

Automazione

18 gennaio 2021

Esercizio 1

Si consideri un sistema di automazione in cui è necessario gestire il processo di carico e scarico di un sistema ferroviario utilizzando gli elementi della Tab. 1.

Tipo	Id	Descrizione
S	POS _x	POS _x = 1 quando un treno è in prossimità del sensore x e fermo; = 0 altrimenti
S	CAR _t	CAR _t = 1 quando il treno t è completamente carico, = 0 se completamente scarico
A	SCA _s	SCA _s = 1 significa che lo scambio s è attivo, = 0 significa che lo scambio s è inattivo
A	SEMy	SEMy = 1 significa che il semaforo y è verde, = 0 significa che il semaforo y è rosso

Tabella 1: Elementi per l'automazione ferroviaria: S = Sensore; A = Attuatore; $t \in \{A, B\}$, $s \in \{1, 2\}$.

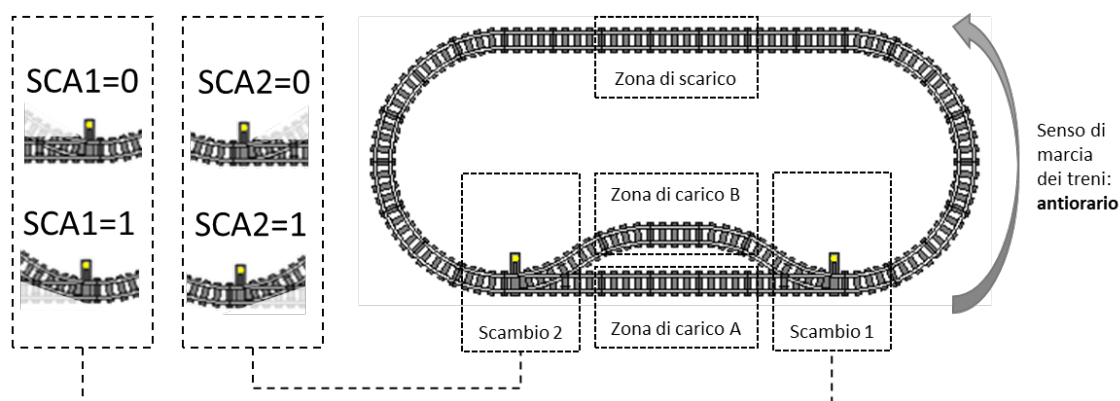


Figura 1: Schema di impianto ferroviario.

Come mostrato in Fig. 1, il sistema ferroviario è composto da due convogli (A e B) in grado di muoversi esclusivamente in senso antiorario. Si assuma che:

- all'inizio, i treni sono fermi e vuoti nelle corrispondenti zone di carico;
- i treni rispettano rigorosamente le segnalazioni semaforiche: rosso fermarsi, verde procedere;
- quando i treni sono fermi nelle zone di carico e scarico, ci sono degli operatori che provvedono ad occuparsi delle attività di carico e scarico;
- i sensori di posizione rilevano la presenza del treno quando è in posizione e fermo;
- si consideri trascurabile il tempo necessario a uno scambio per cambiare di stato;
- se non diversamente indicato, tutti gli attuatori hanno valore di default impostato a 0.

Si richiede di collocare i sensori di posizione e i semafori (il cui numero e posizione sono a scelta dello studente) sullo schema mostrato in Fig. 1 e di progettare un diagramma SFC del sistema di controllo che permetta ai due treni di essere caricati e scaricati a ciclo continuo rispettando i requisiti elencati ed evitando incidenti.

Esercizio 2

Si vuole progettare una linea di trasferta dedicata alla produzione di un componente meccanico che deve subire complessivamente 11 lavorazioni elementari, etichettate con $i = A, B, \dots, K$. Le lavorazioni sono svolte da stazioni multi-utensile collocate in serie, che procedono in maniera sincrona e senza buffer intermedi. Le singole lavorazioni hanno le durate T_i riportate in Tab. 2. Tra le lavorazioni esistono vincoli di precedenza, come illustrato dal grafo orientato in Fig. 2. Il tasso di produzione desiderato è di almeno 80 pezzi al giorno a ciclo continuo (24h). Dimensionare la linea minimizzando il numero di stazioni utilizzate e fornire lo sbilanciamento medio delle stazioni rispetto al carico massimo teorico. Determinare quindi il massimo tasso di produzione ottenibile con la soluzione trovata e, in questa situazione operativa, il tempo di attraversamento a regime dell'intera linea da parte di un componente inizialmente grezzo e i tempi morti di ogni stazione.

Lavorazioni	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
T_i	6	7	2	5	8	1	8	7	5	3	2

Tabella 2: Tempi di esecuzione T_i (in minuti) delle singole lavorazioni.

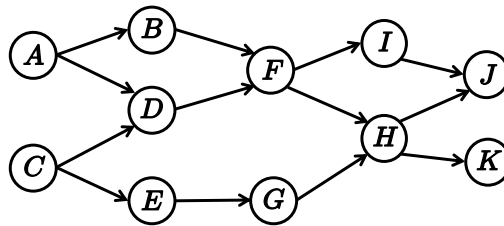


Figura 2: Grafo delle precedenze tra le lavorazioni da svolgersi sul componente meccanico.

Esercizio 3

La rete di Petri in Fig. 3 rappresenta un sistema manifatturiero flessibile con due ricette di produzione che richiedono le sequenze di operazioni indicate con l'uso di due risorse condivise¹.

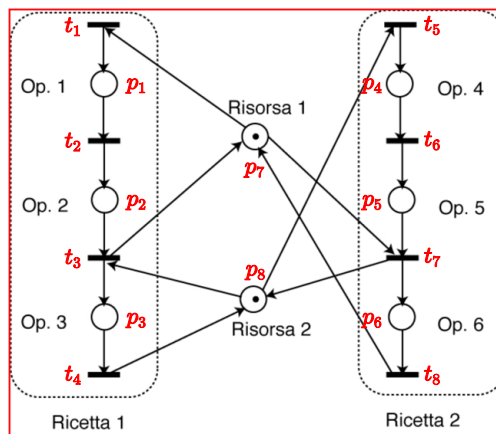


Figura 3: Un FMS con due ricette di lavorazione che usano due risorse condivise.

¹Questo esempio di modellistica è stato trattato anche a lezione!

Studiare l'evoluzione della rete e le sue proprietà strutturali (conservatività, limitatezza, reversibilità, vivezza, possibilità di deadlock), determinando anche l'insieme di tutte le marcature raggiungibili dalla marcatura iniziale $\mathbf{x}_0 = (000\ 000\ 11)$ assegnata. Progettare quindi un supervisore che permetta l'esecuzione in sequenza e ciclica delle ricette secondo la regola "prima la ricetta 1, poi la ricetta 2" e così via, senza incorrere in situazioni di deadlock. Definire un secondo supervisore che realizzi invece la regola sequenziale "due volte la ricetta 1, poi una volta la ricetta 2" e così via.

Esercizio 4

Si consideri il sistema di movimentazione di un carico descritto dalle funzioni di trasferimento nel diagramma a blocchi di Fig. 4. In ingresso al sistema, accanto al comando di controllo u , è presente anche un disturbo d costante ma di intensità incognita. Si hanno a disposizione le misure della posizione p e della velocità v del carico. Si progetti un sistema di regolazione della posizione del carico al valore p_d basato su due anelli di controllo in cascata, con feedback dalle due misure e opportuna separazione dinamica in frequenza tra anello interno di velocità e anello esterno di posizione. A regime permanente, il disturbo non deve avere effetto sull'uscita controllata (astatismo). La banda passante dell'anello interno di velocità deve essere pari a circa 10 rad/s. Le leggi di controllo da utilizzare nei due anelli sono nella forma generale di regolatori PID (o loro sotto-casi), con struttura e guadagni scelti in base alle specifiche richieste. Disegnare il diagramma a blocchi del sistema di controllo complessivo così progettato. Ricavare l'espressione della versione discretizzata $u_k = u(kT_c)$ della legge di controllo u , che usa quindi i campioni $\{p_j\}$ e $\{v_j\}$ delle misure (per $j = 0, 1, \dots, k$), nonché il valore di un adeguato intervallo di campionamento $T_c > 0$.

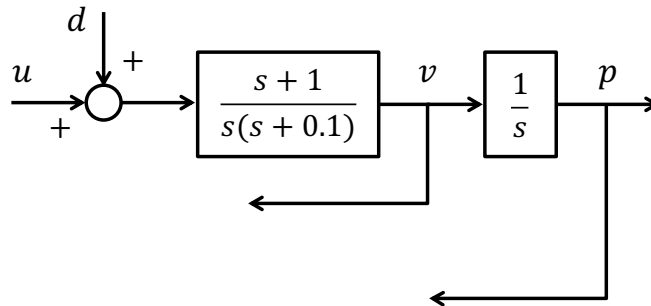


Figura 4: Il sistema di movimentazione di un carico di cui si vuole controllare la posizione con uno schema in cascata, usando misure di posizione e velocità e in presenza di un disturbo costante.

Esercizio 5

Discutere brevemente aspetti, vantaggi e svantaggi delle possibili organizzazioni dei processi produttivi manifatturieri: per linee di trasferta, per flussi (flow shop), per reparti (job shop) e per celle flessibili (FMC).

[180 minuti; libri aperti]

Soluzione

18 gennaio 2021

Esercizio 1

Una possibile soluzione è quella di collocare 3 semafori (SEM1-3) e 3 sensori di posizione (POS1-3) nelle due zone di carico (A e B) e nella zona di scarico, come nello schema di Fig. 5.

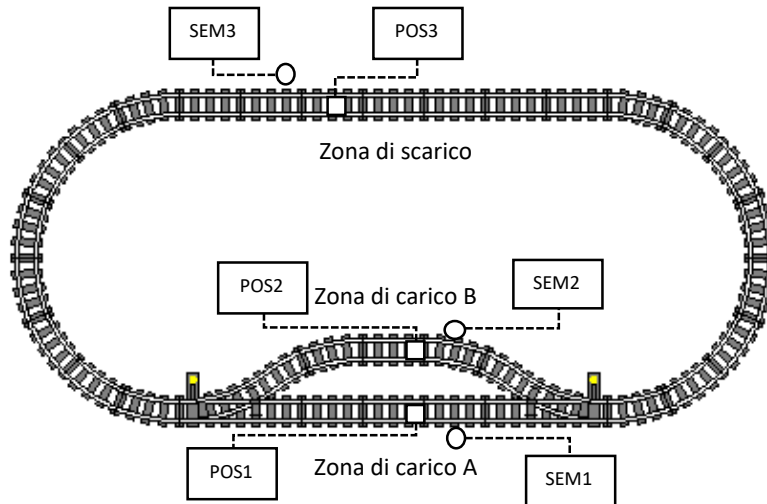


Figura 5: Collocazione di semafori e sensori di posizione nell'impianto ferroviario di Fig. 1.

Il diagramma SFC che implementa la logica del sistema di controllo è mostrato in Fig. 6.

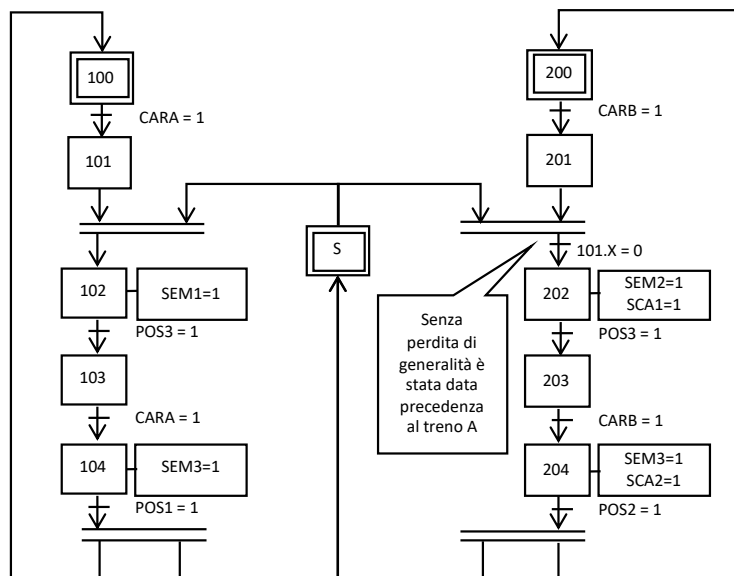


Figura 6: Diagramma SFC del sistema di controllo.

Il diagramma SFC può essere così interpretato:

- la sequenza a sinistra rappresenta il treno A (avente stato iniziale 100), la sequenza a destra il treno B (avente stato iniziale 200), mentre lo stato semaforico S gestisce la zona di scarico che è mutuamente esclusiva (e quindi fa parte dello stato iniziale); senza perdita di generalità si analizza la sequenza del treno A;
- il treno A attende di essere caricato e quando $CARA = 1$ transita nello stato 101;
- il treno A può passare nello stato successivo solo se lo stato semaforico è attivo (grazie alla sincronizzazione), ovvero se la zona di scarico è libera;
- nello stato 102 il semaforo SEM1 diventa verde e rimane tale fino a quando il treno non raggiunge la posizione di scarico ($POS3 = 1$); notare che di default $SCA1 = 0$, quindi lo scambio 1 è a favore del transito del treno A;
- il treno A permane nella zona di carico fino a quando $CARA = 1$
- nello stato 104 il treno A può muoversi in quanto il semaforo è verde ($SEM3 = 1$) e rimarrà in tale stato fino a quando non raggiunge la zona di carico ($POS1 = 1$), alla quale arriverà in quanto lo scambio 2 è a favore del transito del treno A, dove poi si fermerà in quanto il semaforo SEM1 (di default = 0) è rosso;
- quando il treno A raggiunge la zona di carico, ha sicuramente liberato la zona di scarico e quindi lo stato semaforico può essere riattivato (grazie al parallelismo);
- arrivato nella zona di carico, il treno A sarà vuoto e pronto ad iniziare un nuovo ciclo; pertanto si ritrova nello stato iniziale 100.

Analoghe considerazioni possono essere fatte per il treno B, con le seguenti osservazioni aggiuntive:

- negli stati 202 e 204, il treno B necessita che gli scambi siano a favore del suo transito e quindi che i relativi attuatori siano posti =1;
- senza perdita di generalità, nel caso in cui entrambi i treni siano carichi e pronti ad accedere alla zona di carico, si dà precedenza al treno A.

Esercizio 2

Dal minimo tasso di produzione desiderato, $TP = 80$ pezzi al giorno, essendo la durata di un giorno a ciclo continuo pari a $24 \times 60 = 1440$ minuti, si ha che il carico massimo teorico di una generica stazione della linea di trasferta è $CMT = 1/TP = 18$ minuti/pezzo. Il tempo totale di lavorazione T e il minimo numero teorico N^* di stazioni necessarie si calcolano dalla Tab. 2 e da CMT come

$$T = \sum_{i=A,\dots,K} T_i = 54 \text{ [min]}, \quad N^* = \left\lceil \frac{T}{CMT} \right\rceil = \left\lceil \frac{54}{18} \right\rceil = 3.$$

Per risolvere il problema di dimensionamento della linea di trasferta sincrona, si applica l'euristica RPWT (Ranked Positional Weight Technique). Nella Tab. 3 sono riportati a tal fine gli insiemi S_i delle lavorazioni che sono (necessariamente) successive a ciascuna lavorazione e i relativi pesi posizionali $PW_i = T_i + \sum_{j \in S_i} T_j$. Si ordinano quindi le lavorazioni in una lista in ordine decrescente di peso posizionale:

$$\text{lista ordinata} = \{C, A, E, B, D, G, F, H, I, J, K\}.$$

Si caricherà quindi la prima stazione con le lavorazioni in cima alla lista fino a quando la successiva lavorazione non ecceda la capienza massima teorica. In questo caso, si attiva una nuova stazione nella quale si carica tale lavorazione e si procede in modo simile fino all'assegnazione dell'ultima

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
T_i	6	7	2	5	8	1	8	7	5	3	2
S_i	{B, D, F, H, ..., K}	{F, H, I, J, K}	{D, E, F, ..., K}	{F, H, I, J, K}	{G, H, J, K}	{H, I, J, K}	{H, {J, K}}	J	-	-	
PW_i	36	25	41	23	28	18	20	12	8	3	2

Tabella 3: Tempi T_i , insiemi S_i delle lavorazioni successive e pesi posizionali PW_i .

lavorazione nella lista. La soluzione è illustrata in Fig. 7 e richiede $N = 4$ stazioni, una più del minimo teorico, con rispettivi carichi delle stazioni

$$C_1 = 16, \quad C_2 = 12, \quad C_3 = 16, \quad C_4 = 10 \quad [\text{min}].$$

Ovviamente si ha che $\sum_{i=1}^N C_i = T = 54$. Le quattro stazioni hanno uno sbilanciamento medio rispetto al carico massimo teorico

$$\frac{\sum_{i=1}^N (CMT - C_i)}{N} = CMT - \frac{\sum_{i=1}^N C_i}{N} = CMT - \frac{T}{N} = 18 - \frac{54}{4} = 18 - 13.5 = 4.5 \quad [\text{min}],$$

pari al 25% di CMT . Posto infine $C = \max_{i=1, \dots, N} C_i = 16$, si deducono le grandezze

$$\text{massimo tasso di produzione} = \frac{1}{C} = \frac{1}{16} = 0.0625 \text{ pezzi/min} = 90 \text{ pezzi/giorno},$$

$$\text{tempo di attraversamento della linea} = N \times C = 4 \times 16 = 64 \quad [\text{min}],$$

e i tempi morti $T_{m,i} = C - C_i$ di ciascuna stazione associati alla soluzione:

$$T_{m,1} = 0, \quad T_{m,2} = 4, \quad T_{m,3} = 0, \quad T_{m,4} = 6 \quad [\text{min}].$$

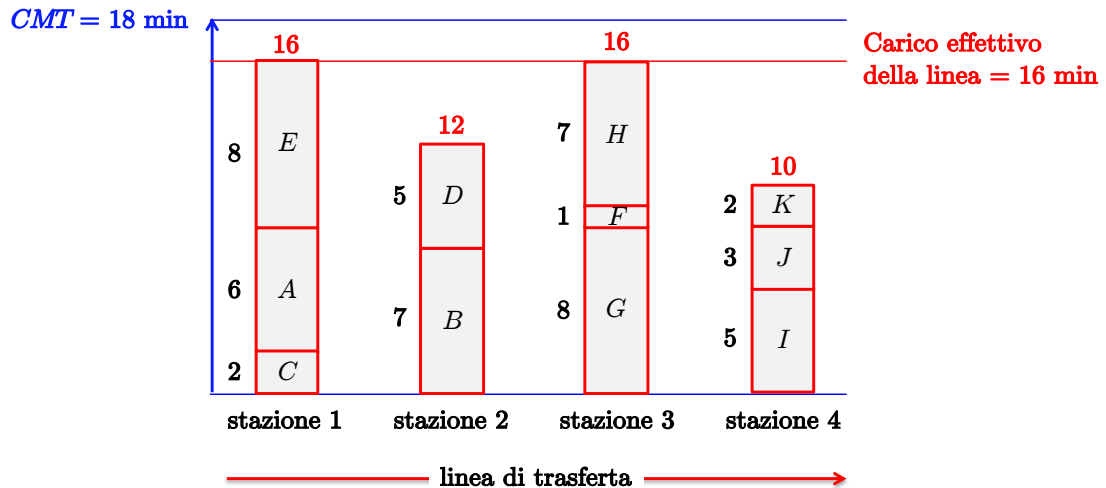


Figura 7: Caricamento delle stazioni della linea di trasferta con le lavorazioni.

Esercizio 3

La rete di Fig. 3 è una rete di Petri ordinaria (con archi di peso unitario), ma non di tipo particolare. La sua matrice di incidenza quadrata (8×8) e la marcatura iniziale sono

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

È facile verificare (ad esempio con Matlab) che il rango di C è pari a 6. Pertanto sia lo spazio nullo di C sia quello di C^T avranno dimensione pari a 2. Il calcolo dei P-invarianti (soluzioni non banali, intere e non negative di $C^T \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$) fornisce i due vettori indipendenti

$$\boldsymbol{\gamma}_1^T = (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0), \quad \boldsymbol{\gamma}_2^T = (0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1),$$

che sono canonici e a supporto minimo. Esistono quindi due insiemi di posti in cui il numero totale di token si conserva durante l'evoluzione della rete: $\{p_1, p_2, p_6, p_7\}$ e $\{p_3, p_4, p_5, p_8\}$. In entrambi i casi, questo numero è quello presente nella marcatura iniziale: $\boldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\gamma}_2^T \mathbf{x}_0 = 1$. I posti della rete sono tutti ricoperti dagli insiemi di supporto dei due P-invarianti, quindi la rete è certamente limitata (è k -limitata, con $k = 2$, la somma dei token presenti nei due cicli conservativi che non si intersecano). Il calcolo dei T-invarianti (soluzioni non banali, intere e non negative di $C\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$) fornisce i due vettori indipendenti

$$\boldsymbol{\eta}_1 = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)^T.$$

Come condizione necessaria di reversibilità, si ha quindi che le transizioni nell'insieme $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ e/o nell'insieme $\{t_5, t_6, t_7, t_8\}$ debbano scattare un numero di volte pari tra loro (una o più). L'insieme delle marcature raggiungibili (in numero finito) e la possibile presenza di marcature di deadlock (che negherebbero quindi l'esistenza di transizioni vive e la reversibilità della rete) si deducono dall'albero di raggiungibilità. In Fig. 8, sono riportate le prime fasi della costruzione di tale albero. L'albero viene costruito esplorando i rami in profondità (depth-first) e operando una scelta lessicografica delle transizioni abilitate dal nodo corrente (si segue t_i prima di t_j , se $i < j$). In questa parte dell'albero si generano come foglie sia la marcatura iniziale \mathbf{x}_0 , sia la marcatura di deadlock \mathbf{x}_7 . Quando i due token si trovano nei posti p_2 e p_5 , la rete si blocca definitivamente. La Fig. 9 riporta il completamento del ramo di sinistra (con 9 marcature, oltre \mathbf{x}_0) e l'intera parte destra dell'albero di raggiungibilità (con altre 5 marcature, oltre \mathbf{x}_0). Anche in questa parte, la marcatura iniziale \mathbf{x}_0 è tra le foglie, ma non quella di deadlock \mathbf{x}_7 . L'insieme delle marcature raggiungibili $RN(\mathbf{x}_0)$ ha pertanto cardinalità 15 ed è dato da:

$$RN(\mathbf{x}_0) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

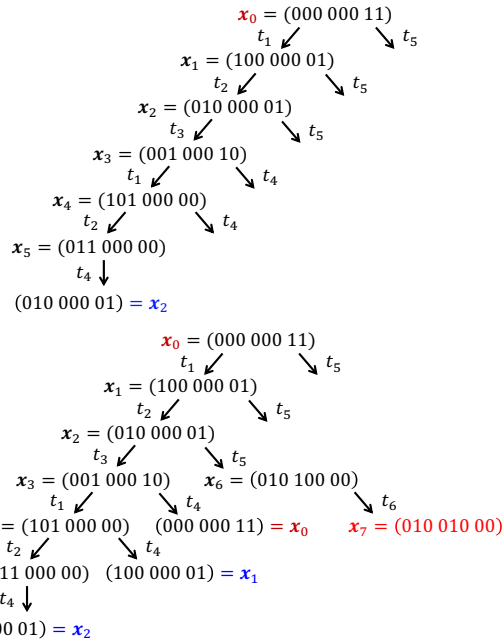


Figura 8: Prime fasi della costruzione dell'albero di raggiungibilità della rete di Petri di Fig. 3: **[in alto]** esplorazione in profondità, fino al raggiungimento della prima foglia; **[in basso]** esplorazione (in risaltata) dei rami aperti di sinistra, fino alla generazione della marcatura di deadlock x_7 .

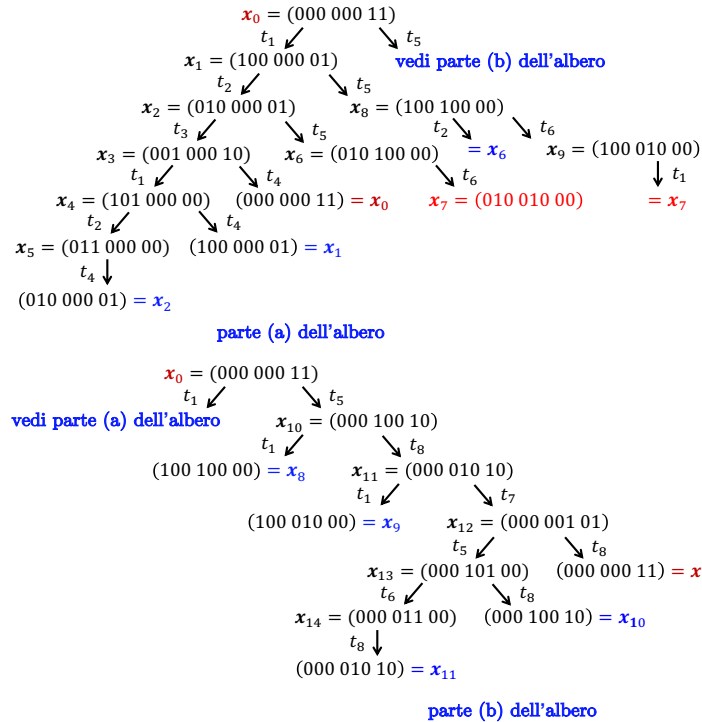


Figura 9: Albero di raggiungibilità della rete di Petri di Fig. 3: **[in alto]** completamento dell'esplorazione del ramo principale di sinistra dell'albero —parte (a); **[in basso]** esplorazione in profondità del ramo principale di destra dell'albero —parte (b).

I due supervisori richiesti devono escludere entrambi l'evenienza di un blocco della rete. Inoltre le evoluzioni che devono abilitare rendono l'intera rete viva, mantenendo la reversibilità della marcatura iniziale. Per il loro progetto si può far riferimento a una semplice coppia di posti monitor che svolgono la funzione di semaforo (con cicli diversi). La Fig. 10 mostra la soluzione (parti in blu) che realizza la regola ciclica di perfetta alternanza tra ricetta 1 e ricetta 2, utilizzando due posti monitor e un solo token aggiuntivo. E' facile verificare che l'unica sequenza ammissibile di scatti è $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_3 \rightarrow t_4 \rightarrow t_5 \rightarrow t_6 \rightarrow t_7 \rightarrow t_8$, quando si ritrova la stessa marcatura iniziale estesa (ossia, anche quella supervisore). Il supervisore in Fig. 11 realizza invece la seconda regola ciclica, con la ricetta 1 attivata due volte per prima, seguita poi dalla ricetta 2 e così via. In questo caso si usano due token nel primo posto monitor e un arco di peso 2 per l'attivazione della seconda ricetta a partire dal secondo posto monitor.

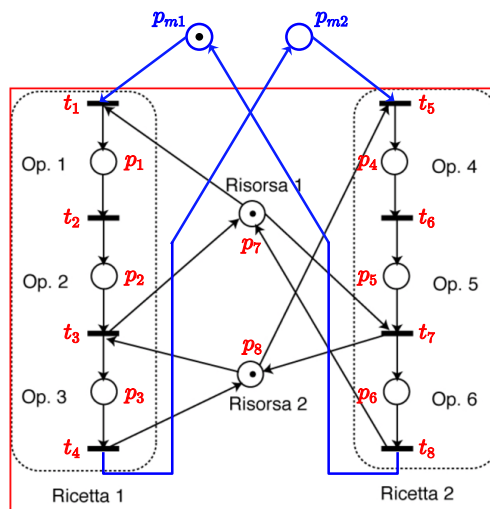


Figura 10: Supervisore con due posti monitor e un token iniziale che realizza la prima regola sequenziale: "prima la ricetta 1, dopo la ricetta 2".

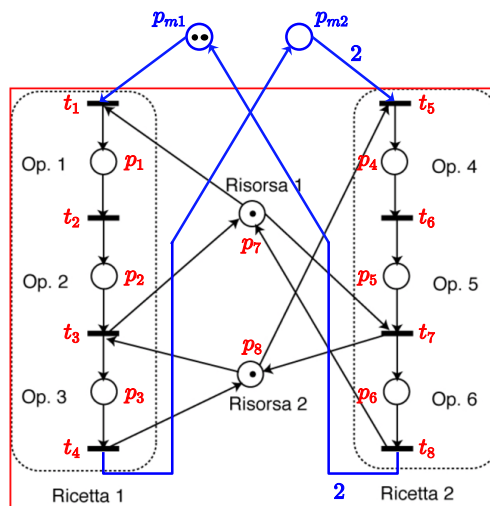


Figura 11: Supervisore con due posti monitor, due token iniziali e due archi con peso 2 che realizza la seconda regola sequenziale: "due volte la ricetta 1, poi una volta la ricetta 2".

Esercizio 4

Con riferimento alla Fig. 12, il progetto del controllore in cascata richiesto procede in due passi. Si assume inizialmente che l'anello interno sia ideale, ossia che la velocità del carico segua esattamente quella di riferimento ($v = v_r$). L'anello esterno deve stabilizzare l'errore di posizione $e_p = p_d - p$, con l'uscita controllata p che è semplicemente l'integrale del comando v_r . A tal fine, è sufficiente un controllore proporzionale $v_r = K e_p$, con $K > 0$. Nel dominio di Laplace, si ha in formule²:

$$P_2(s) = \frac{p(s)}{v(s)} = \frac{1}{s}, \quad C_2(s) = K, \quad F_2(s) = P_2(s) C_2(s) = \frac{K}{s}$$

$$\Rightarrow W_2(s) = \frac{p(s)}{p_d(s)} = \frac{F_2(s)}{1 + F_2(s)} = \frac{K}{s + K} = \frac{1}{1 + (1/K)s}.$$

Essendo il sistema W_2 ad anello chiuso idealmente del primo ordine e senza zeri, la sua banda passante (a -3 dB) è semplicemente $B_{-3,p} = K$. Pertanto, dovendo soddisfare il vincolo di separazione dinamica di una decade in frequenza rispetto alla banda passante più ampia dell'anello interno, che ha la specifica $B_{-3,v} = 10$ [rad/s], si potrà (come massimo valore) $K = B_{-3,p} = 1$.

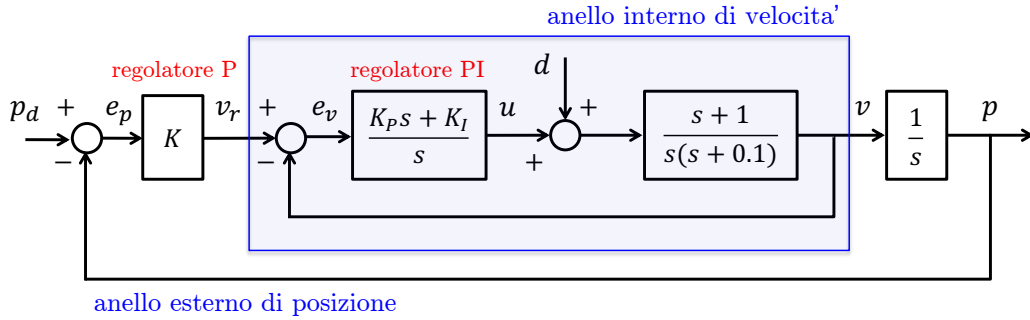


Figura 12: Schema a blocchi del controllo in cascata, con un regolatore PI interno e uno P esterno.

Per il progetto del controllore nell'anello interno, si considera anzitutto la presenza del disturbo costante d . Non essendoci in catena diretta nessuna azione integrale a monte del punto di accesso del disturbo, per ottenere astatismo occorre introdurre un'azione integrale nel controllore. Si opta quindi per un regolatore PI, con il guadagno proporzionale presente per garantire la prontezza di risposta (alias, una banda passante) desiderata. Nel dominio di Laplace, si ha

$$P_1(s) = \frac{v(s)}{u(s)} = \frac{s + 1}{s(s + 0.1)}, \quad C_1(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s} = \frac{K_P (s + (K_I/K_P))}{s}.$$

Una scelta conveniente di progetto è utilizzare lo zero del regolatore PI (posto in $-K_I/K_P < 0$) per cancellare il polo stabile del processo (posto in -0.1), che risulta particolarmente lento (di due ordini di grandezza rispetto alla banda passante desiderata). Posto quindi

$$\frac{K_I}{K_P} = 0.1 \quad \Rightarrow \quad K_I = 0.1 K_P,$$

si avrà per l'anello interno

$$F_1(s) = P_1(s) C_1(s) = \frac{K_P (s + 1)}{s^2} \Rightarrow W_1(s) = \frac{v(s)}{v_r(s)} = \frac{F_1(s)}{1 + F_1(s)} = \frac{K_P (s + 1)}{s^2 + K_P s + K_P} = \frac{1 + s}{1 + s + \frac{s^2}{K_P}}.$$

²Si usa il pedice 2 per indicare i blocchi nell'anello esterno, quando quello interno è assunto ideale. Si userà poi il pedice 1 per le grandezze dell'anello interno, nell'ambito del progetto del relativo controllore.

La scelta $K_P = 10$ fornisce con buona approssimazione la banda passante desiderata ($B_{-3,v} = 10$) per l'anello interno, come si può verificare anche dai diagrammi di Bode della risposta armonica di $W_1(s)$ riportati in Fig. 13: ai quattro valori $K_P = 0.1, 1, 10$ e 100 , corrispondono³ rispettivamente $B_{-3,v} \approx 0.5, 1.8, 11$ e 102 [rad/s]. Il regolatore PI dell'anello interno avrà quindi guadagni $K_P = 10$ e $K_I = 1$. In Fig. 14 è mostrata la risposta della velocità v del carico a un ingresso v_r a gradino unitario, quando si usa nell'anello interno il regolatore PI così progettato (qui il disturbo è $d = 0$).

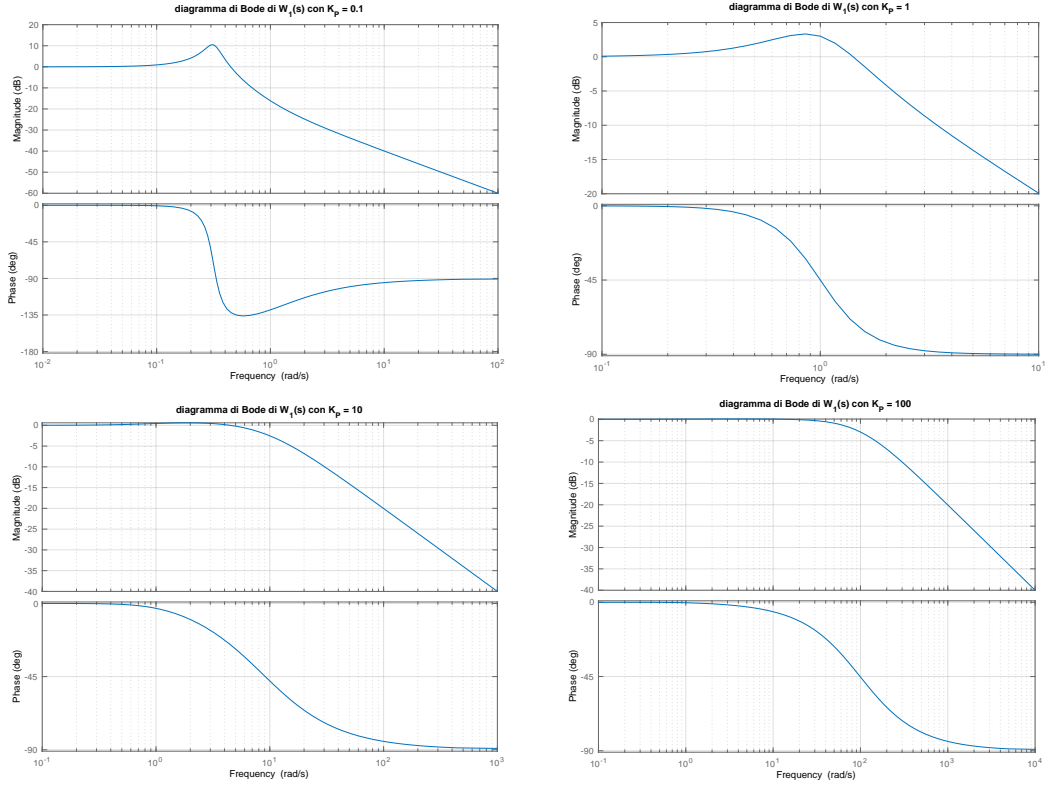


Figura 13: Diagrammi di Bode di $W_1(s)$, al variare del guadagno $K_P = \{0.1, 1, 10, 100\}$.

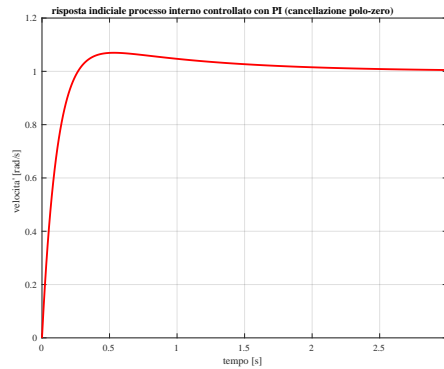


Figura 14: Risposta indiciale della velocità del carico nell'anello interno con il regolatore PI scelto.

³Dall'espressione della $W_1(s)$ segue agevolmente che $\lim_{K_P \rightarrow \infty} B_{-3,v} = K_P$. Questa approssimazione si può considerare valida anche per valori molto più bassi del guadagno proporzionale, come già nel caso di $K_P = 10$.

Nella Fig. 15 si riportano diversi andamenti della posizione p del carico del sistema complessivo così controllato in risposta a un variazione a gradino di ampiezza unitaria del riferimento p_d . I tracciati in rosso sono relativi al sistema reale controllato dalla cascata di regolatori PI e P, mentre quelli in blu sono gli andamenti nel caso ideale in cui nell'anello interno si assume comunque che sia $v = v_r$ (di fatto si mostra l'azione sull'integratore $\dot{p} = v$ del solo regolatore proporzionale dell'anello esterno). Quando si usa il valore corretto $K = 1$, i due grafici della figura di sinistra si sovrappongono come atteso. Per meglio comprendere le limitazioni del progetto in cascata, nella figura di destra si riportano le risposte quando il guadagno del regolatore P esterno è aumentato a $K = 10$, presumibilmente per migliorare la prontezza di risposta complessiva. In questo modo però l'anello esterno va ad interagire nella banda dinamica dell'anello interno, in contrasto con l'ipotesi di separazione adottata nel progetto. Come si può vedere, la risposta effettiva (sebbene molto più rapida del caso precedente) è molto diversa da quella attesa nel caso ideale. Il particolare, l'uscita controllata ha ora una sovraelongazione del 20% del tutto assente altrimenti.

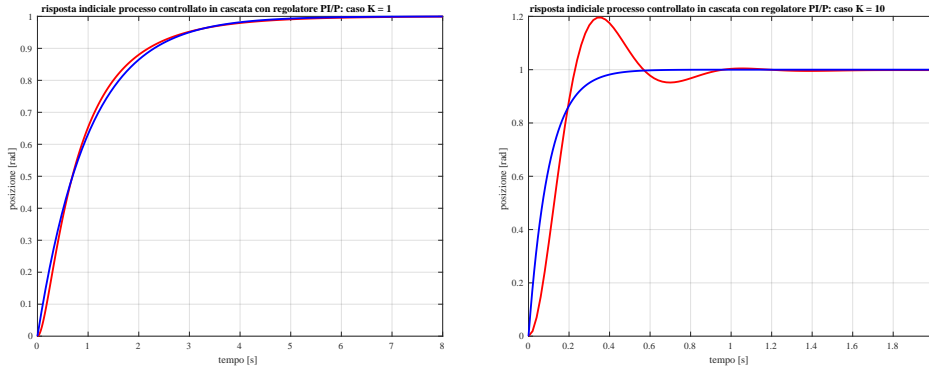


Figura 15: Confronto tra le risposte indicali della posizione del carico nell'effettivo sistema controllato in cascata (in rosso) e quando invece si assume un anello interno sempre ideale (in blu): [a sinistra] guadagno $K = 1$ del regolatore esterno (scelta corretta, con separazione dinamica); [a destra] guadagno $K = 10$ del regolatore esterno (scelta errata, con interazione dinamica).

Ricapitolando, la legge di controllo complessiva (nel dominio del tempo continuo) è data da

$$u(t) = K_P e_v(t) + K_I \int_0^t e_v(\tau) d\tau, \quad e_v(t) = v_r(t) - v(t), \quad v_r(t) = K e_p(t), \quad e_p(t) = p_d - p(t). \quad (1)$$

Una discretizzazione delle relazioni (1) con passo di campionamento T_c , indicando il campione k -esimo del generico segnale $x(t)$ come $x_k = x(kT_c)$, risulta essere

$$u_k = K_P (K(p_d - p_k) - v_k) + u_{i,k}, \quad u_{i,k} = u_{i,k-1} + K_I T_c (K(p_d - p_k) - v_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

con $u_{i,-1} = 0$, dove si è utilizzata la formula di integrazione rettangolare in avanti (o di Eulero a sinistra). Per la scelta di T_c si deve considerare che la massima pulsazione angolare in gioco è pari alla banda passante dell'anello interno, $\omega_M = B_{-3,v}$, dove infatti si campiona la misura della velocità $v(t)$ per ottenere la v_k da usare nella formula (2). Una scelta opportuna sarà allora

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T_c} \geq 10 B_{-3,v} = 100 \text{ [rad/s]} \quad \Rightarrow \quad T_c \leq \frac{2\pi}{10 B_{-3,v}} \simeq 0.06 \text{ [s]}.$$

Esercizio 5

Questo esercizio ha risposte libere.
