

# Automazione

18 gennaio 2023

**Esercizio 1** (gli studenti con un progetto saltano questo esercizio)

Si consideri un sistema di automazione in cui, a livello di coordinamento, è necessario gestire in modalità hard real time i seguenti 4 task periodici:

1. task  $A_1$  avente  $C_1 = 1$  t.u. e  $T_1 = 4$  t.u.;
2. task  $A_2$  avente  $C_2 = 3$  t.u. e  $T_2 = 8$  t.u.;
3. task  $A_3$  avente  $C_3 = 2$  t.u. e  $T_3 = 9$  t.u.;
4. task  $A_4$  avente  $C_4 = 1$  t.u. e  $T_4 = 12$  t.u..

Ci sono 3 task aperiodici da gestire in modalità hard real time, così caratterizzati:

- a. task  $A_5$  avente minimo tempo di occorrenza di 12 t.u. e massimo tempo di esecuzione di 6 t.u.;
- b. task  $A_6$  avente minimo tempo di occorrenza di 18 t.u. e massimo tempo di esecuzione di 5 t.u.;
- c. task  $A_7$  avente minimo tempo di occorrenza di 24 t.u. e massimo tempo di esecuzione di 7 t.u..

Si ipotizzi che:

- tutti i task descritti siano indipendenti dal punto di vista funzionale l'uno dall'altro;
- si abbiano a disposizione per lo scheduling dei task due processori: nel primo può girare l'algoritmo RMPO e nel secondo l'algoritmo EDF.

Si chiede di risolvere i seguenti punti.

1. Identificare i due gruppi disgiunti di task che verranno eseguiti uno con algoritmo RMPO e l'altro con l'algoritmo EDF.
2. Analizzare le condizioni necessarie e (ove possibile) sufficienti degli algoritmi ed eseguirne esplicitamente lo scheduling.
3. Tracciare il diagramma SFC dell'algoritmo di Admission Control che sottende allo smistamento delle istanze dei task tra le due code di attesa dei due algoritmi di scheduling, ipotizzando che:
  - a) esiste un sensore S che assume i seguenti valori interi:
    - i)  $i = 0$  se nessuna istanza di alcun task deve essere smistata;
    - ii) un valore  $i \in \{1, \dots, 7\}$  se deve essere smistata una istanza relativa al task  $A_i$ ;
  - b) esiste un attuatore A che può assumere uno dei due valori binari:
    - i) 0 (default) per smistare l'istanza del task nella coda di attesa dell'algoritmo EDF;
    - ii) 1 per smistare l'istanza del task nella coda di attesa dell'algoritmo RMPO;
  - c) senza perdita di generalità, quando due o più istanze devono essere smistate contemporaneamente dall'algoritmo di Admission Control, verrà sempre gestita per prima quella avente numero di task più basso; quando una istanza viene smistata, il sensore S assume valore 0 se non ci sono altre istanze di task da smistare, oppure il valore più basso tra le istanze rimaste da smistare;
  - d) Il tempo di esecuzione del diagramma SFC è istantaneo rispetto alla esecuzione degli algoritmi EDF e RMPO; pertanto le istanze dei task che compaiono allo stesso istante all'ingresso dell'Admission Control, benché siano smistate in serie dal diagramma SFC, compariranno istantaneamente nella coda di attesa del relativo algoritmo di scheduling.

%

## Esercizio 2

In Fig. 1 è mostrata la sequenza di operazioni di molitura automatizzata delle olive per la produzione di olio extra vergine in un frantoio moderno a ciclo continuo. In ingresso ci sono lotti sequenziali di olive, ognuno di taglia variabile (in genere, non meno di 250–300 kg e non più di una tonnellata).

Il processo prevede quattro fasi: *i*) lavaggio, *ii*) frangitura, *iii*) gramolatura e *iv*) spremitura (estrazione/separazione per centrifugazione). Le olive di ogni lotto vengono caricate in una vasca, quindi lavate e defogliate su un nastro che le trasporta alla macchina per la frangitura, dove sono schiacciate (polpa e nocciolo) con dei martelli meccanici. La pasta di olive così ottenuta viene immessa in uno dei moduli in acciaio (nella foto in Fig. 1 sono 5) della macchina per la gramolatura. Questa consiste in un lento mescolamento a temperatura regolata che aggrega le particelle di olio rendendo la pasta uniforme. La durata della gramolatura può variare in base alla quantità e qualità delle olive nel lotto. La pasta proveniente da ciascuno dei moduli della gramolatrice viene immessa per la spremitura in una grossa centrifuga (decanter) che estrae, a freddo e ruotando a velocità elevata, l'olio extra-vergine finale, separandolo dalla sansa e dall'acqua vegetale.

Modellare la molitura delle olive mediante una rete di Petri ordinaria (inclusi i token iniziali) in modo tale da garantire il corretto sequenziamento delle fasi, la lavorazione separata dei lotti e l'efficienza del processo. Si consideri il caso di due moduli di gramolatura e si assuma che nuovi lotti di olive siano sempre disponibili (il frantoio lavora anche h24 nel periodo di picco della raccolta). La rete deve potersi però espandere in modo semplice, nel caso ci siano in parallelo  $n > 2$  moduli di gramolatura. Definire esplicitamente il significato dei posti e delle transizioni della rete.

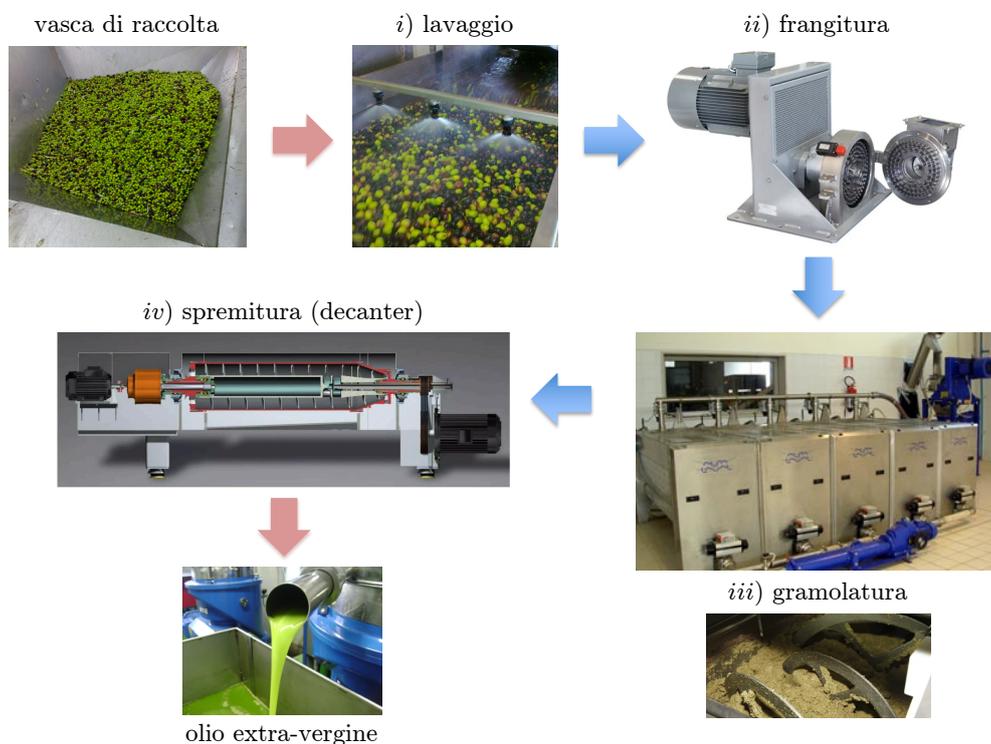


Figura 1: Schema con le fasi del processo di molitura automatizzata delle olive.

%

### Esercizio 3

Nel sistema di automazione di Fig. 2, un motore master muove a velocità costante  $\dot{x} = v > 0$  (da sinistra a destra) un nastro trasportatore. Sul nastro si susseguono ciclicamente due oggetti cilindrici di altezza  $H$  e  $L$  (con  $H > L$ ), spaziate tra di loro rispettivamente di  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  (con  $\Delta_1 < \Delta_2$ ). La lunghezza di un ciclo sul nastro è quindi pari a  $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ .

Un secondo motore con velocità angolare  $\dot{\theta}_s(t)$  aziona, tramite una trasmissione a cremagliera con rapporto di conversione angolare-lineare  $N_s$ , un pistone che marca la parte superiore degli oggetti cilindrici. Il pistone deve realizzare un opportuno moto alternato con velocità  $\dot{y}(t)$ , partendo da fermo a una quota  $M$  e tornando fermo alla stessa quota dopo ogni marcatura. Lo stato del sistema al tempo  $t = 0$  è quello mostrato nella Fig. 2, con  $\theta_s(0) = x(0) = 0$  e  $y(0) = M$ . Si noti che un ciclo lungo  $\Delta$  sul nastro si può scomporre in due tratti di uguale lunghezza  $\Delta_1$  centrati sugli oggetti e in uno spazio morto lungo  $\Delta_0 = \Delta_2 - \Delta_1 > 0$ , come indicato in figura.

Si determini una legge di sincronizzazione ciclica della posizione angolare  $\theta_s$  del secondo motore in modo parametrico rispetto alla posizione  $x$  del nastro, ossia una *camma elettronica*  $\theta_s = f(x)$  in cui la funzione  $f$  è continua assieme alla sua derivata  $f'$ , in modo tale da effettuare le marcature in modo corretto per ogni valore costante  $v$  di velocità del nastro.

Tracciare (almeno in modo qualitativo) i profili temporali di  $x(t)$  e  $\dot{x}(t)$  e quelli parametrici di  $\theta_s = f(x)$  e della sua derivata spaziale  $\theta'_s = df/dx$ . Come riferimenti numerici (non strettamente necessari), si possono utilizzare i dati:

$$H = 0.6, \quad L = 0.3, \quad M = 1.2, \quad \Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = 2 \quad \text{tutti in [m]}, \quad N_s = 0.2 \text{ [m/rad]},$$

con il servomotore master che impone una velocità costante del nastro pari a  $v = 4$  [m/s].

*Nota: Si possono definire separatamente il legame  $y = g(x)$  tra posizione  $x$  del nastro e quota  $y$  del pistone e il legame  $\theta_s = h(y)$ . La legge  $\theta_s = f(x) = h(g(x))$  è la composizione delle due funzioni.*

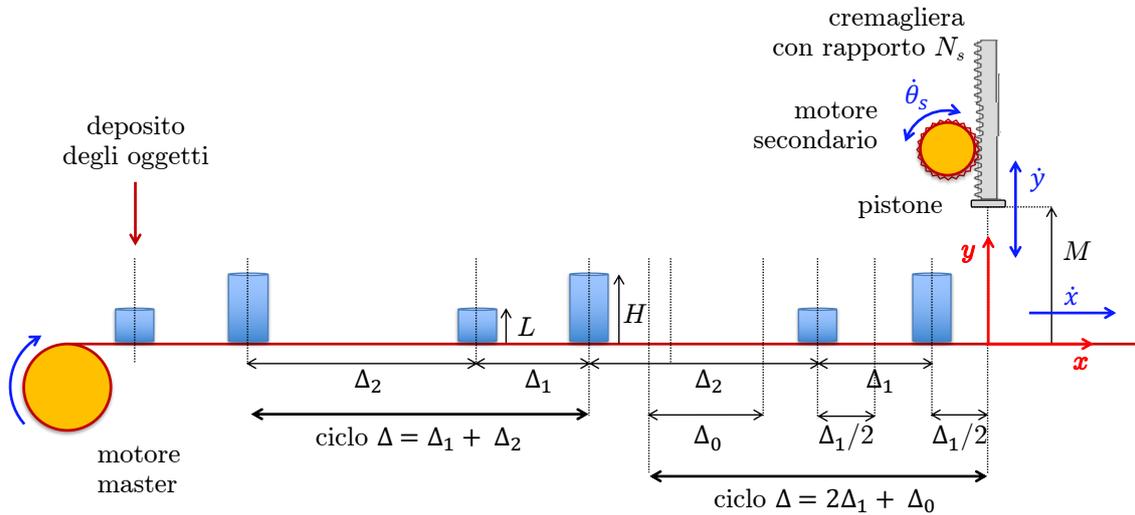


Figura 2: Set-up di un sistema di automazione con due assi di movimentazione.

%

#### Esercizio 4

Si consideri il problema di regolazione della velocità di rotazione  $\dot{\theta}$  di un motore elettrico descritto dal modello

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = K_t i, \quad (1)$$

dove  $J > 0$  è l'inerzia complessiva,  $B > 0$  è il coefficiente di attrito viscoso e  $K_t > 0$  è il guadagno corrente-coppia del motore. Il valore numerico dei parametri è incognito. Il motore parte da fermo.

Progettare una legge di controllo per la corrente  $i$  con feedback dalla velocità  $\dot{\theta}$  in modo da annullare l'errore a regime permanente per qualsiasi valore desiderato  $\dot{\theta}_d$  costante, con un transitorio che si estingua rapidamente. Nel caso in cui il valore dei coefficienti  $B$  e  $K_t$  sia noto, progettare un secondo regolatore con azioni di feedback e feedforward che abbia lo stesso comportamento a regime e un transitorio più veloce del precedente a parità di sforzo di controllo. Fornire una realizzazione digitale dei due regolatori, scegliendo un passo di campionamento appropriato in base alla banda passante ottenuta ad anello chiuso. *Nota: Si può svolgere l'esercizio senza l'uso di valori numerici.*

**[210 minuti (per tutti gli esercizi), 165 minuti (senza l'esercizio 1);  
libri aperti]**

# Soluzione

18 gennaio 2023

## Esercizio 1

Il problema di scheduling equivalente è dato dai seguenti 7 task periodici:

1. task  $A_1$  avente  $C_1 = 1$  t.u. e  $T_1 = 4$  t.u.;
2. task  $A_2$  avente  $C_2 = 3$  t.u. e  $T_2 = 8$  t.u.;
3. task  $A_3$  avente  $C_3 = 2$  t.u. e  $T_3 = 9$  t.u.;
4. task  $A_4$  avente  $C_4 = 1$  t.u. e  $T_4 = 12$  t.u.;
5. task  $A_5$  avente  $C_5 = 6$  t.u. e  $T_5 = 12$  t.u.;
6. task  $A_6$  avente  $C_6 = 5$  t.u. e  $T_6 = 18$  t.u.;
7. task  $A_7$  avente  $C_7 = 7$  t.u. e  $T_7 = 24$  t.u..

**Punto 1.** E' necessario identificare una partizione dell'insieme dato di task così da generare due insiemi disgiunti di task che siano schedulabili dai due algoritmi (RMPO e EDF). Calcolando il coefficiente di utilizzazione complessivo di tutti i task si nota che:

$$U = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{2}{9} + \frac{1}{12} + \frac{6}{12} + \frac{5}{18} + \frac{7}{24} = \frac{18 + 27 + 16 + 6 + 36 + 20 + 21}{72} = \frac{144}{72} = 2.$$

La partizione sarà quindi composta necessariamente da due insiemi di task periodici aventi ciascuno coefficiente di utilizzazione pari a 1.

Identificato un insieme, l'altro è automaticamente determinato. Analizzando gli addendi al numeratore dovremo prendere dei task la cui somma faccia 72 t.u. Procedendo per costruzione, si può notare che una volta preso il task  $A_5$  avente 36 t.u., bisognerà scegliere altri task la cui somma dei numeratori faccia 36. Si possono escludere i task  $A_2$  e  $A_7$  aventi un numeratore dispari (21 e 27). L'unica combinazione possibile dei numeratori rimasti (18, 16, 6 e 20) la cui somma faccia 36 è la coppia di task  $A_3$  (avente 16 a numeratore) e  $A_6$  (avente 20 a numeratore).

Pertanto, necessariamente, i due insiemi disgiunti di task sono:

- $I_1 = \{A_1, A_2, A_4, A_7\}$
- $I_2 = \{A_3, A_5, A_6\}$

**Punto 2.** Entrambi gli insiemi di task periodici hanno coefficiente di utilizzazione unitario. Pertanto, EDF può schedularli entrambi. Si può notare, però, che l'insieme di task periodici  $I_1$  è caratterizzato dal fatto che i task sono legati tra loro da relazioni armoniche (24 è multiplo intero di 12, 8 e 4) quindi per tale insieme vale la condizione sufficiente schedulabilità con RMPO. Pertanto, un'allocazione che assicura la condizione necessaria e sufficiente di schedulabilità per entrambi gli insiemi di task periodici è:

- $I_1 \rightarrow$  RMPO
- $I_2 \rightarrow$  EDF

La soluzione dello scheduling RMPO inerente ai task dell'insieme  $I_1 = \{A_1, A_2, A_4, A_7\}$  è riportata in Fig. 3.

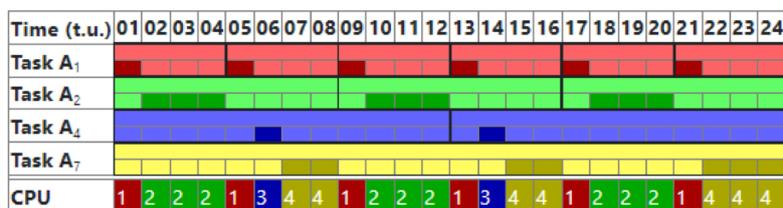


Figura 3: Scheduling RMPO per l'insieme di task  $I_1$ .

La soluzione dello scheduling EDF inerente ai task dell'insieme  $I_2 = \{A_3, A_5, A_6\}$  è riportata in Fig. 4.

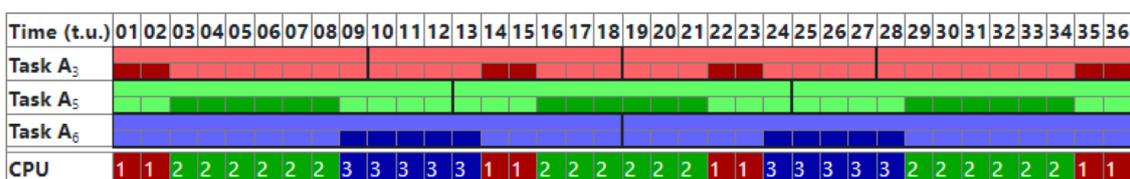


Figura 4: Scheduling EDF per l'insieme di task  $I_2$ .

Si noti infine che RMPO non è soluzione per l'insieme  $I_2 = \{A_3, A_5, A_6\}$ , come mostrato in Fig. 5. Infatti, nel corso della 18-ma t.u., il task  $A_5$  ha sempre maggiore priorità rispetto al task  $A_6$  che non riesce ad eseguire le 5 t.u. del proprio computation time. Pertanto, allo scattare della 19-ma t.u. il task  $A_6$  fallisce la esecuzione entro la propria deadline assoluta.

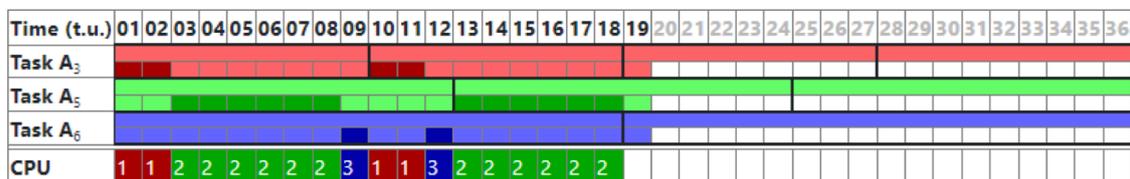


Figura 5: Fallimento dello scheduling RMPO per l'insieme di task  $I_2$ .

**Punto 3.** Una possibile soluzione è data dal diagramma SFC in Fig. 6, dove:

- lo stato 0 è lo stato iniziale;
- lo stato 1 rappresenta l'azione di smistamento dell'istanza verso la coda di attesa dell'algoritmo RMPO (operata attraverso un qualificatore SET sull'azione A=1);
- lo stato 2 rappresenta l'azione di smistamento dell'istanza verso la coda di attesa dell'algoritmo EDF (operata attraverso un qualificatore RESET sull'azione A=1, che porta A ad assumere il valore 0).

Il funzionamento del diagramma è il seguente:

- dallo stato iniziale (0) non appena una o più istanze di task devono essere smistate, il sensore S assumerà il valore corrispondente al (minor numero di) task;
- a valle dello stato iniziale, una scelta permette di identificare la appartenenza dell'istanza all'insieme  $I_1 = \{A_1, A_2, A_4, A_7\}$  oppure all'insieme  $I_2 = \{A_3, A_5, A_6\}$ ;

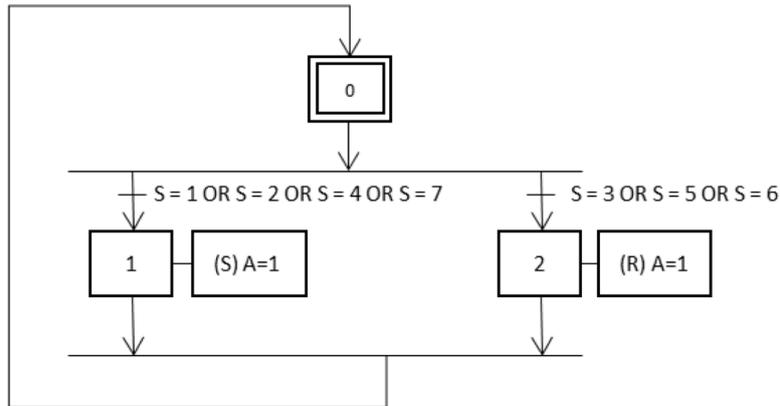


Figura 6: Diagramma SFC.

- nel primo caso, se  $S \in I_1$  l'istanza deve essere smistata verso la coda di attesa dell'algoritmo RMPO, pertanto nello stato 1 viene eseguita un'azione  $A = 1$  con qualificatore di tipo SET;
- nel secondo caso, se  $S \in I_2$  l'istanza deve essere smistata verso la coda di attesa dell'algoritmo EDF, pertanto nello stato 2 viene eseguita un'azione  $A = 1$  con qualificatore di tipo RESET, che porta l'attuatore A ad assumere il valore di default (0) necessario per smistare l'istanza del task verso l'algoritmo EDF;
- indipendentemente dalla scelta fatta, dopo avere effettuato lo smistamento, la convergenza riporta il diagramma nello stato iniziale, per gestire la successiva istanza.

Ad esempio, non appena viene avviato il processo di scheduling, dovranno essere smistate le prime istanze di tutti i task. Il diagramma SFC le smisterà serialmente (dalla prima istanza del task  $A_1$  fino a quella del task  $A_7$ ) nelle relative code di attesa. Dato che il tempo di esecuzione del diagramma SFC è stato ipotizzato istantaneo rispetto ai tempi di esecuzione degli algoritmi di scheduling, i primi 7 cicli di esecuzione del diagramma SFC, porteranno le prime istanze dei task dell'insieme  $I_1$  nella coda di attesa dell'algoritmo di scheduling RMPO e le prime istanze dei task dell'insieme  $I_2$  nella coda di attesa dell'algoritmo di scheduling EDF, esattamente come richiesto.

## Esercizio 2

La rete di Petri richiesta è mostrata in Fig. 7. Il significato dei posti e delle transizioni è il seguente.

- $p_1$  = nuovo lotto di olive presente nella vasca di raccolta
- $p_2$  = lavaggio delle olive
- $p_3$  = macchina frangitrice a martelli disponibile
- $p_4$  = frangitura delle olive
- $p_5$  = lotto corrente di olive frante pronto per la gramolatura
- $p_{6i}$  = modulo  $i$  della macchina gramolatrice disponibile
- $p_{7i}$  = gramolatura delle olive (nel modulo  $i$ )
- $p_{8i}$  = pasta di olive miscelata pronta per la spremitura (nel modulo  $i$ )
- $p_9$  = decanter disponibile
- $p_{10}$  = spremitura delle olive
- $t_1$  = inizio fase di lavaggio

$t_2$  = fine fase di lavaggio e inizio fase di frangitura  
 $t_3$  = fine fase di frangitura  
 $t_{4i}$  = inizio fase di gramolatura (nel modulo  $i$ )  
 $t_{5i}$  = fine fase di gramolatura (nel modulo  $i$ )  
 $t_{6i}$  = inizio fase di spremitura (lotto proveniente dal modulo  $i$ )  
 $t_7$  = fine fase di spremitura

Complessivamente ci saranno quindi  $7 + 3n$  posti e  $4 + 3n$  transizioni, se  $n$  sono i moduli della macchina gramolatrice<sup>1</sup>. Ogni lotto di olive viene lavorato secondo il flusso richiesto, senza alcuna miscelazione tra lotti diversi, né prima né dopo la gramolatura. Tutte le macchine lavorano senza pausa quando possibile. Il flusso è sequenziale fino alla macchina gramolatrice dove si parallelizza, riprendendo poi in modo seriale per la spremitura. E' anche possibile che un lotto più piccolo di olive, entrato nel sistema dopo un altro più grande, termini prima la lavorazione essendo stata più breve la sua fase di gramolatura. La struttura modulare del processo di gramolatura è evidente.

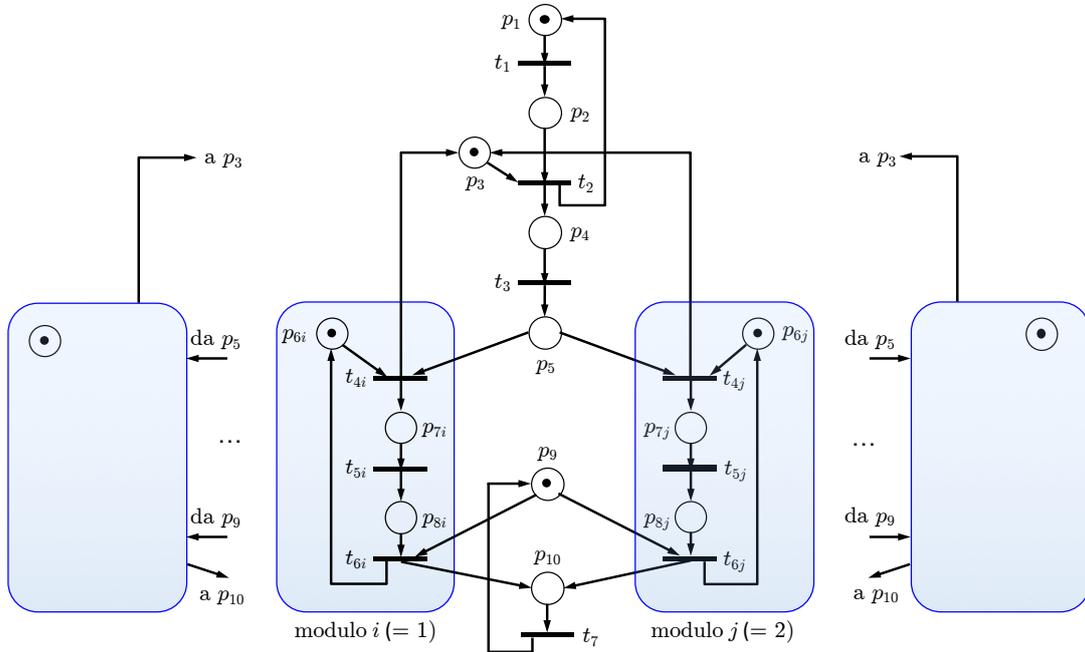


Figura 7: La rete di Petri che rappresenta la sequenza di operazioni di molitura mostrata in Fig. 1.

Si noti infine che:

- Quando un token arriva nel posto  $p_5$  ed è disponibile più di un modulo di gramolatura, si crea un conflitto sull'assegnazione del lotto corrente; questo si risolve in genere facendo scattare le transizioni abilitate in ordine lessicografico (indice  $i$  di modulo più basso). Anche una logica random sarebbe comunque possibile.
- Il processo non ha bisogno di buffer fisici aggiuntivi, perché il generico lotto di olive può rimanere in attesa in vari punti del sistema: sul nastro di lavaggio (in attesa della frangitura), nella macchina di frangitura (in attesa di un modulo di gramolatura disponibile) o all'interno di un modulo della macchina gramolatrice (in attesa del decanter).

<sup>1</sup>Si potrebbe compattare la descrizione interna a ogni modulo  $i$ , unificando i posti  $p_{7i}$  e  $p_{8i}$  ed eliminando la transizione intermedia  $t_{5i}$ . Il posto equivalente rappresenterebbe ancora l'attività di gramolatura, inclusa l'eventuale attesa della disponibilità del decanter a processo completato. In tal caso ci sarebbero  $7 + 2n$  posti e  $4 + 2n$  transizioni.

### Esercizio 3

Il motore master impone un moto uniforme al nastro nel dominio del tempo:

$$\dot{x}(t) = v (= \text{costante}) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(0) + vt = vt,$$

essendo  $x(0) = 0$ .

Il legame tra posizione lineare  $y$  del pistone e posizione angolare  $\theta_s$  del motore secondario è

$$\dot{\theta}_s(t) = \frac{\dot{y}(t)}{N_s} \quad \Rightarrow \quad \theta_s(t) = \frac{y(t) - M}{N_s} \quad \Rightarrow \quad \theta_s = h(y) = \frac{y - M}{N_s}, \quad (2)$$

dove si è tenuto conto delle condizioni iniziali  $\theta_s(0) = 0$  e  $y(0) = M$  al tempo  $t = 0$ . Date le inversioni di moto, la rotazione del motore secondario è limitata e non occorrerà in generale la riduzione dei valori angolari di  $\theta_s$  al campo principale  $[-\pi, \pi]$ .

Come suggerito nel testo, per sincronizzare in modo parametrico la posizione  $\theta_s$  con la posizione  $x$ , è conveniente dividere il moto ciclico dell'asse secondario in tre sezioni: nelle prime due lo spostamento del pistone è centrato sui due oggetti cilindrici, mentre nella terza il pistone rimane in posizione costante fino all'inizio del prossimo ciclo. In questo modo, il moto alternato del pistone nel tempo avrà una struttura periodica uguale per le due marcature a quota  $H$  e a quota  $L$  e sarà facile imporre le condizioni al contorno.

In base alla (2), è sufficiente ora lavorare sul legame  $y = g(x)$  tra le posizioni lineari  $x$  del nastro e quella  $y$  del pistone. Per un singolo ciclo, con  $x \in [0, \Delta]$ , si può scegliere il seguente profilo di tipo cicloidale<sup>2</sup>:

$$y = g(x) = \begin{cases} \left(M - \frac{H}{2}\right) + \frac{H}{2} \cos\left(\frac{2\pi x}{\Delta_1}\right), & x \in [0, \Delta_1], \\ \left(M - \frac{L}{2}\right) + \frac{L}{2} \cos\left(\frac{2\pi x}{\Delta_1}\right), & x \in [\Delta_1, 2\Delta_1], \\ M, & x \in [2\Delta_1, \Delta]. \end{cases} \quad (3)$$

La scelta (3) soddisfa le condizioni al contorno (spaziali) richieste per la posizione del pistone:

$$g(0) = M, \quad g(\Delta_1/2) = M - H, \quad g(\Delta_1) = M, \quad g(3\Delta_1/2) = M - L, \quad g(2\Delta_1) = g(\Delta) = M.$$

Inoltre la derivata spaziale di  $y$  è:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \begin{cases} -\frac{H\pi}{\Delta_1} \sin\left(\frac{2\pi x}{\Delta_1}\right), & x \in [0, \Delta_1], \\ -\frac{L\pi}{\Delta_1} \sin\left(\frac{2\pi x}{\Delta_1}\right), & x \in [\Delta_1, 2\Delta_1], \\ 0, & x \in [2\Delta_1, \Delta]. \end{cases} \quad (4)$$

Si ha quindi  $y' = 0$  per le posizioni  $x = \{0, \Delta_1/2, \Delta_1, 3\Delta_1/2, 2\Delta_1, \Delta\}$ . In tal modo, la velocità  $\dot{y}$  sarà certamente nulla (pur essendo  $\dot{x} \neq 0$ ) in tutti gli istanti di partenza, inversione del moto e arrivo del moto alternante del pistone, come richiesto dalle condizioni al contorno temporali. Vale infatti la:

$$\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y'(x) \dot{x}(t).$$

<sup>2</sup>Nella seconda espressione della (3), si noti che  $\cos(2\pi(x - \Delta_1)/\Delta_1) = \cos(2\pi x/\Delta_1)$ .

Il legame (3) e la sua derivata (4) sono validi anche nei cicli successivi, ossia per una posizione generica  $x_k = k\Delta + x$ , con  $k = 0, 1, \dots$

Infine, la funzione parametrica  $\theta_s = f(x) = h(g(x))$  si ottiene combinando i legami (2) e (3):

$$\theta_s = f(x) = \begin{cases} \frac{H}{2N_s} \left( \cos\left(\frac{2\pi x}{\Delta_1}\right) - 1 \right), & x \in [0, \Delta_1], \\ \frac{L}{2N_s} \left( \cos\left(\frac{2\pi x}{\Delta_1}\right) - 1 \right), & x \in [\Delta_1, 2\Delta_1], \\ 0, & x \in [2\Delta_1, \Delta]. \end{cases} \quad (5)$$

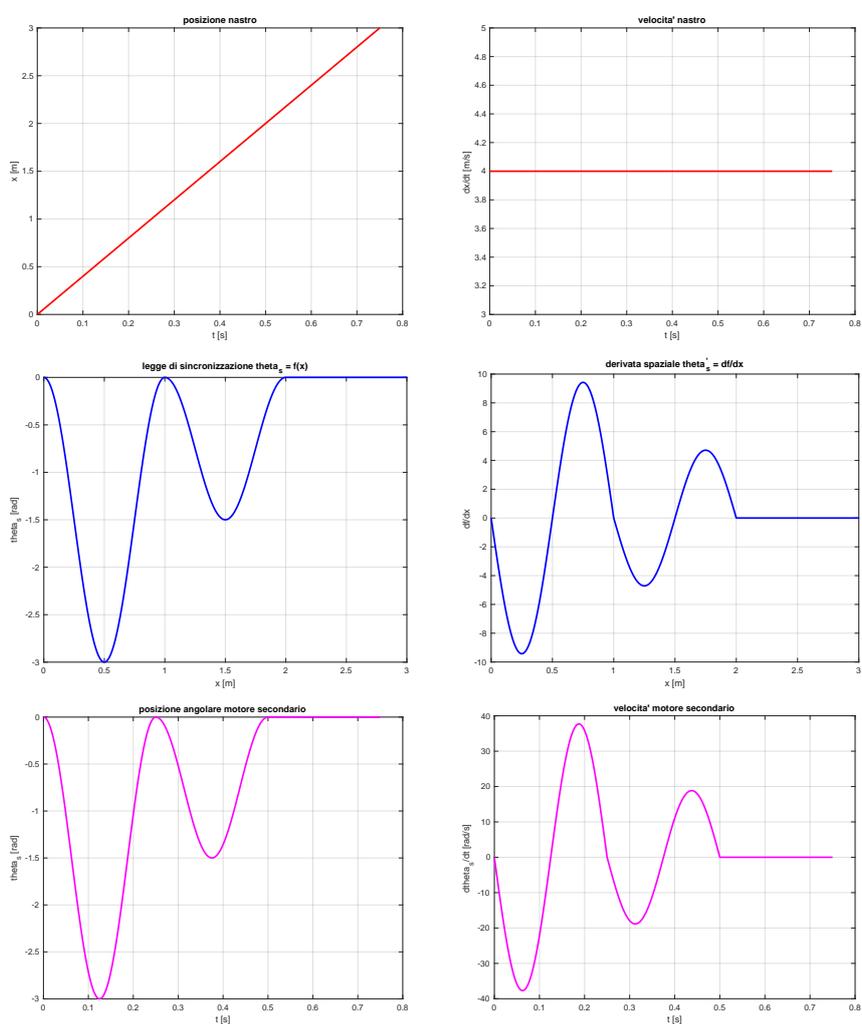


Figura 8: Dall'alto:  $x(t)$  e  $\dot{x}(t)$ ;  $\theta_s = f(x)$  e  $\theta'_s = df/dx$ ;  $\theta_s(t)$  e  $\dot{\theta}_s(t)$ .

Di conseguenza

$$\theta'_s = \frac{df}{dx} = \begin{cases} -\frac{H\pi}{\Delta_1 N_s} \sin\left(\frac{2\pi x}{\Delta_1}\right), & x \in [0, \Delta_1], \\ -\frac{L\pi}{\Delta_1 N_s} \sin\left(\frac{2\pi x}{\Delta_1}\right), & x \in [\Delta_1, 2\Delta_1], \\ 0, & x \in [2\Delta_1, \Delta]. \end{cases} \quad (6)$$

Utilizzando i dati numerici forniti, la Fig. 8 riporta i grafici per un singolo ciclo delle grandezze richieste. Sono aggiunti per completezza anche i grafici temporali di  $\theta_s(t)$  e  $\dot{\theta}_s(t) = \theta'_s(\theta_m)\dot{\theta}_m$ . Dai dati del problema, la lunghezza del ciclo è  $\Delta = 3$  [m] e la sua durata è  $T = \Delta/v = 0.75$  [s].

Dai grafici si nota anche che, con la scelta di due opportuni profili cicloidali ripetuti, non ci sono sovraelongazioni o fenomeni di ‘wandering’ nell’azionamento del pistone: il suo moto rimane sempre confinato tra il valore superiore ( $M$ ) e quello inferiore ( $H$  o  $L$ ) di definizione, senza altre inversioni al di fuori degli estremi (un’unica interpolante con un polinomio di grado elevato potrebbe non avere tali favorevoli proprietà).

#### Esercizio 4

La funzione di trasferimento del sistema (1), considerando la velocità  $\dot{\theta}$  come uscita, è

$$P(s) = \frac{\dot{\theta}(s)}{i(s)} = \frac{K_t}{Js + B}. \quad (7)$$

La risposta indiciale di  $P(s)$  nel dominio del tempo si calcola facilmente,

$$\dot{\theta}(t) = \frac{K_t}{B} \left( 1 - \exp\left(-\frac{B}{J} t\right) \right),$$

ed è riportata in Fig. 9 per valori dei parametri scelti per illustrazione pari a  $K_t = 6$  [Nm/A],  $J = 4$  [Nm·s<sup>2</sup>] e  $B = 2$  [Nm·s]. Come si nota, il valore di regime è  $P(0) = K_t/B (= 3)$ , mentre il tempo di salita fino a tale valore è calcolato mediante la tangente alla risposta nell’istante  $t = 0$  ed è pari a  $t_s = J/B (= 2)$  [s] (ossia, la costante di tempo del polo di  $P(s)$ ). Se si volesse procedere con il primo metodo di Ziegler-Nichols per la taratura dei guadagni di uno qualsiasi dei regolatori di tipo PID, si estrarrebbero dalla risposta indiciale i tre parametri

$$K = \frac{K_t}{B} = 3, \quad \tau = t_s = \frac{J}{B} = 2, \quad \theta = 0,$$

non essendo presente alcun ritardo finito.

E’ evidente che il valore  $\theta = 0$  non è compatibile con l’impiego dalla tabella di Ziegler-Nichols, qualunque sia il tipo di regolatore che si vuole utilizzare ( $P$ ,  $PI$ ,  $PID$  o altri). Un espediente per ovviare a questa limitazione potrebbe essere quello di ripartire il valore del tempo di salita  $t_s$  tra il parametro  $\tau > 0$  e quello  $\theta > 0$  in modo che sia comunque  $\theta + \tau = t_s$ , ossia ponendo

$$\theta = \alpha t_s, \quad \tau = (1 - \alpha) t_s, \quad \alpha \in (0, 1),$$

per poi procedere con l’uso standard delle tabelle. Questa strada però è del tutto euristica, soprattutto perché abbiamo in questo caso già a disposizione la struttura del modello matematico del processo da controllare (ossia l’eq. (7)). Si procede pertanto con un approccio analitico.

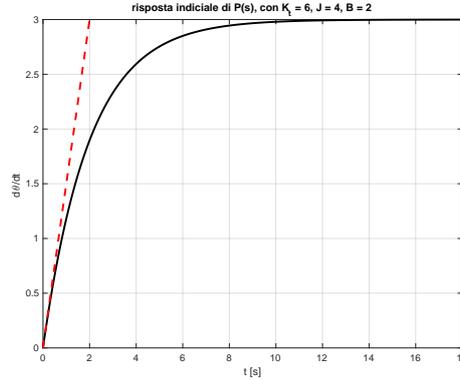


Figura 9: Risposta indiciale per il sistema ad anello aperto  $P(s)$ .

Anzitutto, non essendoci un polo nell'origine (a causa dell'attrito  $B \neq 0$ ), un semplice controllo proporzionale all'errore  $e = \dot{\theta}_d - \dot{\theta}$ ,  $i(t) = K_P e(t)$  con  $K_P > 0$ , non è in grado di annullare l'errore a regime in risposta a un gradino di ampiezza  $\dot{\theta}_d$ . Infatti, con  $C(s) = K_P$  (regolatore  $P$ ) si ha

$$W(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{K_t K_P}{Js + B + K_t K_P}.$$

Il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente (ha un solo polo in  $s_0 = -(B + K_t K_P)/J < 0$ ), ma il valore dell'uscita a regime permanente è

$$\dot{\theta}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s W(s) \cdot \frac{\dot{\theta}_d}{s} = W(0) \dot{\theta}_d = \frac{K_t K_P}{B + K_t K_P} \dot{\theta}_d \neq \dot{\theta}_d.$$

Si introduce quindi anche un'azione integrale sull'errore:

$$i(t) = K_P (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}(t)) + K_I \int_0^t (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}(\tau)) d\tau. \quad (8)$$

Nel dominio di Laplace, con il regolatore  $PI$

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s}$$

si ottiene

$$W(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{K_t (K_P s + K_I)}{Js^2 + (B + K_t K_P) s + K_t K_I}. \quad (9)$$

Scegliendo  $K_P > 0$  e  $K_I > 0$  si ha certamente stabilità asintotica ad anello chiuso, con due poli in

$$s_{1,2} = \frac{-(B + K_t K_P) \pm \sqrt{(B + K_t K_P)^2 - 4J K_t K_I}}{2J}.$$

La risposta a regime al gradino  $\dot{\theta}_d$  è ora quella desiderata:

$$\dot{\theta}(\infty) = \dots = W(0) \dot{\theta}_d = \frac{K_t K_I}{K_t K_I} \dot{\theta}_d = \dot{\theta}_d.$$

Tuttavia la risposta transitoria è più lenta del caso precedente. Supponiamo di aver fissato nei due casi lo stesso  $K_P > 0$ , quindi lo sforzo di controllo proporzionale all'errore nel primo istante della

risposta nel tempo. Si può quindi studiare qualitativamente cosa succede al variare di  $K_I$ . A tal fine, dalla (9) si può riscrivere l'equazione caratteristica del sistema ad anello chiuso come

$$\text{den } W(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad s \left( s + \frac{B + K_t K_P}{J} \right) + \frac{K_t K_I}{J} = 0 \quad \Rightarrow \quad d(s) + K' = 0.$$

Si può quindi tracciare il luogo delle radici al variare di  $K' = K_I(K_t/J) > 0$ , a partire dalle due radici di  $d(s) = 0$  che vengono trattate come poli equivalenti ad anello aperto (in assenza di zeri)<sup>3</sup>. Per  $K_I \leq K_r := (B + K_t K_P)^2 / (4JK_t)$ , i due poli ad anello chiuso saranno reali e negativi, con quello dominante (il più vicino all'origine) certamente più lento del singolo polo in  $s_0 < 0$  del regolatore  $P$ . Per  $K_I > K_r$ , i due poli diventano complessi coniugati, con parte reale pari a  $s_0/2 < 0$  e con parte immaginaria crescente con  $K_I$  (e quindi con coefficiente di smorzamento che diminuisce); di conseguenza, le oscillazioni nella risposta cresceranno all'aumentare del guadagno integrale  $K_I$ , allungando così comunque il transitorio.

Si noti inoltre che, se fossero noti i coefficienti  $J$  e  $B$ , una scelta particolare dei guadagni del regolatore permetterebbe una sintesi più diretta, grazie alla cancellazione del polo del processo con lo zero del regolatore  $PI$ . Si ha infatti,

$$\begin{aligned} K_P = K_1 J & \Rightarrow C(s) = \frac{K_1 (Js + B)}{s} \Rightarrow P(s)C(s) = \frac{K_1 K_t}{s} \Rightarrow W(s) = \frac{K_1 K_t}{s + K_1 K_t}, \\ K_I = K_1 B & \end{aligned}$$

con un solo polo reale in  $s_1 = -K_1 K_t$ , arbitrariamente veloce al crescere di  $K_1 > 0$ .

Quando invece è noto il valore dei coefficienti  $B$  e  $K_t$ , è possibile progettare un altro regolatore aggiungendo l'azione di feedforward a quella in feedback. Essendo l'uscita desiderata costante, il segnale di feedforward sarà anch'esso costante e si ottiene invertendo il processo nel dominio di Laplace a frequenza nulla:

$$i_{\text{ffw}} = P^{-1}(0) \dot{\theta}_d = \frac{B}{K_t} \dot{\theta}_d.$$

Alla stessa espressione si sarebbe ovviamente arrivati imponendo  $\dot{\theta} = \dot{\theta}_d$ ,  $\ddot{\theta} = 0$  nell'eq. (1) e risolvendo rispetto alla corrente  $i$ . Si noti che, impiegando un'azione di feedforward e in assenza di incertezze e disturbi, non è più necessario utilizzare il termine integrale nel controllore. Infatti, per un regolatore  $P + \text{ffw}$

$$i(t) = K_P (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}(t)) + i_{\text{ffw}} = \left( K_P + \frac{B}{K_t} \right) \dot{\theta}_d - K_P \dot{\theta}(t), \quad (10)$$

con  $K_P > 0$ , lo schema a blocchi nel dominio di Laplace diventa quello in Fig. 10. Da questo si ottiene:

$$W(s) = \frac{\dot{\theta}(s)}{\dot{\theta}_d(s)} = \left( K_P + \frac{B}{K_t} \right) \frac{P(s)}{1 + K_P P(s)} = \frac{B + K_t K_P}{Js + B + K_t K_P}. \quad (11)$$

Il sistema ad anello chiuso ha lo stesso singolo polo in  $s_0 < 0$  di quello con il regolatore  $P$ ; ha quindi un transitorio esponenziale più rapido di quello ottenibile con il regolatore  $PI$ , a parità di guadagno  $K_P$ . In aggiunta, l'errore a regime è ora nullo:

$$W(0) = \frac{B + K_t K_P}{B + K_t K_P} = 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}(\infty) = W(0) \dot{\theta}_d = \dot{\theta}_d.$$

<sup>3</sup>Questo utilizzo della tecnica del luogo delle radici al variare di un dato parametro viene a volte chiamata metodo del *contorno delle radici*.

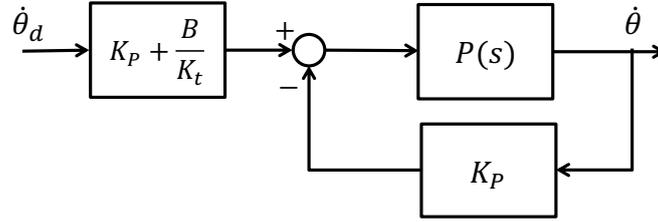


Figura 10: Schema equivalente di controllo con azione  $P$  sull'errore e feedforward.

Una realizzazione digitale del regolatore  $PI$  in (8) è

$$\begin{aligned} u_{i,k} &= u_{i,k-1} + K_I T_c (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_k) \\ i_k &= K_P (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_k) + u_{i,k}, \end{aligned}$$

dove  $x_k = x(kT_c)$ , con  $x = \{u_i, \dot{\theta}, i\}$ ,  $T_c$  è il passo di campionamento e si è utilizzata l'integrazione rettangolare in avanti. Analogamente, per il regolatore  $P+ffw$  in (10) si ha semplicemente

$$i_k = K_P (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_k) + i_{ffw} = \left( K_P + \frac{B}{K_t} \right) \dot{\theta}_d - K_P \dot{\theta}_k.$$

Per il sistema ad anello chiuso (9) controllato da una legge  $PI$ , la banda passante (a  $-3\text{dB}$ ) è certamente limitata superiormente dalla pulsazione naturale  $\omega_n = (K_t K_I)/J$  [rad/s] del termine trinomio a denominatore (in particolare, quando il coefficiente di smorzamento  $\zeta$  non è troppo piccolo). Per il sistema ad anello chiuso (11) controllato dalla legge  $P+ffw$ , la banda passante è esattamente nel punto di rottura del polo,  $B_{-3} = (B + K_t K_P)/J$  [rad/s]. In entrambi i casi, un passo di campionamento  $T_c$  appropriato è centrato nell'intervallo

$$\frac{\pi}{5 \alpha \omega_M} \leq T_c \leq \frac{2\pi}{\alpha \omega_M}, \quad \alpha \in [5 \div 10],$$

con  $\omega_M = \omega_n$  per il regolatore  $PI$  e  $\omega_M = B_{-3}$  per il regolatore  $P+ffw$ .

\*\*\*\*\*