarto ordine

$$G(s) = \frac{1}{(0.5\,s+1)(s+1)^2(2\,s+1)}$$

si considerano i modelli di ordine ridotto (uno o due poli + ritardo finito θ, vedi App. B)

$$G_1(s) = \frac{e^{-1.46\,s}}{3.34\,s+1} \qquad\qquad G_2(s) = \frac{e^{-0.78\,s}}{4\,s^2+3.6\,s+1}$$

Confronto tra risposte a gradino



Esempio di progetto deadbeat semplificato – 2

Inserito il ricostruttore di ordine zero e posto $T = 5$ s (non compatibile con i ritardi finiti θ_1 o θ_2), occorre utilizzare la Z-trasformata modificata con $m = 1 - \frac{1.46}{5} = 0.708$

$$G_{p1}(z)|_{T=5} = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}\,\frac{e^{-1.46\,s}}{3.34\,s+1}\right] = (1-z^{-1})\mathcal{Z}_m\left[\frac{1}{s\,(3.34\,s+1)}\right]$$

$$= \frac{z^{-1}(0.6535 + 0.1227\,z^{-1})}{1 - 0.2238\,z^{-1}} = \frac{0.6535(z+0.1877)}{z(z-0.2238)}$$

dove si sono usati lo sviluppo in frazioni parziali e le tabelle

Analogamente, per il secondo modello ridotto

$$G_{p2}(z)|_{T=5} = \frac{0.6634(z+0.00434)(z+0.3712)}{z\,((z-0.04877)^2 + 0.0934^2)}$$

Esempio di progetto deadbeat semplificato – 3

Se si sceglie invece $T = 1\,s$, la discretizzazione di $G_1(s)$ con $m = 1 - 0.46 = 0.54$ diventa

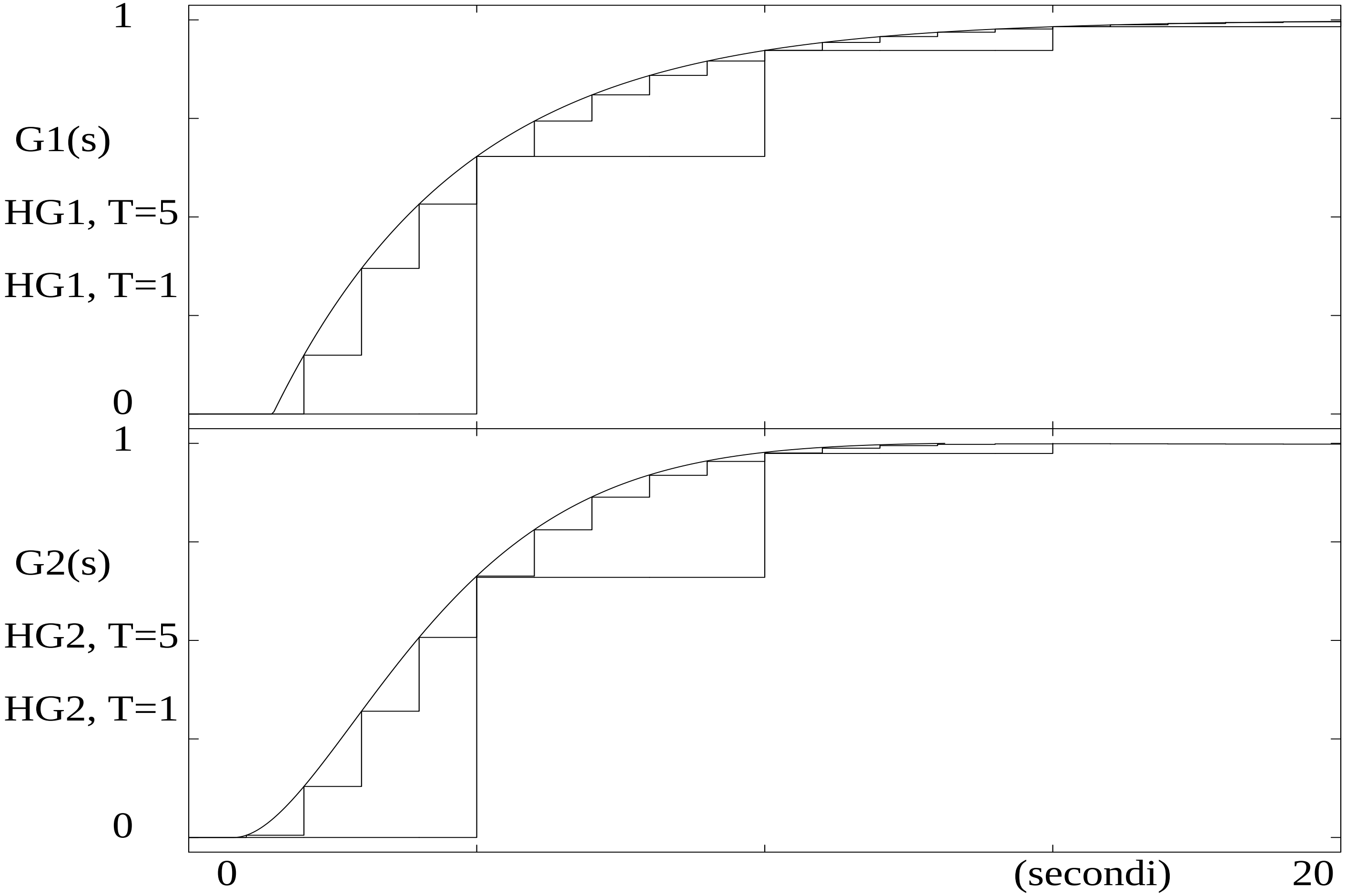
$$G_{p1}(z)|_{T=1} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{e^{-1.46\,s}}{s\,(3.34\,s+1)}\right] = z^{-1}(1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{e^{-0.46\,s}}{s\,(3.34\,s+1)}\right]$$

$$= \frac{z^{-2}(0.1493 + 0.1095\,z^{-1})}{1 - 0.7413\,z^{-1}} = \frac{0.1493(z + 0.7334)}{z^2(z - 0.7413)}$$

Analogamente, per il secondo modello ridotto

$$G_{p2}(z)|_{T=1} = \frac{0.005664(z + 0.3407)(z + 20.26)}{z\left((z - 0.6225)^2 + 0.1379^2\right)}$$

Confronto tra le risposte a gradino del sistema originale continuo $G(s)$ e quelle dei sistemi (ridotti) discreti $G_{p1}(z)$ e $G_{p2}(z)$ con $T = 5$ o $T = 1$ s

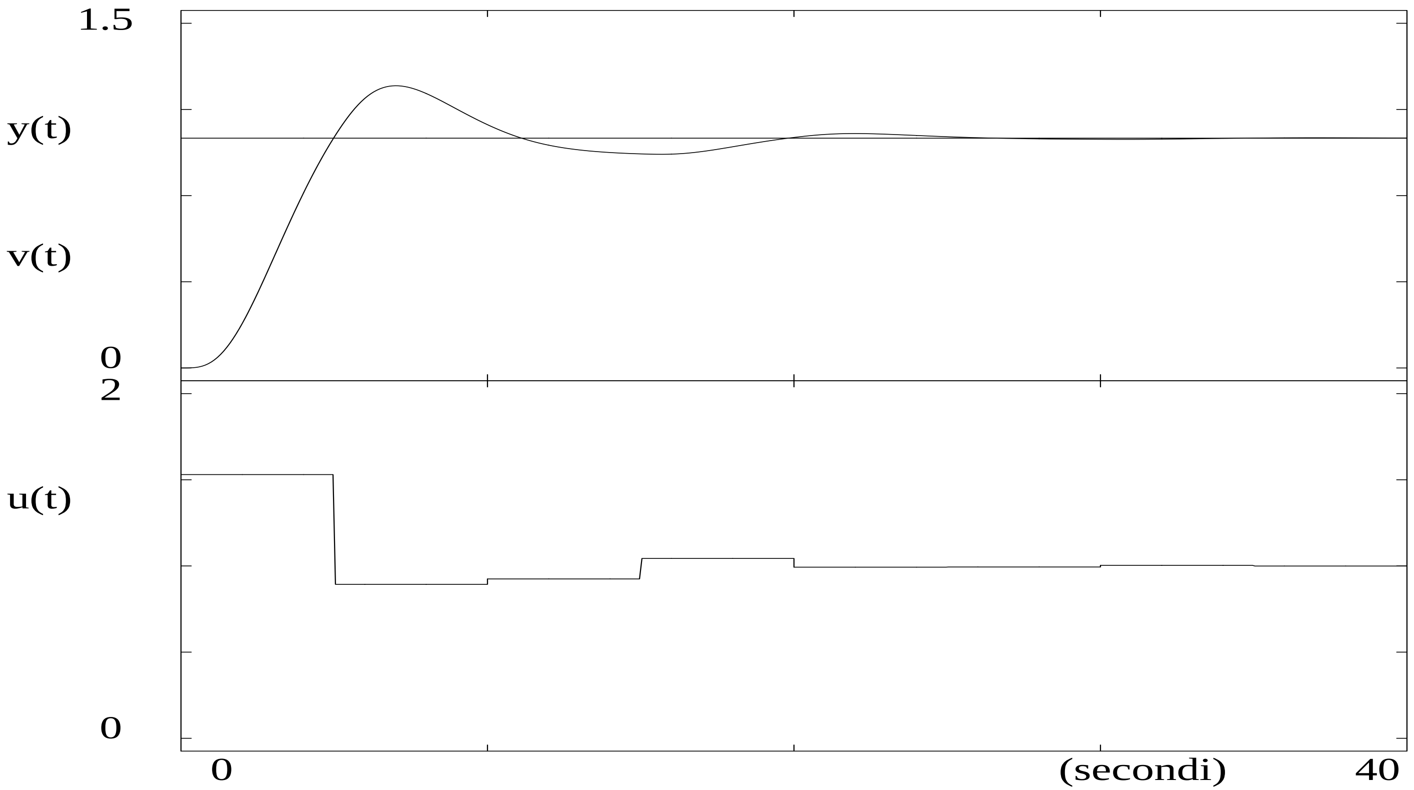


Esempio di progetto deadbeat semplificato – 5

Per $T = 5$ s, usando per il progetto la relativa $G_{p1}(z)$, il regolatore deadbeat ($k = 1$) è

$$D(z) = \frac{1 - 0.2238\, z^{-1}}{(0.6535 + 0.1227\, z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

La risposta al gradino del sistema originale $G(s)$ con questo controllore è

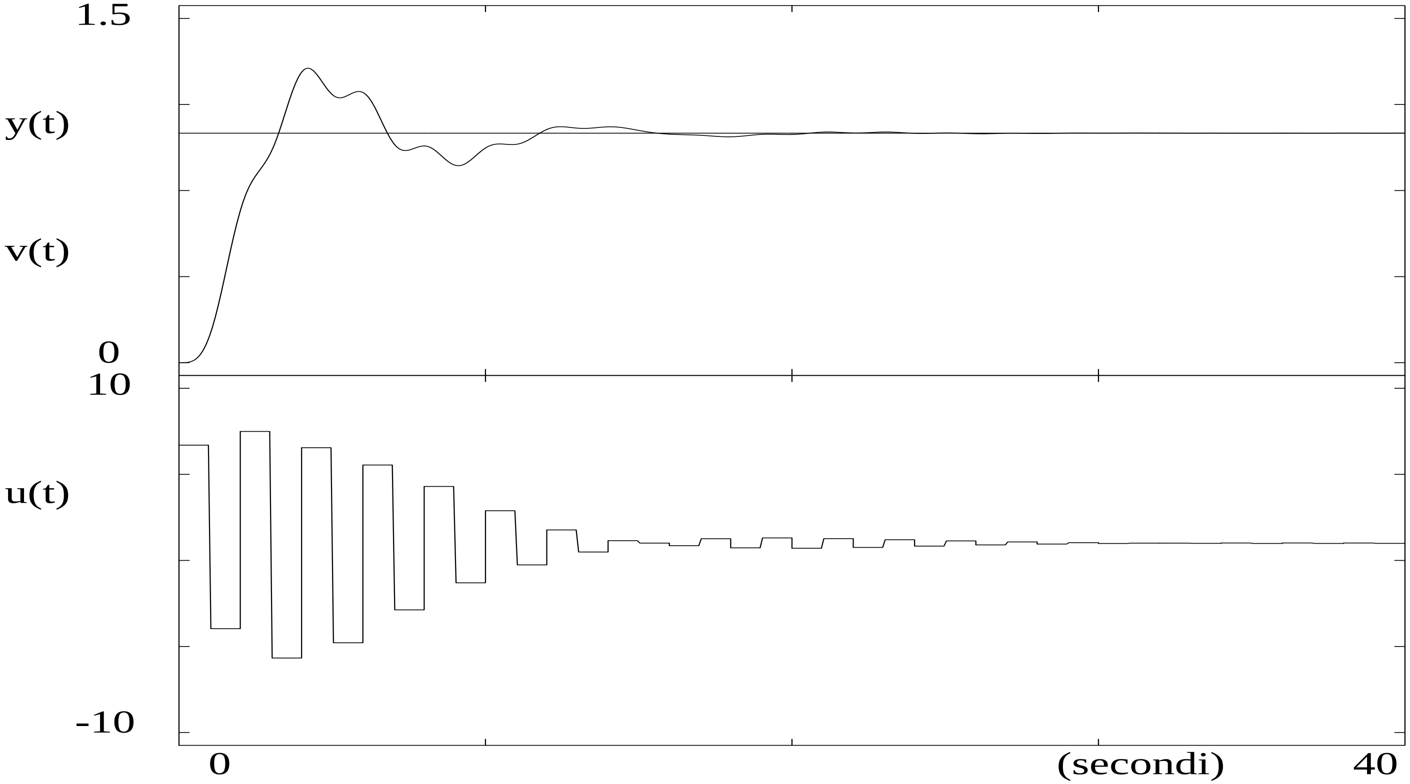


Esempio di progetto deadbeat semplificato – 6

Per $T = 1$ s, usando per il progetto la relativa $G_{p1}(z)$, la specifica minima è $k = 2$ e quindi il regolatore deadbeat è

$$\frac{Y(z)}{V(z)} = z^{-2} \quad \rightarrow \quad D(z) = \frac{1}{G_p(z)} \, \frac{z^{-2}}{1 - z^{-2}} = \frac{1 - 0.7413\, z^{-1}}{(0.1493 + 0.1095\, z^{-1})(1 - z^{-2})}$$

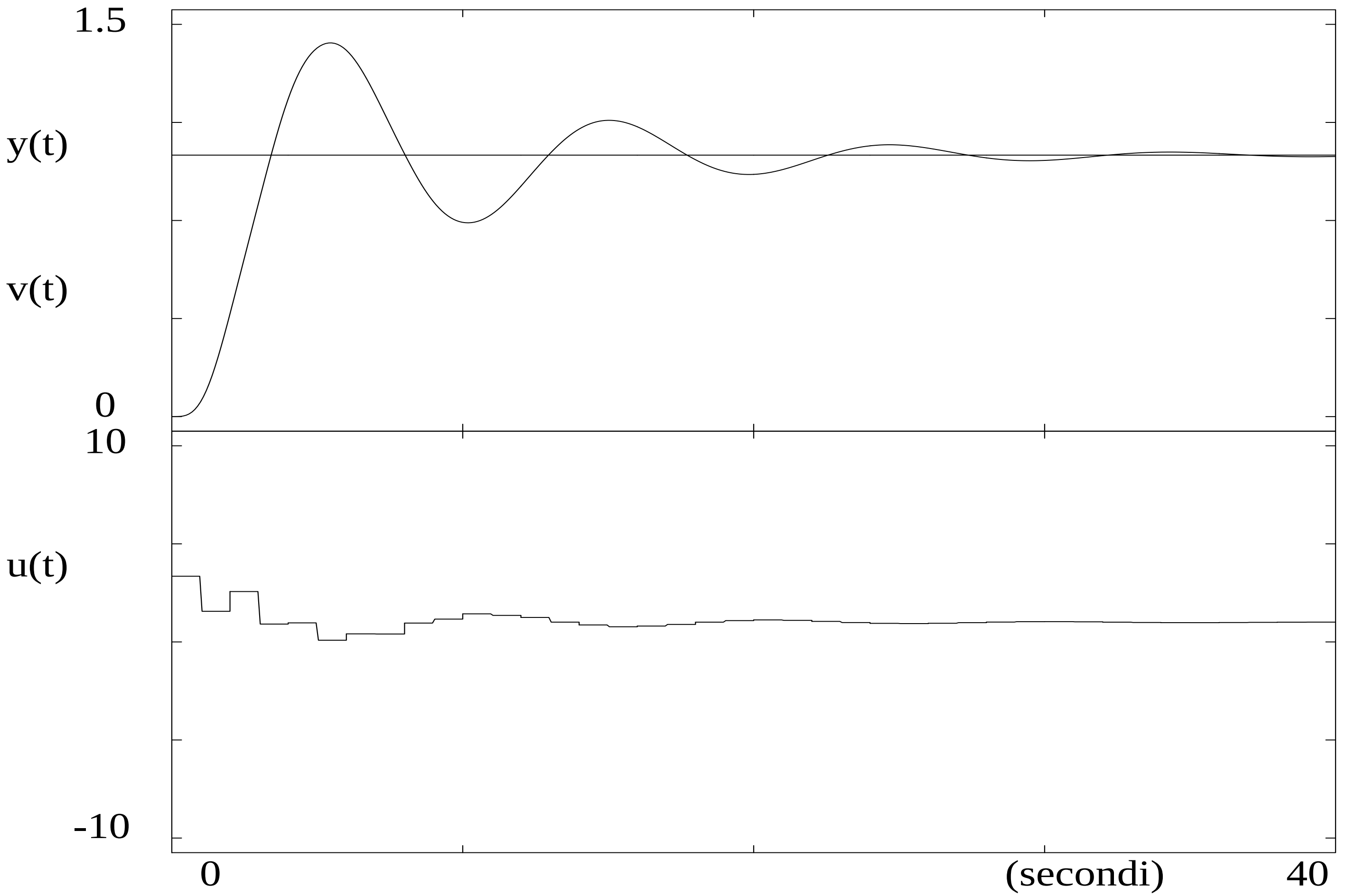
La risposta al gradino del sistema originale $G(s)$ con questo controllore è



Esempio di progetto deadbeat semplificato – 7

Per attenuare l'effetto di 'ringing' dell'ingresso di controllo, si può eliminare dal fattore $1 - z^{-2} = (1 - z^{-1})(1 + z^{-1})$ a denominatore di $D(z)$ il polo critico in $z = -1$, compensando di conseguenza il guadagno statico (con un fattore pari a 0.5)

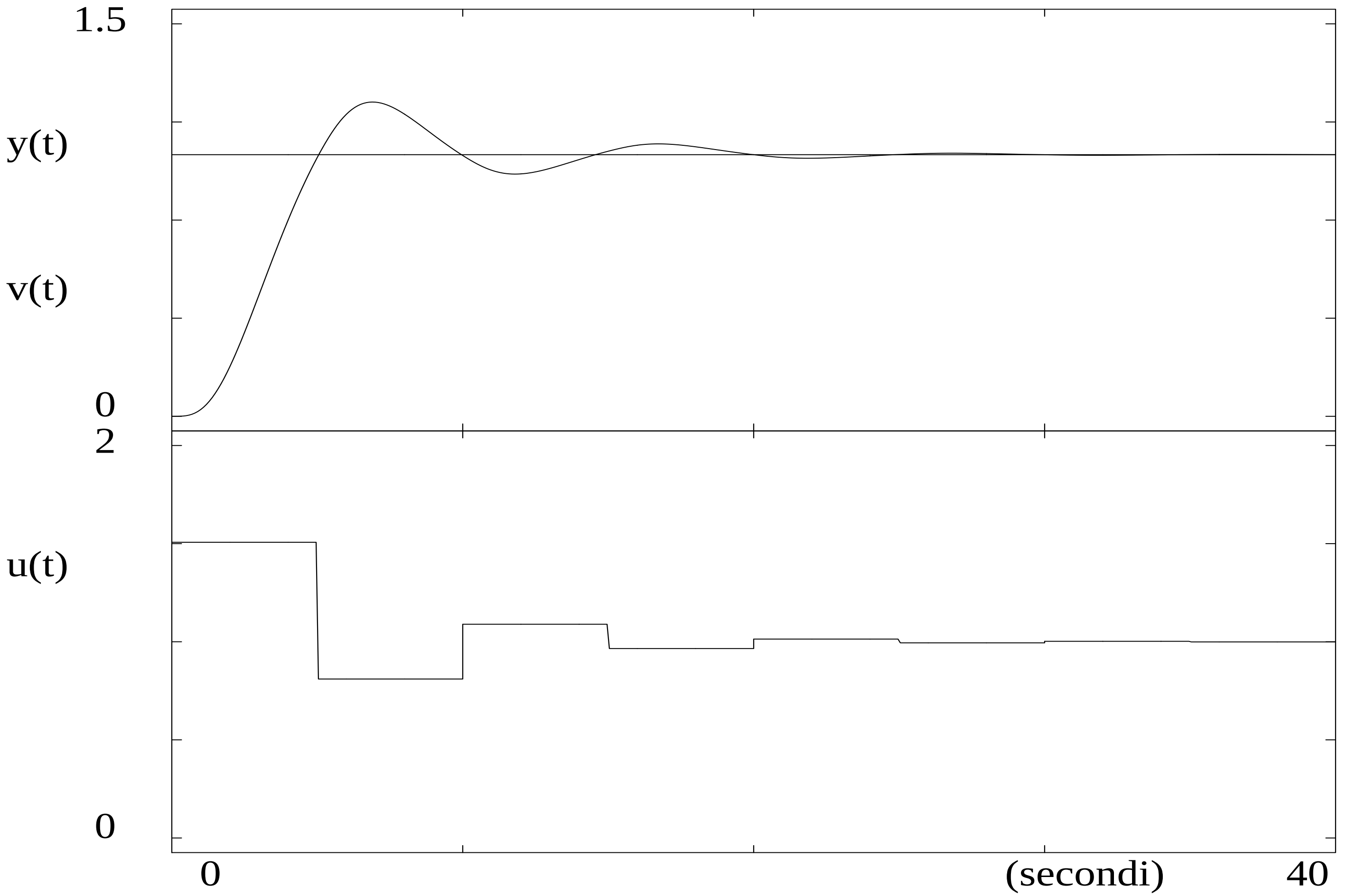
La risposta al gradino del sistema originale $G(s)$ diventa



Esempio di progetto deadbeat semplificato – 8

$$G_{p2}(z)|_{T=5} \quad \rightarrow \quad D(z) = \frac{1.507z\left((z-0.04877)^2+0.009343^3\right)}{(z-1)(z+0.00434)(z+0.3712)}$$

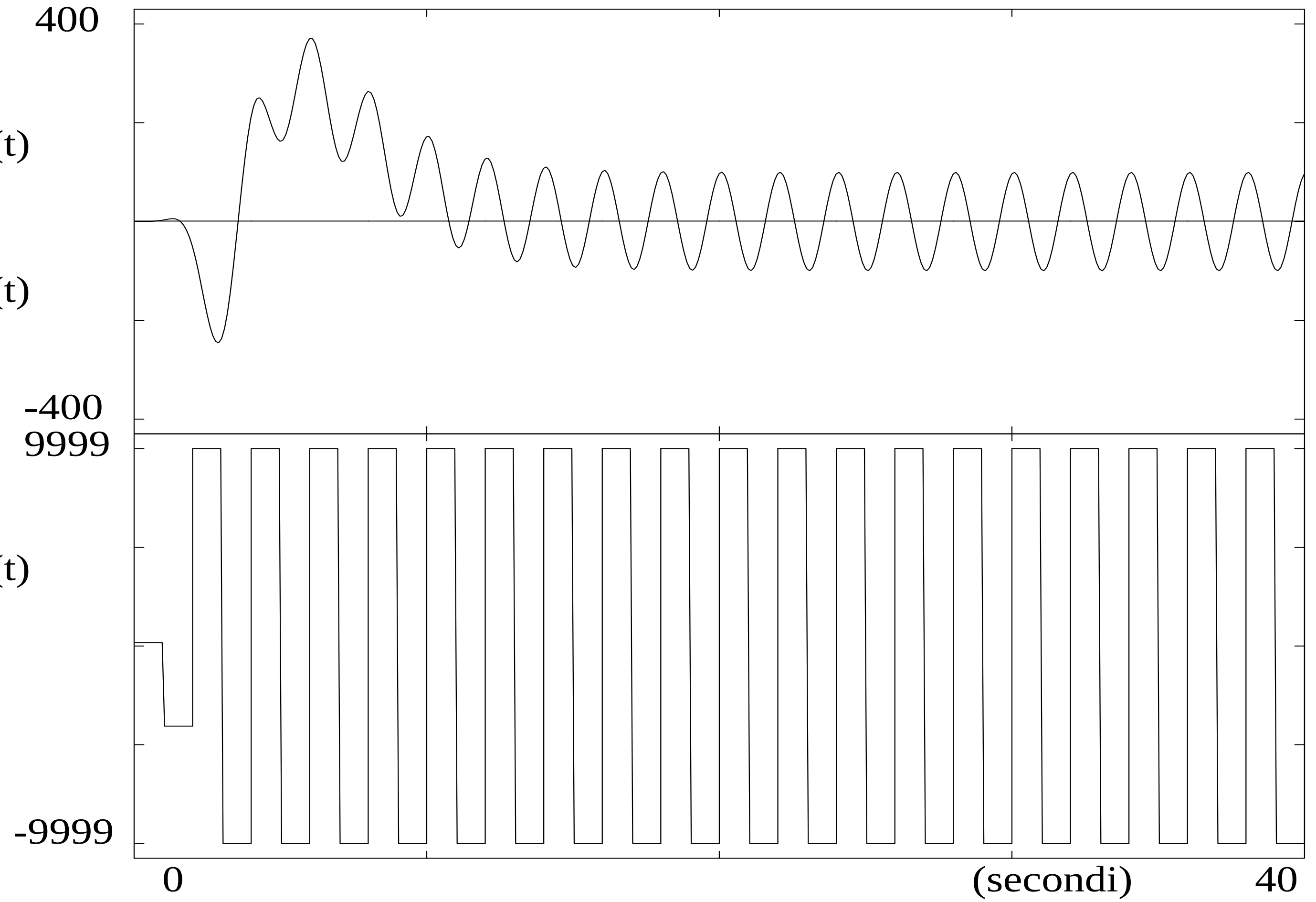
La risposta al gradino del sistema originale $G(s)$ con questo controllore è



Esempio di progetto deadbeat semplificato – 9

$$G_{p2}(z)|_{T=1} \quad \rightarrow \quad D(z) = \frac{176.6z\left((z-0.6255)^2+0.1378^2\right)}{(z-1)(z+0.3407)(z+20.27)}$$

La risposta al gradino del sistema originale $G(s)$ con questo controllore è



Progetto semplificato secondo Dahlin

Si assume che il sistema in catena chiusa risponda al gradino come un sistema del primo ordine con ritardo

$$Y(s) = \frac{e^{-\theta\, s}}{\lambda\, s + 1}\, \frac{1}{s}$$

cioè, in termini discreti (N esprime in multipli di T il ritardo contenuto in θ)

$$Y(z) = \frac{(1 - e^{-T/\lambda}) z^{-N-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T/\lambda} z^{-1})}$$

dove λ (se piccolo $\rightarrow$ regime in tempi brevi $\leftrightarrow$ maggiore sforzo di controllo) è un parametro di aggiustamento

Per ingresso a gradino

$$V(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \qquad \rightarrow \qquad \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{(1 - e^{-T/\lambda}) z^{-N-1}}{1 - e^{-T/\lambda} z^{-1}} = G_m(z)$$

da cui il regolatore

$$D(z) = \frac{1}{G_p(z)} \frac{G_m(z)}{1 - G_m(z)} = \frac{1}{G_p(z)} \frac{(1 - e^{-T/\lambda}) z^{-N-1}}{1 - e^{-T/\lambda} z^{-1} - (1 - e^{-T/\lambda}) z^{-N-1}}$$

Esempio di progetto semplificato secondo Dahlin – 1

Si riprenda il processo del quarto ordine considerato in precedenza

$$G(s) = \frac{1}{(0.5\,s+1)(s+1)^2(2\,s+1)}$$

Posto $T = 1$ s, si sostituisce la $G_p(z) = G_{p1}(z)|_{T=1}$ già calcolata nell'espressione del regolatore di Dahlin con $N = 1$

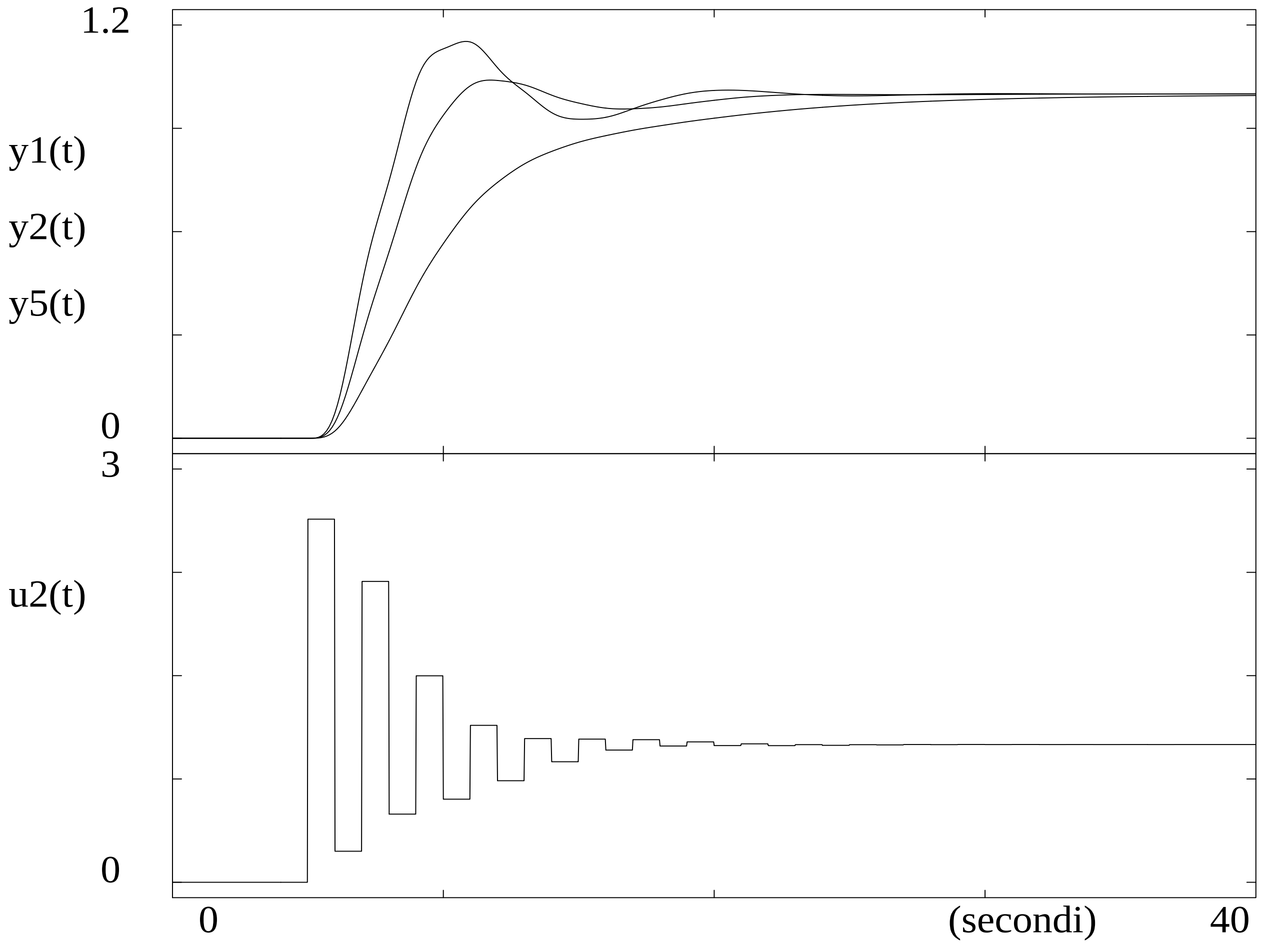
$$\begin{aligned} D(z)|_{\lambda=2} &= \frac{z^2(1-0.741\,z^{-1})}{(0.149+0.11\,z^{-1})}\,\frac{0.392\,z^{-2}}{(1-0.608\,z^{-1}-0.392\,z^{-2})} \\ &= \frac{2.63\,(1-0.741\,z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.392\,z^{-1})(1+0.738\,z^{-1})} \end{aligned}$$

(dove si sono approssimati i coefficienti alla terza cifra decimale)

La scelta $\lambda = 2$ operata è frutto di un piccolo confronto delle risposte indiciali con valori inferiori e superiori

Esempio di progetto semplificato secondo Dahlin – 2

Confronto delle risposte indiciali nei tre casi $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ e $\lambda = 5$



e andamento del controllo digitale per $\lambda = 2$

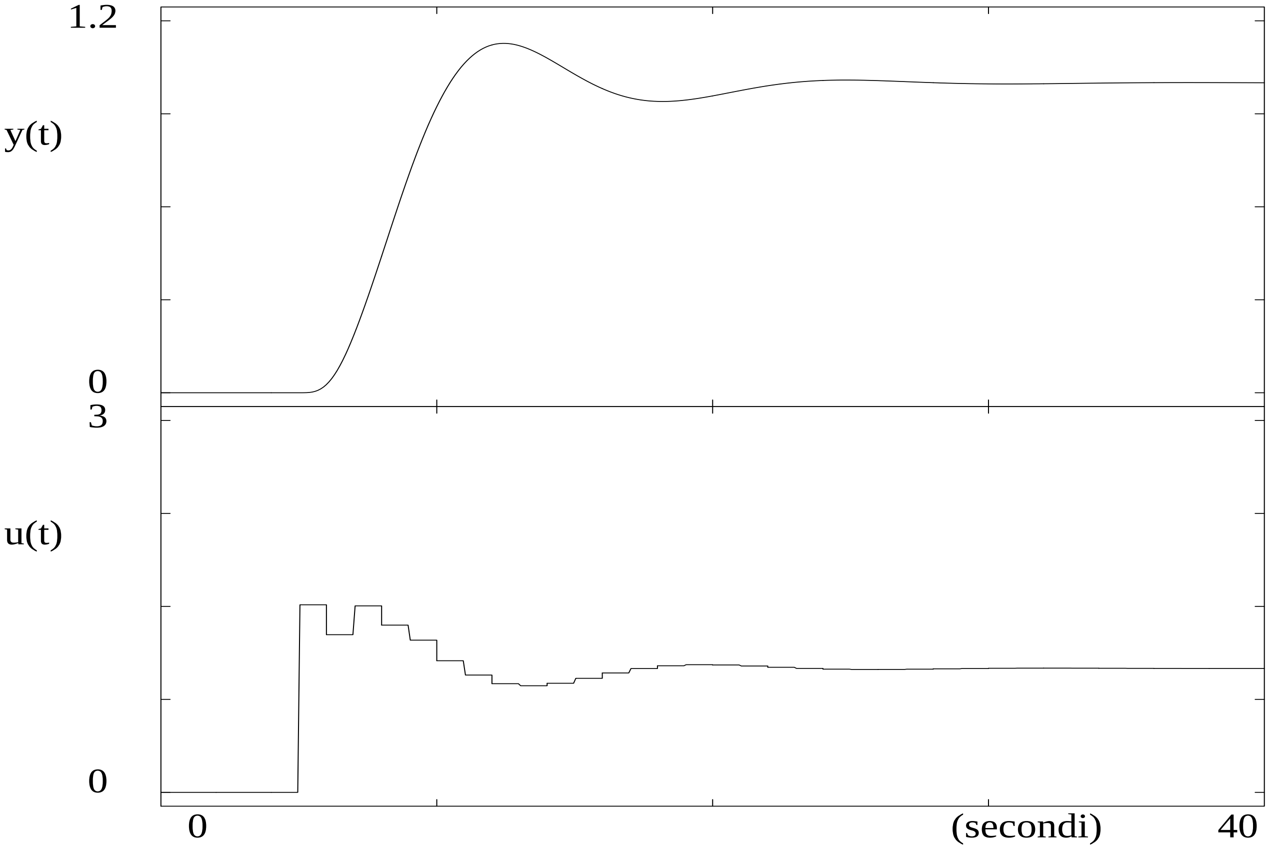
L'effetto di 'ringing' è dovuto essenzialmente al polo di $D(z)$ in $z = -0.738$

Esempio di progetto semplificato secondo Dahlin – 3

Eliminando tale polo e modificando coerentemente il guadagno del regolatore (ossia dividendo per il fattore $1 + 0.738\, z^{-1}|_{z=1} = 1.738$ ora mancante)

$$D(z) = \frac{1.513\,(1 - 0.741\, z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0.392\, z^{-1})}$$

si ottiene



Progetto con specifica diretta sul controllo – 1

In questo semplice metodo di sintesi analitica, in risposta ad un gradino unitario in ingresso

$$V(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

si desidera che le variabili discrete uscita-ingresso del processo abbiano l'andamento elementare

$$\begin{aligned} Y(z) &= y_1 z^{-1} + 1 \cdot \left(z^{-2} + z^{-3} + \ldots\right) \\ U(z) &= u_0 + u_1 z^{-1} + u_f \cdot \left(z^{-2} + z^{-3} + \ldots\right) \end{aligned}$$

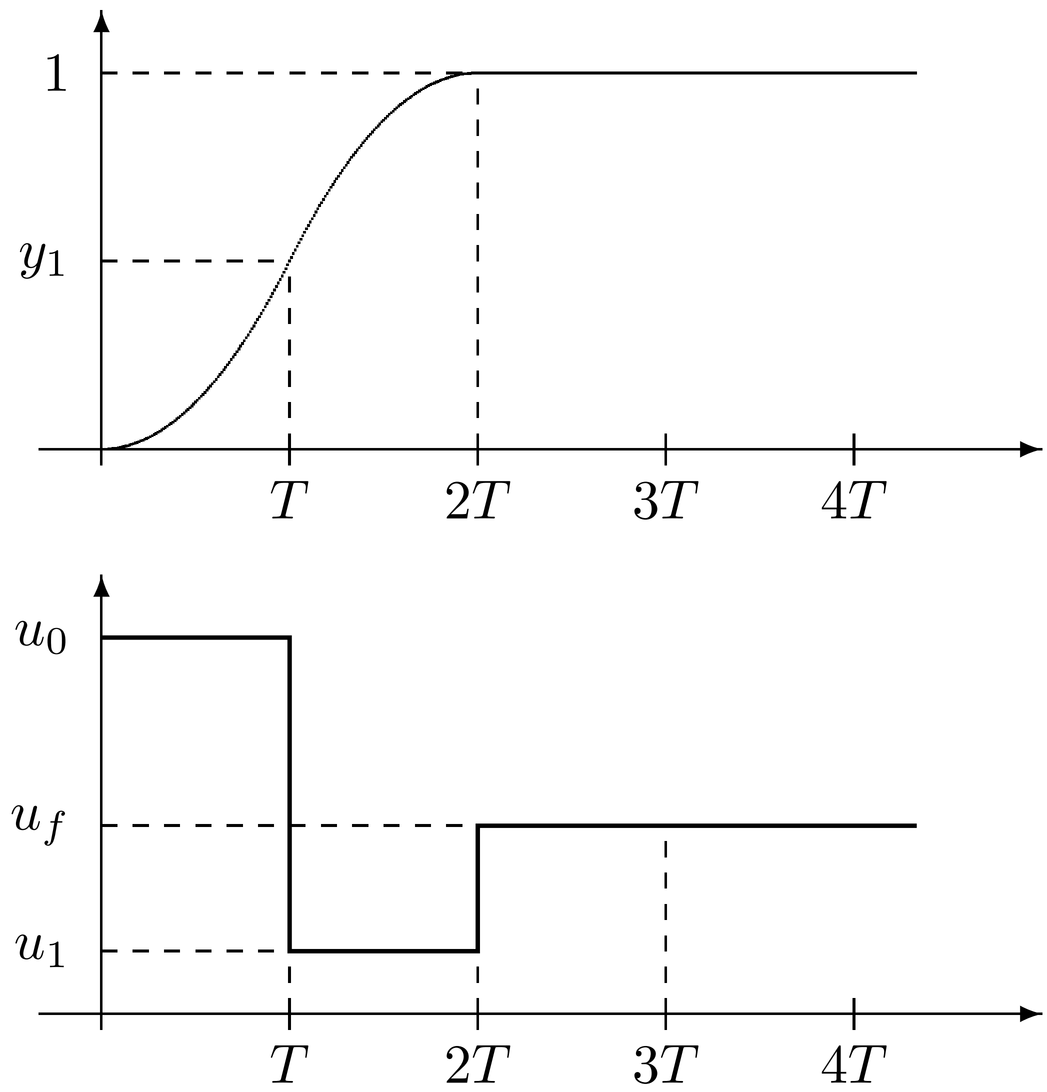
o più in generale

$$\begin{aligned} Y(z) &= y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \ldots + y_N z^{-N} + \left(z^{-N-1} + z^{-N-2} + \ldots\right) \\ U(z) &= u_0 + u_1 z^{-1} + \ldots + u_N z^{-N} + u_f (z^{-N-1} + z^{-N-2} + \ldots) \end{aligned}$$

dove u_f è pari al reciproco del guadagno statico del processo

Progetto con specifica diretta sul controllo – 2

Andamenti elementare di specifica (per $N = 2$)



Progetto con specifica diretta sul controllo – 3

La relazione desiderata $G_m(z) = Y(z)/V(z)$ nel caso $N = 2$ è ($\sum_i p_i = 1$ in generale)

$$\frac{Y(z)}{V(z)} = (1 - z^{-1})(y_1 z^{-1} + z^{-2} + \cdots) = \underbrace{y_1}_{p_1} z^{-1} + \underbrace{(1 - y_1)}_{p_2} z^{-2} = P(z)$$

Analogamente, la relazione $U(z)/V(z)$ è ($\sum_i q_i = u_f$ in generale)

$$\frac{U(z)}{V(z)} = (1 - z^{-1})(u_0 + u_1 z^{-1} + u_f z^{-2} + \cdots) = \underbrace{u_0}_{q_0} + \underbrace{(u_1 - u_0)}_{q_1} z^{-1} + \underbrace{(u_f - u_1)}_{q_2} z^{-2} = Q(z)$$

La funzione di trasferimento discreta $G_p(z)$ può esprimersi in funzione di $P(z)$ e $Q(z)$

$$G_p(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Y(z)}{V(z)} \frac{V(z)}{U(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

per cui il regolatore è

$$D(z) = \frac{1}{G_p(z)} \frac{Y(z)/V(z)}{1 - Y(z)/V(z)} = \frac{Q(z)}{P(z)} \frac{P(z)}{1 - P(z)} = \frac{Q(z)}{1 - P(z)}$$

Esempio di progetto con specifica diretta sul controllo

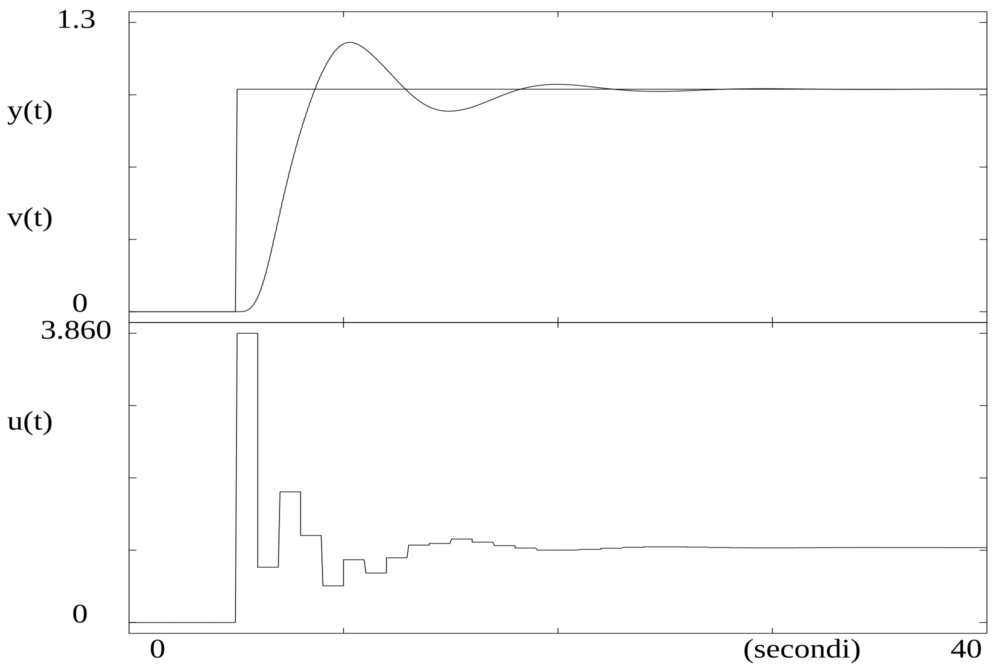
Si consideri di nuovo, per il sistema del quarto ordine dei casi precedenti, il modello $G_{p1}(z)|_{T=1}$ e lo si normalizza per avere $\sum_i p_i = 1$ e $\sum_i q_i = u_f$ $(= 1$ qui)

$$G_{p1}(z) = \frac{z^{-2}(0.1493 + 0.1095\, z^{-1})}{1 - 0.7413\, z^{-1}} = \frac{z^{-2}(0.577 + 0.423\, z^{-1})}{3.86 - 2.86\, z^{-1}} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

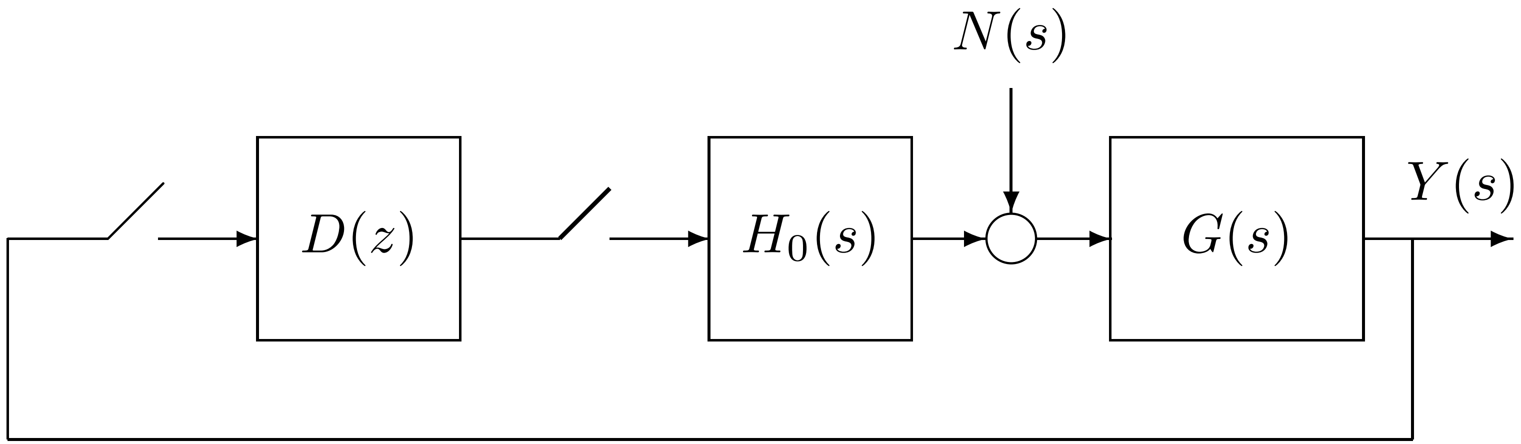
Il regolatore $D(z)$ risultante è

$$D(z) = \frac{3.86 - 2.86\, z^{-1}}{1 - z^{-2}(0.577 + 0.423\, z^{-1})}$$

e fornisce



Progetto per variazioni di carico – 1



L'attenzione è sulla risposta desiderata dell'uscita $Y(z)$ a disturbi o a variazioni di carico, senza specifiche di asservimento dell'uscita stessa a segnali di riferimento

$$Y(z) = \frac{NG(z)}{1 + D(z)\,G_p(z)} \qquad G_p(z) = \mathcal{Z}[H_0(s)G(s)] \quad NG(z) = \mathcal{Z}[G(s)N(s)]$$

da cui il regolatore

$$D(z) = \frac{NG(z) - Y(z)}{G_p(z)\,Y(z)}$$

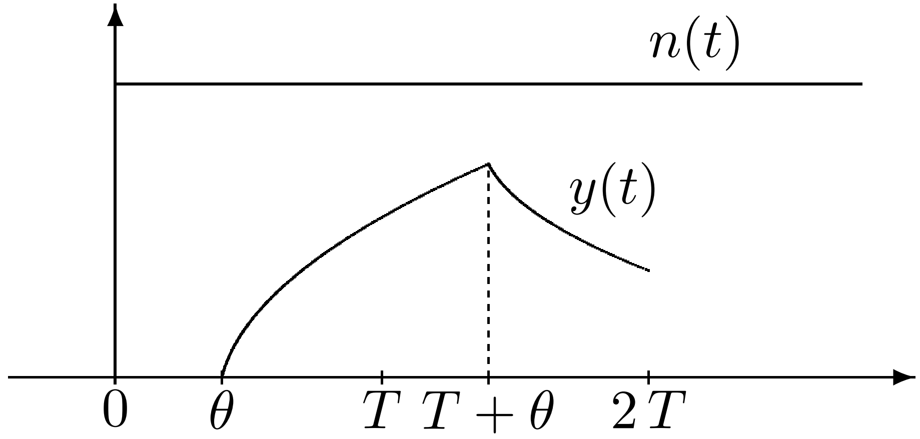
Il procedimento di sintesi:

1) si sceglie il disturbo d'ingresso $N(s)$ (tipicamente un disturbo a gradino)
2) si specifica l'andamento desiderato della variabile d'uscita $Y(z)$
3) si calcola il regolatore $D(z)$

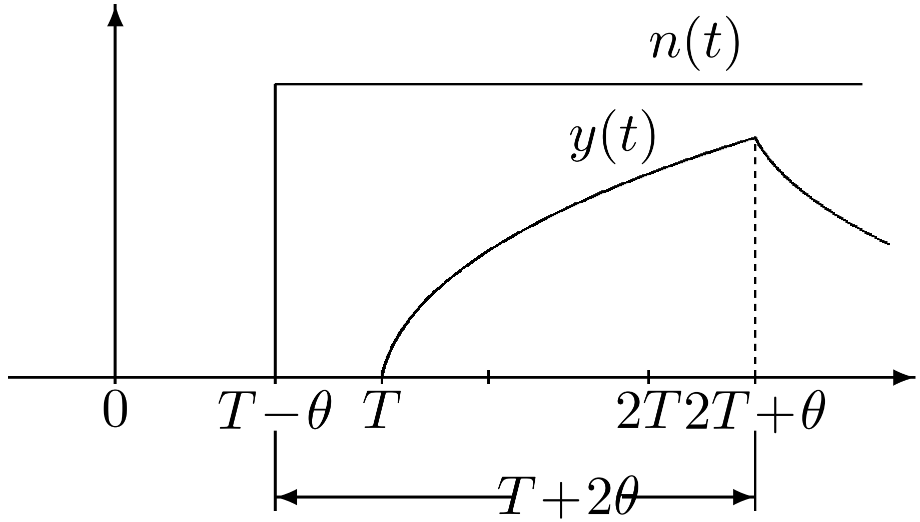
Progetto per variazioni di carico – 2

A differenza del caso di un ingresso di riferimento, l'istante di applicazione del disturbo non è noto a priori e si fa riferimento al caso peggiore. Per un processo con ritardo θ

- se il disturbo è sincronizzato con il campionamento T non si è nel caso peggiore



- il caso peggiore di applicazione del disturbo è θ unità di tempo prima di un istante di campionamento T



Esempio di progetto per variazioni di carico

Processo con ritardo $\theta = T$

$$G(s) = \frac{e^{-T\,s}}{1 + \tau\,s}$$

da cui, a valle di uno ZOH,

$$G_p(z) = \frac{(1-b)z^{-2}}{1 - b\,z^{-1}} \qquad b = e^{-T/\tau}$$

$$N(s) = \frac{1}{s} \quad \rightarrow \quad NG(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{e^{-T\,s}}{(1+\tau\,s)s}\right] = \frac{(1-b)z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-b\,z^{-1})}$$

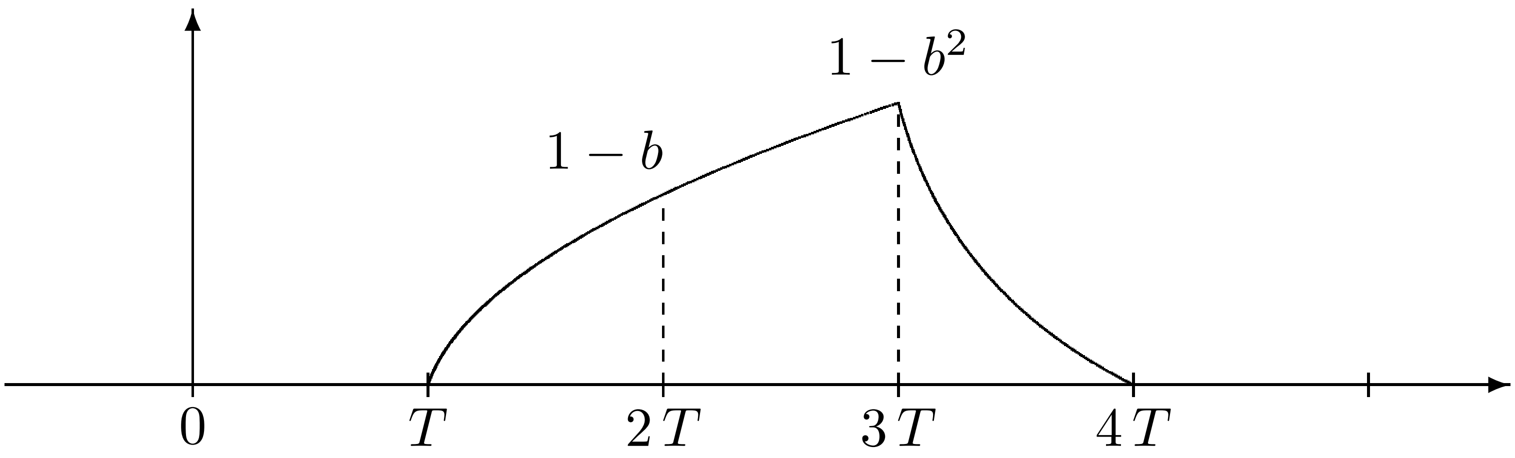
Nel caso peggiore non è possibile influire sull'uscita fino all'istante $T + 2\theta = 3T$ (incluso) dopo l'applicazione del disturbo. Antitrasformando $NG(z)$ (ad esempio con il metodo della lunga divisione) si ha

$$\frac{(1-b)z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-b\,z^{-1})} = 0 + 0z^{-1} + (1-b)z^{-2} + (1-b^2)z^{-3} + \ldots$$

per cui i vincoli sulla variabile di uscita sono scelti come

$$y(0) = 0 \quad y(T) = 0 \quad y(2\,T) = 1 - b \quad y(3\,T) = 1 - b^2 \quad y(nT) = 0 \text{ per } n > 3$$

Esempio di progetto per variazioni di carico (cont)



Si ha dunque

$$Y(z) = (1-b)z^{-2} + (1-b^2)z^{-3}$$

da cui il regolatore

$$D(z) = \frac{1+b+b^2}{1-b}\,\frac{1-\dfrac{b(1+b)z^{-1}}{1+b+b^2}}{(1-z^{-1})(1+(1+b)z^{-1})}$$

La presenza di un polo instabile in $z=-(1+b)$ nella $D(z)$ indica la possibilità di fenomeni di ringing