SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Fondamenti di Data Processing

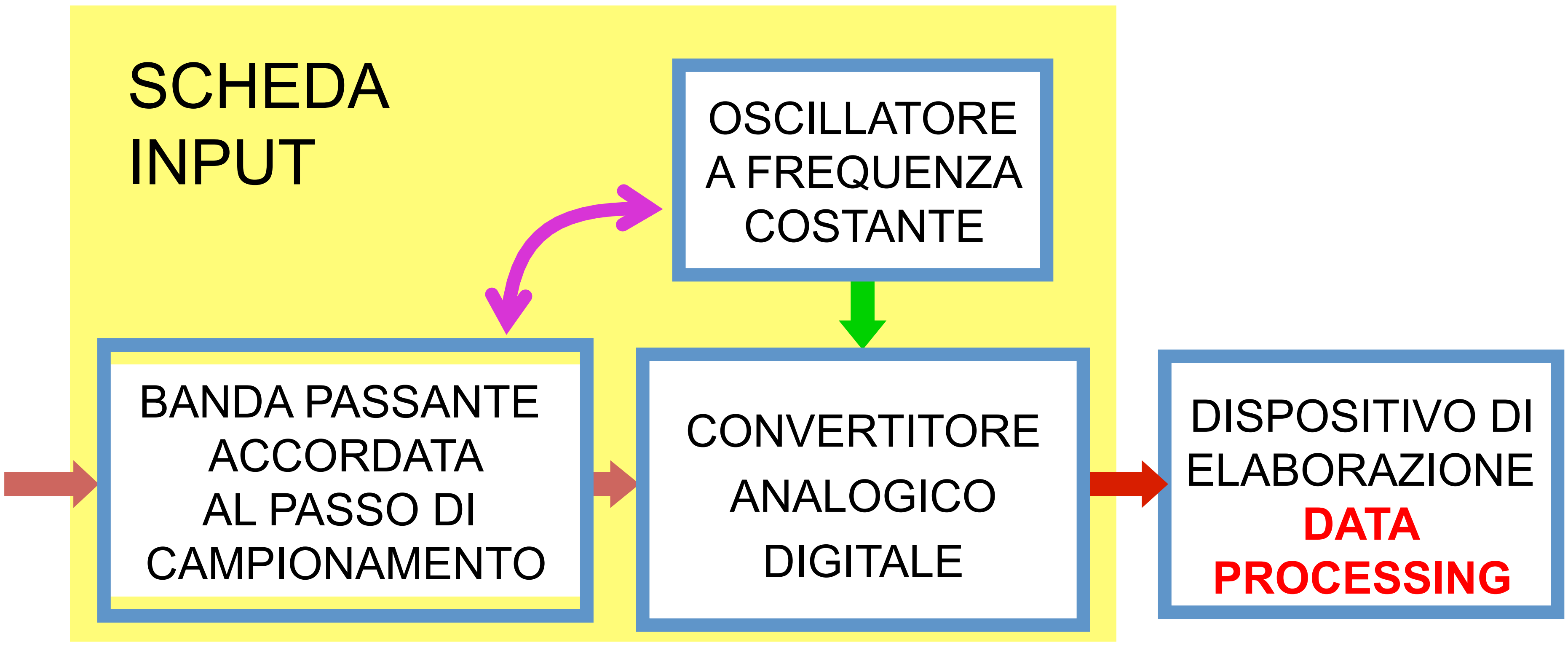
Automazione

Vincenzo Suraci

INTRODUZIONE
AL DATA PROCESSING

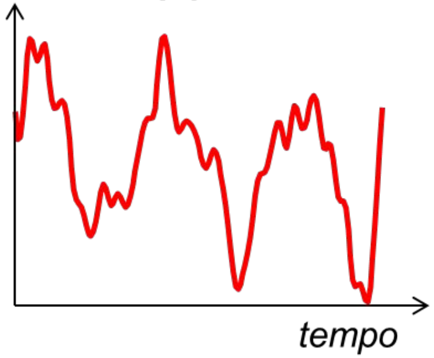
ACQUISIZIONE DATI

SCHEMA COSTRUTTIVO

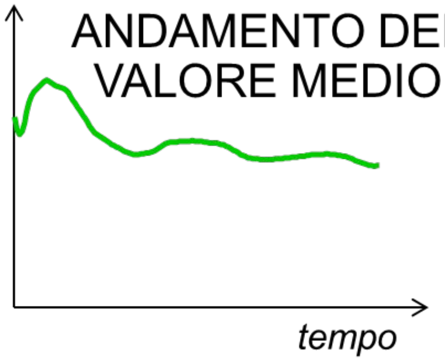


SEGNALE ANALOGICO SEGNALE DIGITALE

VARIABILE MISURATA

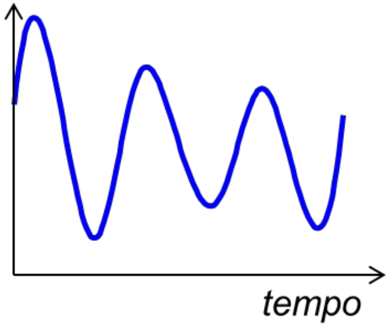


ANDAMENTO DEL VALORE MEDIO



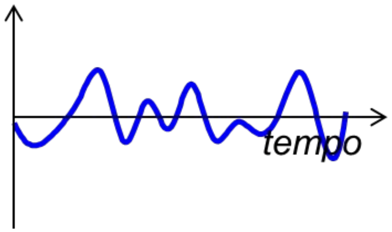
UTILE AL FINE DELLA CARATTERIZZAZIONE DEL **FUNZIONAMENTO**

SEGNALE UTILE



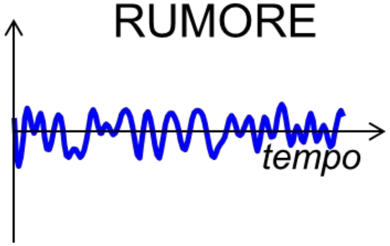
CONTIENE INFORMAZIONI UTILI PER VALUTARE L'AZIONE DI CONTROLLO O L'EFFETTO DELL'AZIONE DI **CONTROLLO**

DISTURBO



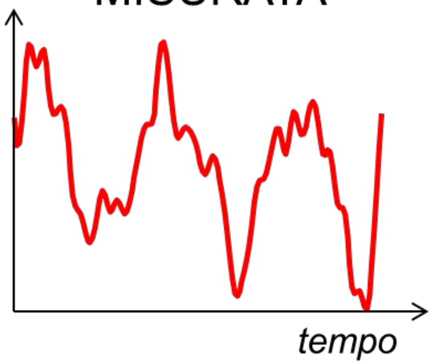
POTREBBE CONTENERE INFORMAZIONI UTILIZZABILI PER LA GESTIONE O PER LA **DIAGNOSTICA**

RUMORE

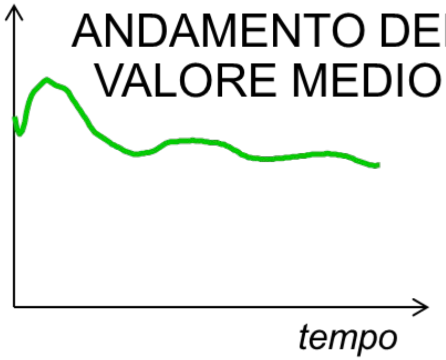


IN GENERE **NON CONTIENE INFORMAZIONI UTILI**

VARIABILE MISURATA

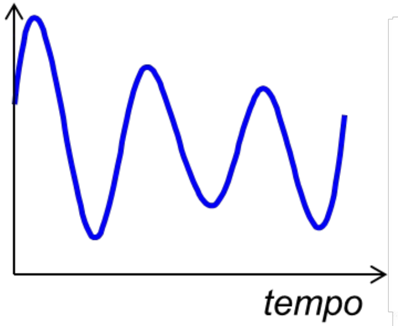


ANDAMENTO DEL VALORE MEDIO

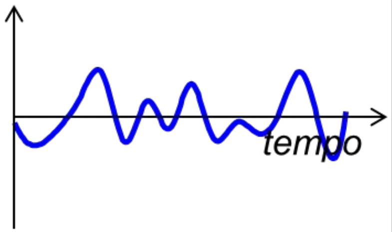


UTILE AL FINE DELLA CARATTERIZZAZIONE DEL **FUNZIONAMENTO**

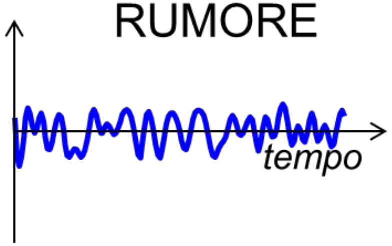
SEGNALE UTILE



DISTURBO



RUMORE



AD ESEMPIO

ANDAMENTO DELLA **VARIABILE DI COMANDO** ELABORATA DA UN REGOLATORE NEL CONTROLLO A LIVELLO DI CAMPO

VARIAZIONE DELLA PRESSIONE O DELLA PORTATA DOVUTA ALLE OSCILLAZIONI DELL'OTTURATORE DI UNA SERVOVALVOLA

APPROSSIMAZIONE DOVUTA ALLA **DIGITALIZZAZIONE** DI UN SEGNALE ANALOGICO

SEGNALE ANALOGICO

CAMPIONAMENTO E QUANTIZZAZIONE

ELABORAZIONI ON-LINE

DATI ACQUISITI

PASSO DI ACQUISIZIONE

STIMA DEL VALORE MEDIO

SEGNALE UTILE

RUMORE E/O DISTURBO

STIMA DELLA DERIVATA PRIMA

STIMA DELLA DERIVATA SECONDA

SCELTA DEL PASSO DI ACQUISIZIONE

SE **TROPPO FITTO** VIENE ESALTATO IL **RUMORE DI DIGITALIZZAZIONE**

SE **TROPPO RADO** VENGONO **PERSE LE INFOMAZIONI** CONTENUTE NEL SEGNALE UTILE

CALCOLO DEL VALORE MEDIO

METODO OFF-LINE

MEDIA ARITMETICA

- Il calcolo della **MEDIA ARITMETICA** di un insieme di dati è una operazione **a posteriori**, ossia che può venire effettuata solo dopo che sono **disponibili tutti i dati** di cui si vuole calcolare il valore medio

- L'espressione analitica risulta:

$$\boxed{X(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

MEDIA ARITMETICA

MEDIA ARITMETICA

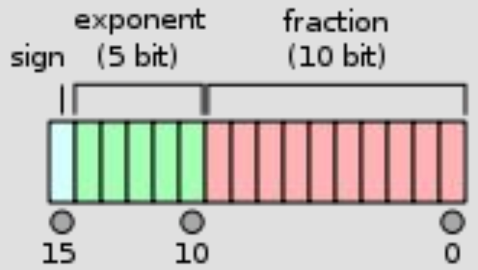
- Se per il calcolo della media aritmetica si usa un **dispositivo di calcolo numerico** bisogna tenere conto della lunghezza di parola finita (8-64 bit);
- Il valore della **sommatoria** può assumere valori troppo elevati (**overflow**) per essere rappresentato con la lunghezza di parola del dispositivo di calcolo.
- Il valore del **termine 1/n** può assumere valori troppo piccoli (**underflow**) per essere compatibile con la lunghezza di parola.

$$X(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

OVER-FLOW

UNDER-FLOW

ESEMPIO HALF 16-bit

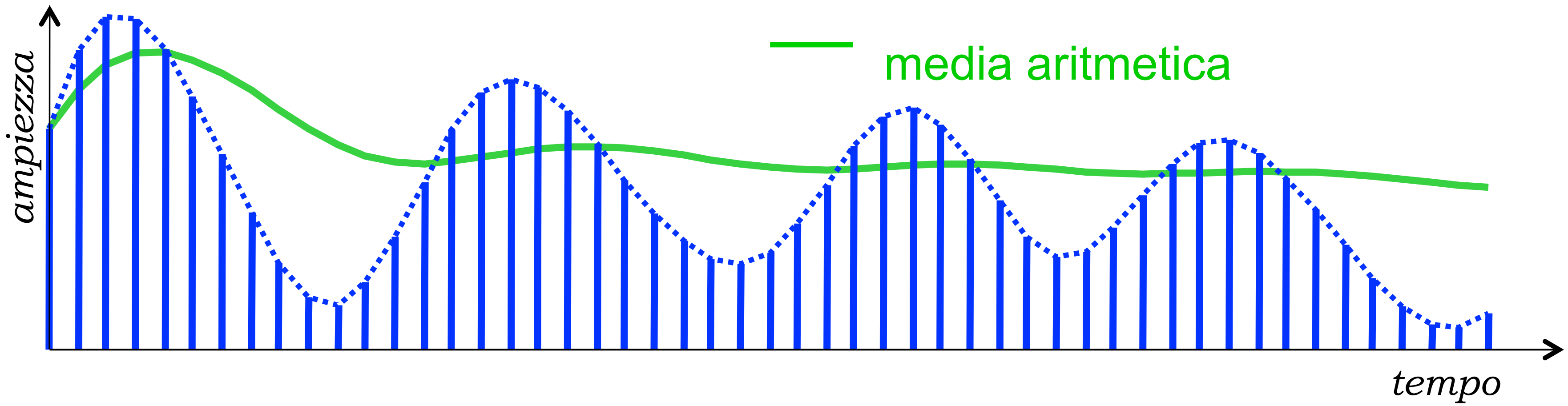


Underflow = 5.96×10^{-8}
Overflow = 65504

CALCOLO DEL VALORE MEDIO

METODO ON-LINE

COME CALCOLARE L'ANDAMENTO DEL VALORE MEDIO ?



La media aritmetica può essere calcolata solo per un numero limitato (n) di valori campionati.

Interessa allora effettuare una **stima ricorsiva** calcolando la media:

- su un numero prefissato di valori digitalizzati, **media mobile**
- aggiornandone il valore ad ogni passo, **media pesata**
- minimizzando ad ogni passo la varianza dell'errore di stima, **media adattativa**

MEDIA MOBILE

- Il metodo più semplice e intuitivo per **risolvere il problema dell'overflow e dell'underflow** consiste nel **limitare a k il numero degli elementi utilizzati** per il calcolo del valore medio. In questo modo *n* può essere grande a piacere.

- L'espressione analitica della media mobile al passo *j* risulta:

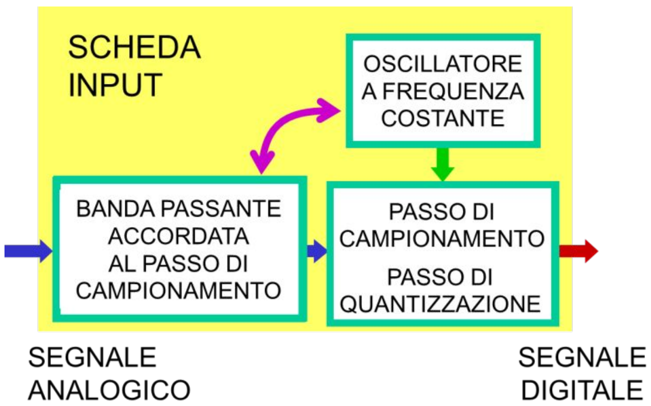
$$\boxed{X(j) = \frac{1}{k} \sum_{i=j}^{j+k-1} x_i}$$

$$\boxed{1 \leq \mathrm{j} \leq n - k + 1}$$

MEDIA MOBILE

MEDIA MOBILE

- Il **valore di k** dati e la **durata del transitorio di algoritmo** dipendono dalle caratteristiche statistiche dei dati. In particolare dipendono dalla **varianza**.
- A regime la media mobile presenta una **dispersione di ampiezza limitata** e con **andamento di tipo periodico**.
- Tale approccio richiede una **occupazione di memoria di k dati** su cui viene calcolata in forma ricorsiva la media mobile.



REGISTRO DI MEMORIA DI k VALORI

x_k	x_{k-1}	$\dots$	x_1	PASSO 1
x_{k+1}	x_k	$\dots$	x_2	PASSO 2
....				
x_n	x_{n-1}	$\dots$	x_{n-k+1}	PASSO *n-k+1*

STIMA DEL VALORE MEDIO

METODO ON-LINE
RICORSIVO

MEDIA PESATA

- Per **risolvere il problema dell'occupazione di memoria** si può stimare la media al passo attuale *j* conoscendo il valore della media stimato al passo precedente (*j*-1).

- L'espressione analitica della media pesata al passo *j* risulta:

$$\boxed{\hat{X}(j) = \hat{X}(j-1) + \alpha\,(\,x(j) - \hat{X}(j-1))}$$

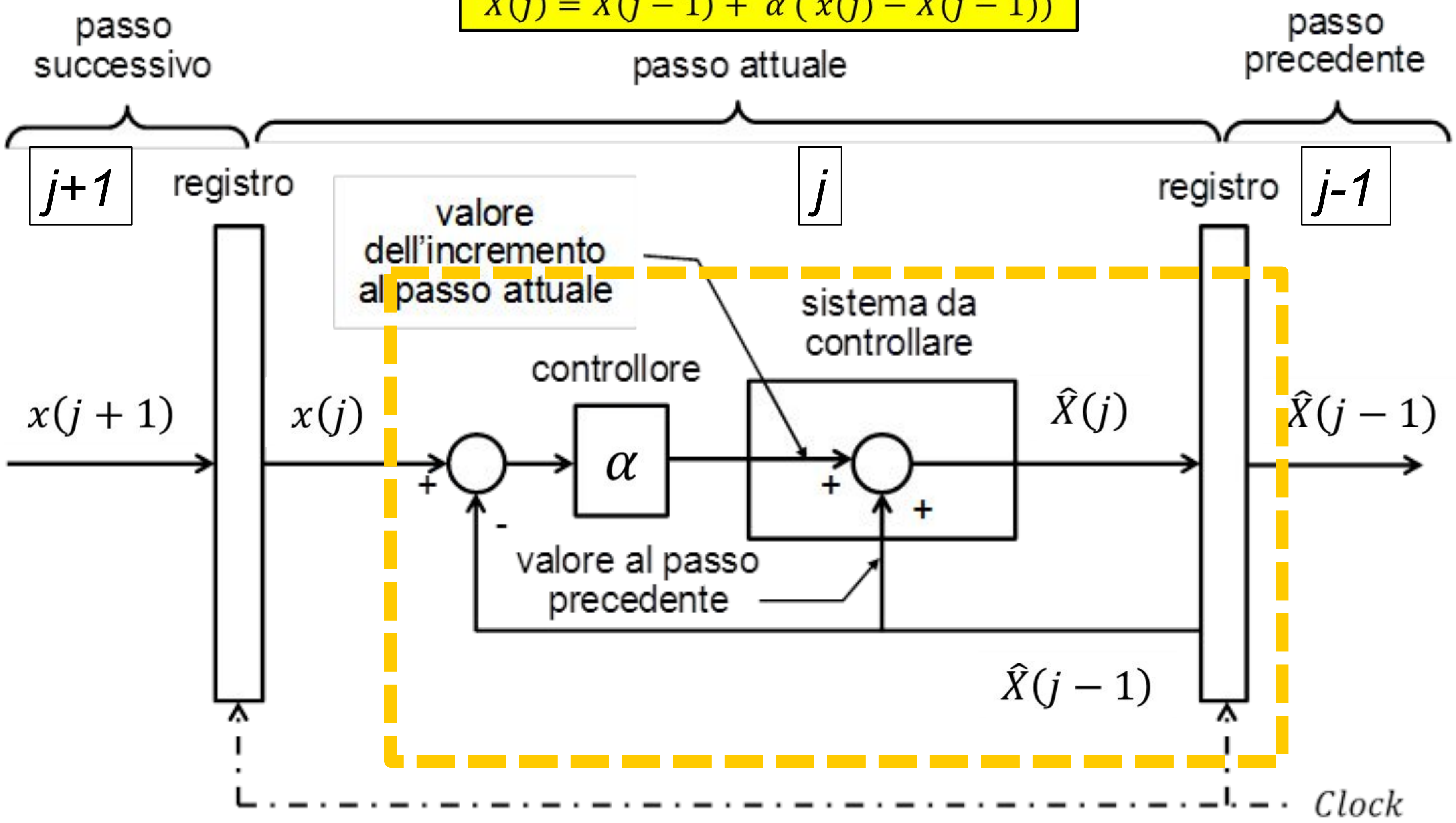
MEDIA PESATA

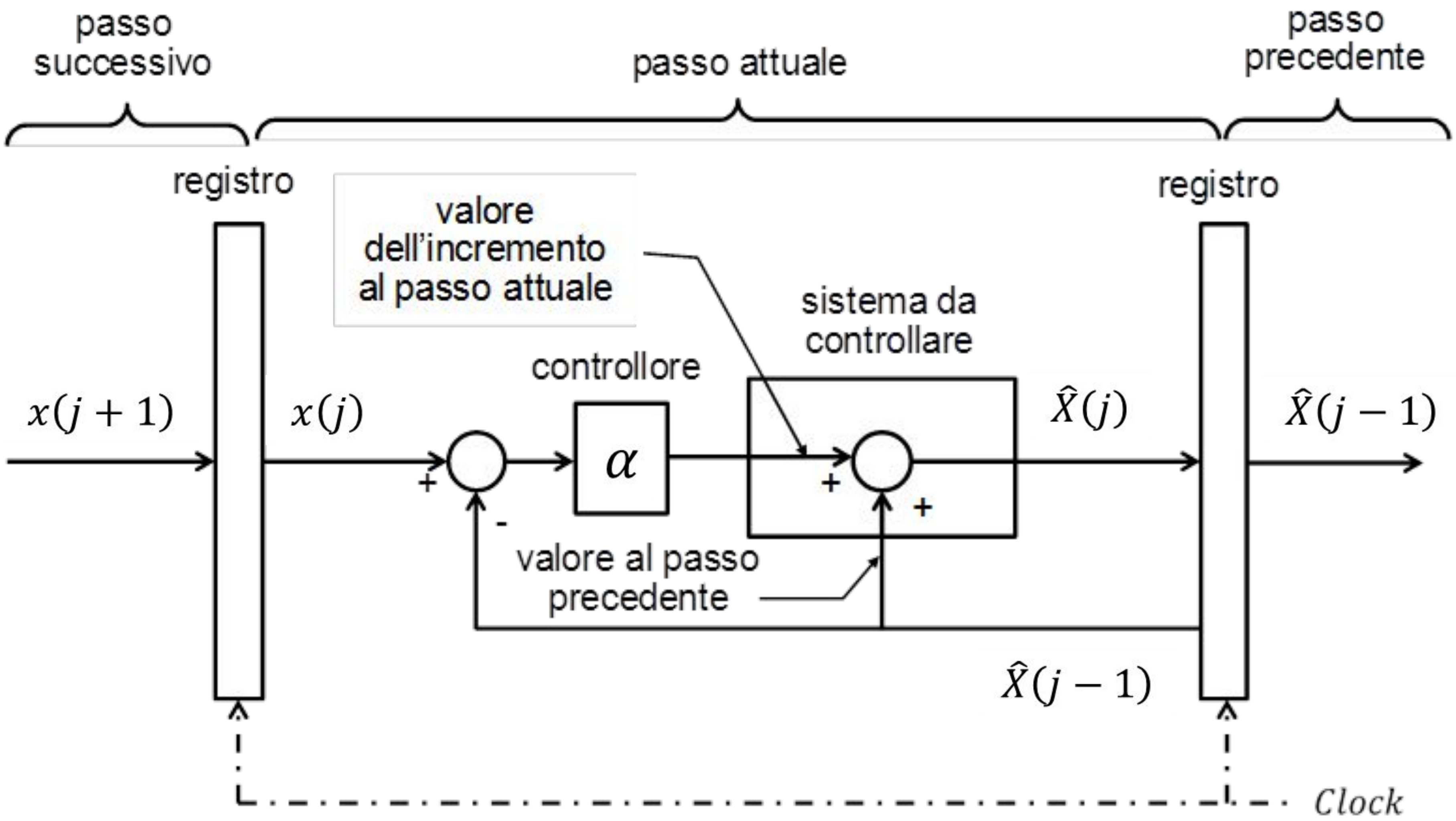
$$\boxed{1 \leq \mathrm{j} \leq n} \qquad \boxed{\hat{X}(0) = X_0}$$

MEDIA PESATA

- Il valore di α va fissato sulla base della **varianza dei dati** di cui calcolare la media.
- Da α dipendono sia la **durata del transitorio di algoritmo** sia l'inevitabile **dispersione della stima** del valore medio.
- Dopo che è **esaurito il transitorio di algoritmo**, la media pesata presenta una **dispersione di ampiezza limitata** con **andamento di tipo periodico**.
- La media pesata può essere vista come un **sistema controllato con modalità di controllo a controreazione**.

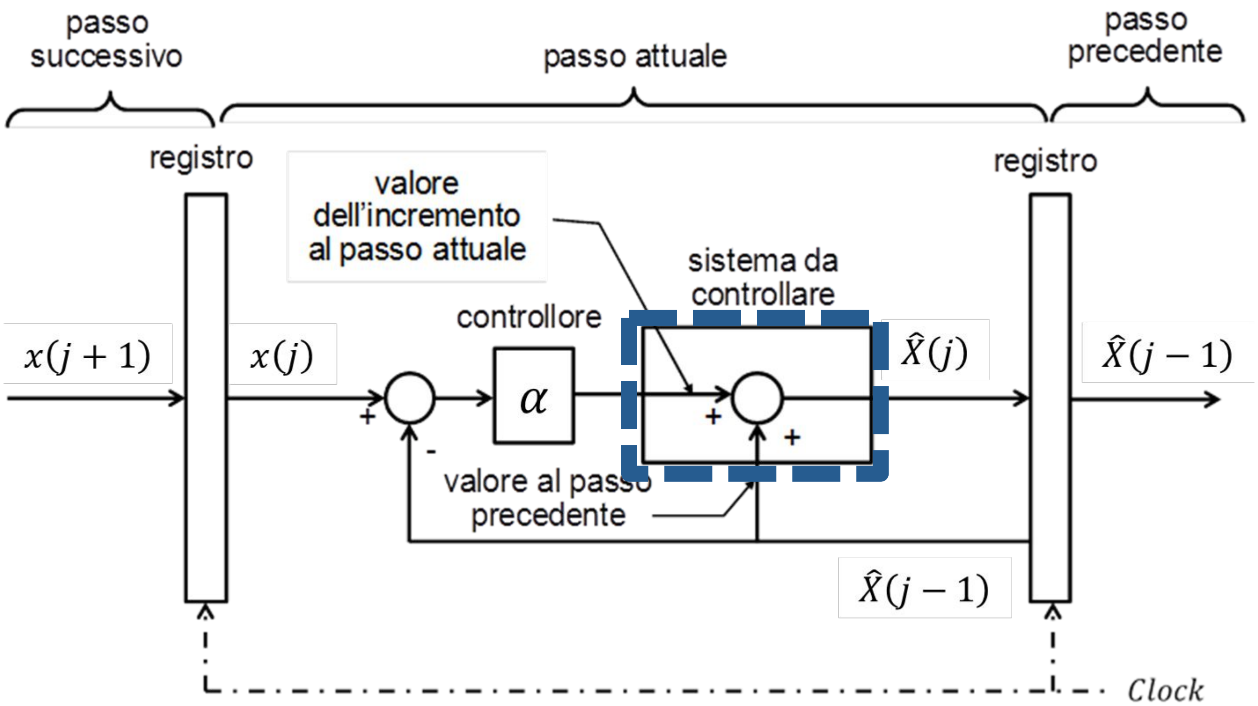
$$\hat{X}(j) = \hat{X}(j-1) + \alpha\,(x(j) - \hat{X}(j-1))$$




passo successivo
passo attuale
passo precedente
registro
registro
valore dell'incremento al passo attuale
sistema da controllare
controllore
$x(j+1)$
$x(j)$
α
$\hat{X}(j)$
$\hat{X}(j-1)$
+
-
+
+
valore al passo precedente
$\hat{X}(j-1)$
Clock

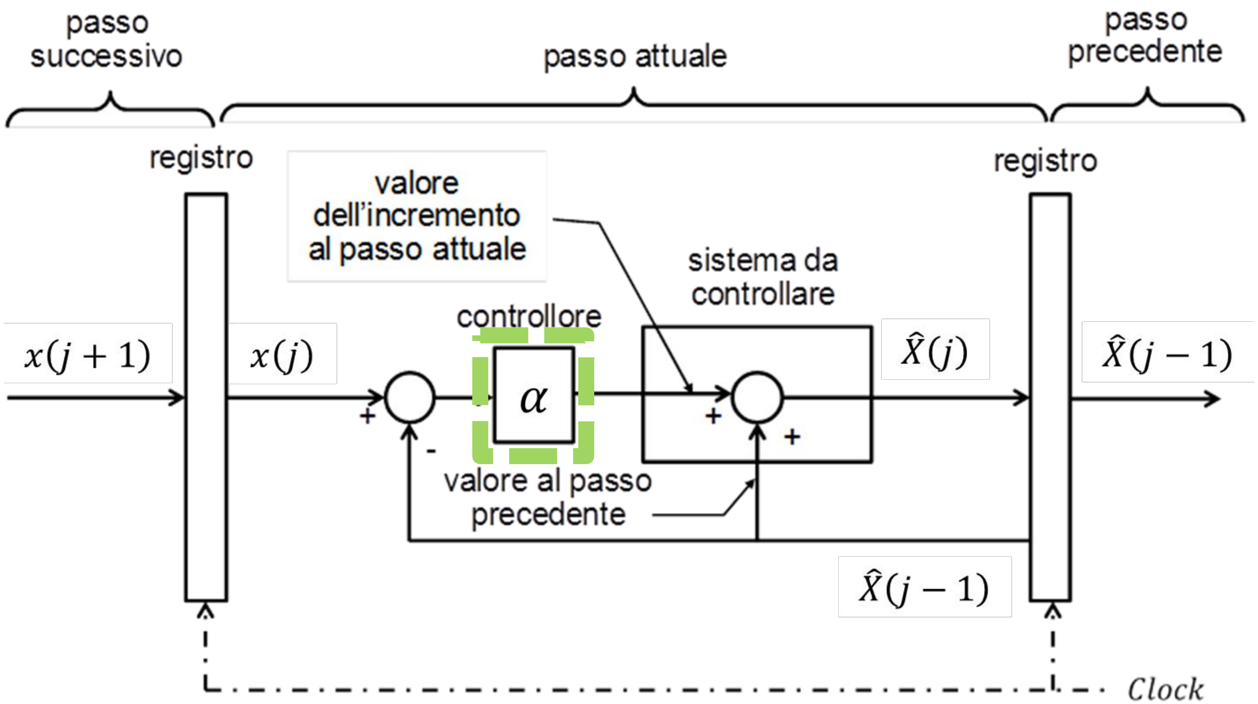
MEDIA PESATA

- Il sistema da controllare è caratterizzato da un comportamento dinamico assimilabile a quello di un **integratore**, in cui il valore al passo attuale X(j) è ottenuto come somma del valore relativo al passo precedente X(j-1) e dell'incremento al passo attuale, ossia (x(j)-X(j-1)), moltiplicato per il guadagno α.



MEDIA PESATA

- Per assicurare la **stabilità** della procedura e per **ridurre sia la durata del transitorio di algoritmo sia l'oscillazione residua**, l'unica possibilità è quella di agire sul valore da assegnare al guadagno α.



EQUIVALENZA MEDIA PESATA – MEDIA ARITMETICA

- Se si fa variare il guadagno α ad ogni passo *j*, ed in particolare si pone:

$$\boxed{\alpha = 1/j}$$

$$\hat{X}(j) = \hat{X}(j-1) + \frac{1}{j}\left(x(j) - \hat{X}(j-1)\right) =$$

$$= \hat{X}(j-1) - \frac{1}{j}\hat{X}(j-1) + \frac{1}{j}x(j) =$$

$$= \left[1 - \frac{1}{j}\right]\hat{X}(j-1) + \frac{1}{j}x(j)$$

EQUIVALENZA MEDIA PESATA - MEDIA ARITMETICA

- Pertanto al passo $\boxed{j = n}$ avremo:

$$\hat{X}(n) = \left[1 - \frac{1}{n}\right] \hat{X}(n-1) + \frac{1}{n}\, x(n) =$$

$$= \left[\frac{n-1}{n}\right] \hat{X}(n-1) + \frac{1}{n}\, x(n)$$

EQUIVALENZA MEDIA PESATA - MEDIA ARITMETICA

- Notiamo che al passo *n-1*, si ha:

$$\hat{X}(n-1) = \hat{X}(n-2) + \frac{1}{n-1}\Big(x(n-1) - \hat{X}(n-2)\Big) =$$

$$= \left[1 - \frac{1}{n-1}\right]\hat{X}(n-2) + \frac{1}{n-1}\,x(n-1) =$$

$$= \left[\frac{n-2}{n-1}\right]\hat{X}(n-2) + \frac{1}{n-1}\,x(n-1)$$

EQUIVALENZA MEDIA PESATA - MEDIA ARITMETICA

$$\hat{X}(n) = \left[\frac{n-1}{n}\right]\hat{X}(n-1) + \frac{1}{n}\,x(n)$$

$$\hat{X}(n-1) = \left[\frac{n-2}{n-1}\right]\hat{X}(n-2) + \frac{1}{n-1}\,x(n-1)$$

- Sostituendo la seconda nella prima si ha:

$$\hat{X}(n) = \left[\frac{n-2}{n}\right]\hat{X}(n-2) + \frac{1}{n}\,x(n-1) + \frac{1}{n}\,x(n)$$

EQUIVALENZA MEDIA PESATA - MEDIA ARITMETICA

- Effettuando *h* sostituzioni si ottiene:

$$\hat{X}(n) = \left[\frac{n-h-1}{n}\right]\hat{X}(n-h-1) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{h+1} x(n-i+1)$$

- Effettuando *h = n-1* sostituzioni, si ottiene la **media aritmetica**:

$$\hat{X}(n) = \cancel{\frac{0}{n}\hat{X}(0)} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x(n-i+1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x(i) = X(n)$$

MEDIA PESATA

- Se $\boxed{\alpha = 1/j}$

all'aumentare di j il valore di 1/j raggiungere valori che non possono essere rappresentati nel dispositivo di calcolo a causa della limitata lunghezza di parola (**underflow**).

- Occorre allora **imporre un minimo al valore** che può essere raggiunto dal guadagno α.

- Se tale valore viene fissato fin dal primo passo della procedura ricorsiva, l'andamento della media pesata presenta, oltre al **transitorio di algoritmo**, anche una **oscillazione di tipo periodico**.

STIMA DEL VALORE MEDIO

METODO ON-LINE

RICORSIVO

MINIMIZZAZIONE ERRORE STIMA

MEDIA ADATTATIVA

- Per **ridurre gli effetti del transitorio di algoritmo** si applica una procedura di stima ricorsiva del valore medio basata sulla **minimizzazione ad ogni passo dell'errore di stima**, chiamata media adattativa.

- L'espressione analitica della media adattativa al passo *n* risulta:

$$Q_n = Q_{n-1} + \alpha(x_n^2 - Q_{n-1})$$
$$K(n) = \frac{P_{n-1}}{Q_n + P_{n-1}}$$
$$X_n = X_{n-1} + K(n)\,(x_n - X_{n-1})$$
$$P_n = K(n)\,Q_n$$

MEDIA ADATTATIVA

- Il valore della media calcolato ad ogni passo n è influenzato da un errore di misura e da un errore di stima:

$$x_n = X^* + \varepsilon_n$$
$$\hat{X}(n) = X^* + \theta_n$$

VALORE MISURATO AL PASSO n

STIMA DELLA MEDIA AL PASSO n

MEDIA ESATTA (INCOGNITA)

ERRORE DI MISURA AL PASSO n

ERRORE DI STIMA AL PASSO n

- Conviene allora ricavare ad ogni passo quel valore che rende **minima la varianza dell’errore di stima**.

- Ciò è ottenuto applicando al calcolo ricorsivo della stima del valore medio la metodologia su cui si basa il **filtro di Kalman**.

MEDIA ADATTATIVA - ASSUNZIONI

- L'errore di misura e l'errore di stima sono **variabili aleatorie** assimilabili a **rumore bianco a media nulla**, ovvero:
  - **non presentano periodicità**
  - **non introducono un errore costante** (bias)

- L'errore di misura e l'errore di stima **non sono correlati**, pertanto il **valore atteso del loro prodotto ha valore nullo**

ε_n **ERRORE DI MISURA AL PASSO n**

θ_n **ERRORE DI STIMA AL PASSO n**

MEDIA PESATA ADATTATIVA

- Riprendendo la relazione della media pesata, con peso adattativo, otteniamo:

$$\hat{X}(n) = \hat{X}(n-1) + K(n)\,(x(n) - \hat{X}(n-1))$$

- Sostituendo nella formula l'errore di stima e di misura, si ottiene:

$$X^* + \theta_n = X^* + \theta_{n-1} + K(n)\left((X^* + \varepsilon_n) - (X^* + \theta_{n-1})\right)$$

- Semplificando, si ottiene:

$$\theta_n = \theta_{n-1} + K(n)\,(\varepsilon_n - \theta_{n-1})$$

MEDIA PESATA ADATTATIVA

- Ricordando che errore di misura e di stima sono variabili aleatorie a valor medio nullo, la loro **varianza è il valore atteso del loro quadrato**

- Il quadrato dell'errore di stima è

$$\theta_n^2 = \theta_{n-1}^2 + K(n)^2(\varepsilon_n - \theta_{n-1})^2 + 2\theta_{n-1}K(n)(\varepsilon_n - \theta_{n-1})$$

$$= \theta_{n-1}^2 + K(n)^2\varepsilon_n^2 + K(n)^2\theta_{n-1}^2 - 2K(n)^2\varepsilon_n\theta_{n-1}$$
$$+ 2K(n)\theta_{n-1}\varepsilon_n - 2K(n)\theta_{n-1}^2$$

MEDIA PESATA ADATTATIVA

- Ricordando che errore di misura e di stima sono variabili aleatore indipendenti, il **valore atteso del prodotto è nullo**

- La varianza dell'errore di stima è:

$$
\begin{aligned}
&E[\theta_n^2] \\
&= E[\theta_{n-1}^2] + \cancel{K(n)^2E[\varepsilon_n^2]} + \cancel{K(n)^2E[\theta_{n-1}^2]} \\
&- 2K(n)^2E[\varepsilon_n\theta_{n-1}] + 2K(n)E[\varepsilon_n\theta_{n-1}] - 2K(n)E[\theta_{n-1}^2]
\end{aligned}
$$

- Posto $E[\theta_n^2] = P_n \qquad E[\varepsilon_n^2] = Q_n$ si ottiene:

$$
P_n = P_{n-1} + K(n)^2Q_n + K(n)^2P_{n-1} - 2K(n)P_{n-1}
$$

MEDIA PESATA ADATTATIVA

- Per minimizzare la varianza dell'errore di stima rispetto a K(n) si dovrà porre

$$\frac{\partial P_n}{\partial K(n)} = 0$$

ovvero:

$$\frac{\partial P_n}{\partial K(n)} = 2K(n)Q_n + 2K(n)P_{n-1} - 2P_{n-1} = 0$$

$$\boxed{K(n) = \frac{P_{n-1}}{Q_n + P_{n-1}}}$$

MEDIA PESATA ADATTATIVA

- Sostituendo

$$K(n) = \frac{P_{n-1}}{Q_n + P_{n-1}}$$

nella equazione

$$P_n = P_{n-1} + K(n)^2 Q_n + K(n)^2 P_{n-1} - 2K(n)P_{n-1}$$

si ottiene:

$$P_n = P_{n-1} + K(n)\frac{P_{n-1}}{\cancel{Q_n + P_{n-1}}}(\cancel{Q_n + P_{n-1}}) - 2K(n)P_{n-1}$$

MEDIA PESATA ADATTATIVA

- Continuando...

$$P_n = P_{n-1} + K(n)P_{n-1} - 2K(n)P_{n-1}$$

$$P_n = P_{n-1} - K(n)P_{n-1} = P_{n-1}\big(1 - K(n)\big)$$

e sostituendo nuovamente si ottiene:

$$P_n = P_{n-1}\left(1 - \frac{P_{n-1}}{Q_n + P_{n-1}}\right) = P_{n-1}\left(\frac{Q_n + \cancel{P_{n-1} - P_{n-1}}}{Q_n + P_{n-1}}\right)$$

$$P_n = Q_n\left(\frac{P_{n-1}}{Q_n + P_{n-1}}\right) = K(n)Q_n$$

$$\boxed{P_n = K(n)Q_n}$$

MEDIA PESATA ADATTATIVA

- Per determinare la varianza dell'errore di misura viene applicata la relazione ricorsiva che fornisce la stima del suo valore medio

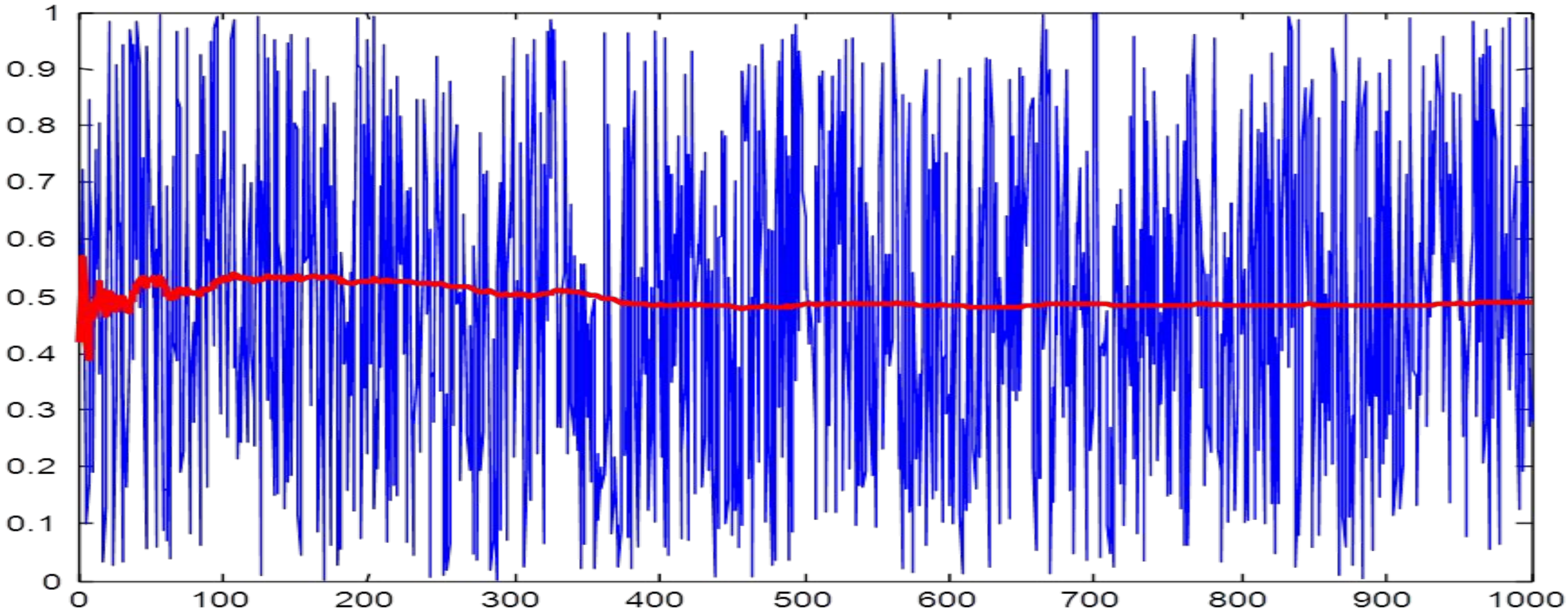
$$\boxed{Q_n = Q_{n-1} + \alpha(x_n^2 - Q_{n-1})}$$

$$\boxed{0.1 < \alpha < 0.001}$$

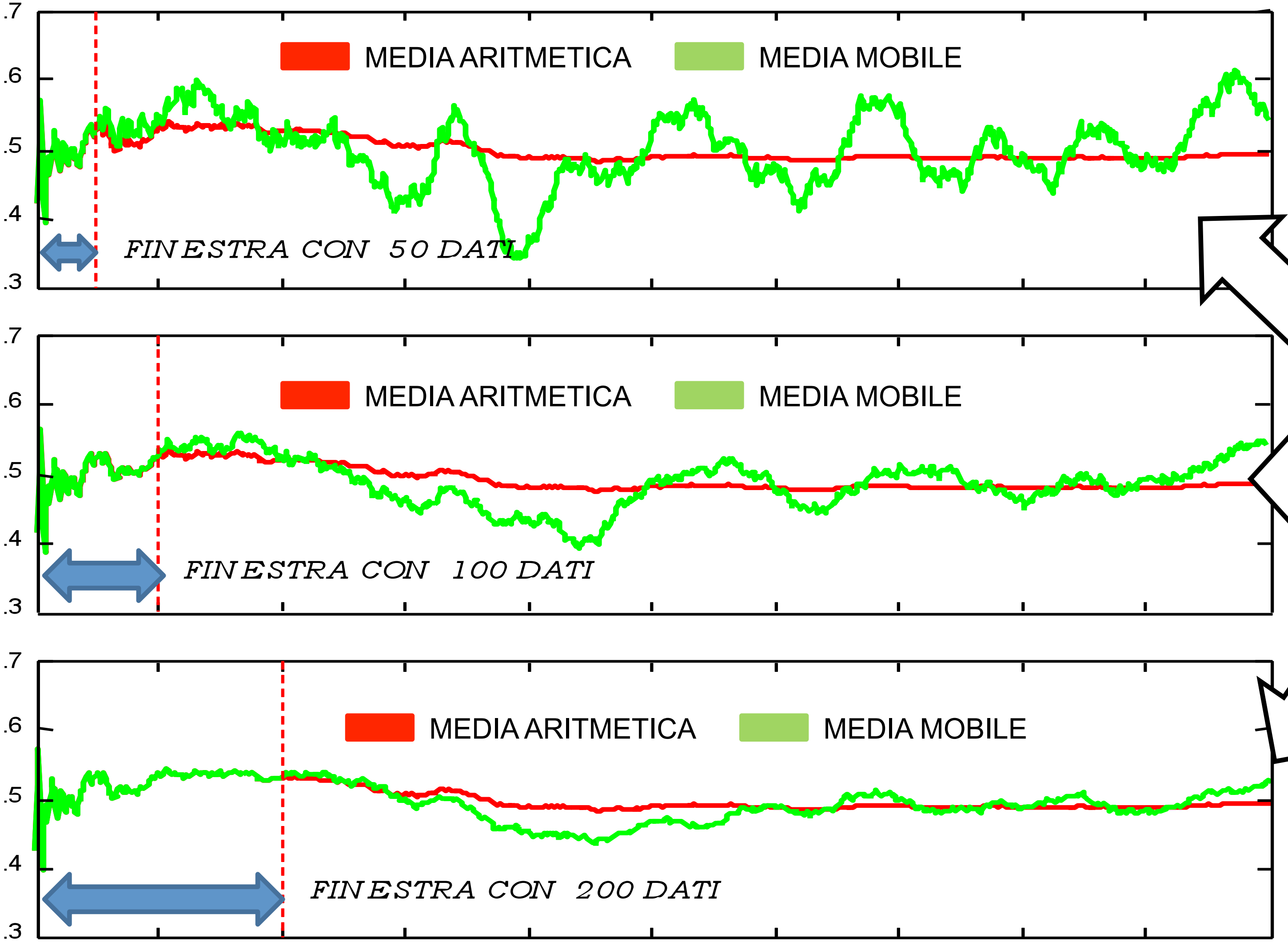
STIMA DEL VALORE MEDIO
ESEMPIO COMPARATIVO

ESEMPIO COMPARATIVO

- Consideriamo un segnale utile **COSTANTE** (0.5), a cui si aggiunge un rumore bianco con escursione ±0.5. Il **segnale complessivo** è rappresentato in figura in **blu**. In **rosso** compare la **media aritmetica**.



MEDIA MOBILE

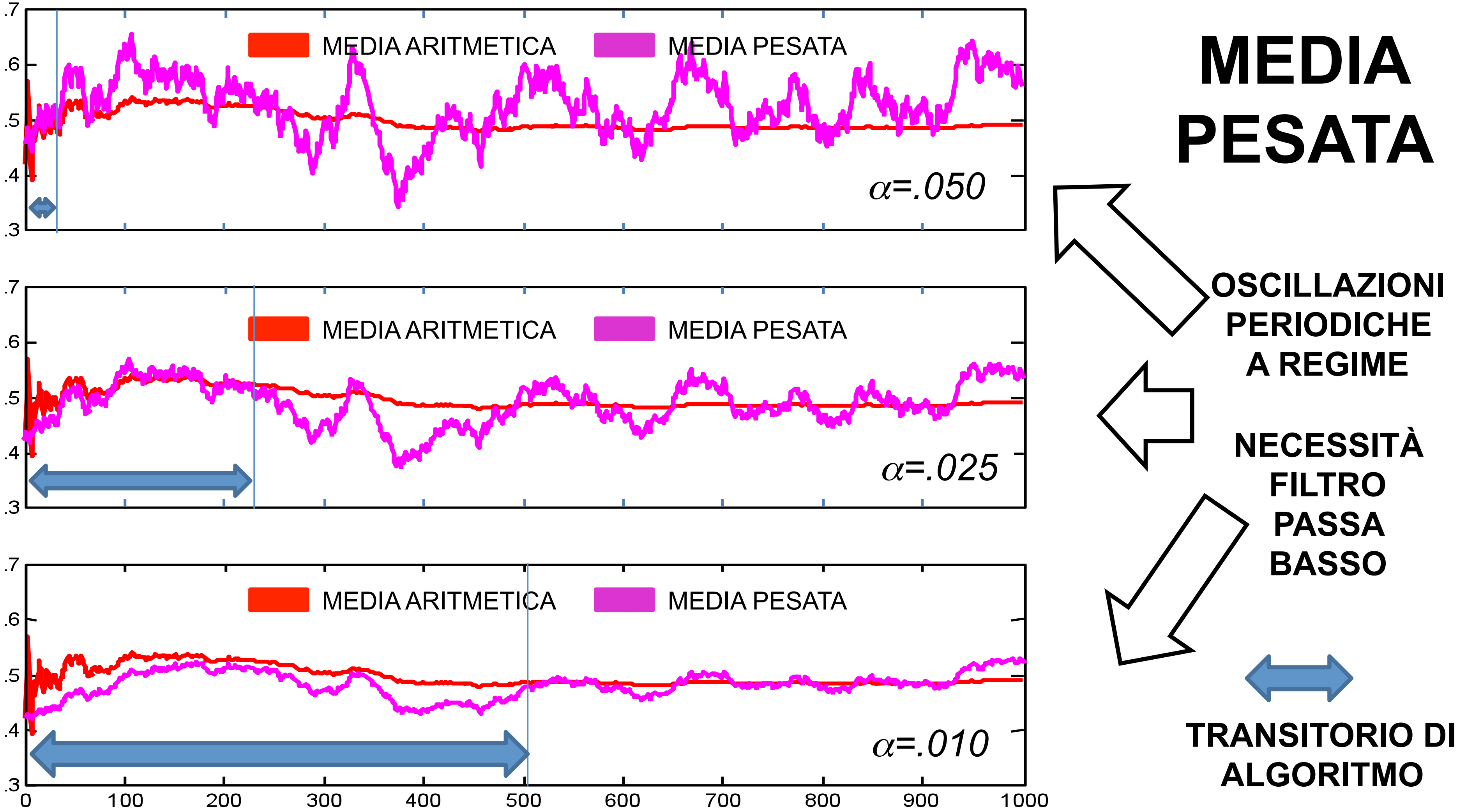


OSCILLAZIONI PERIODICHE A REGIME

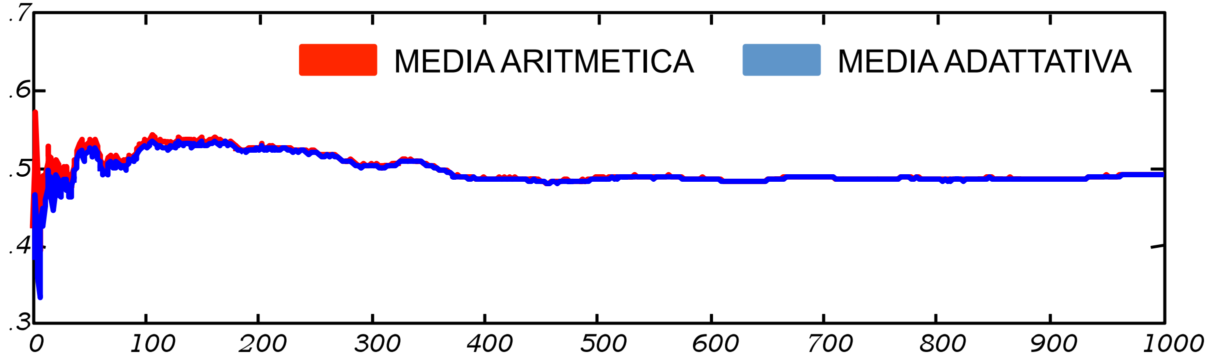
NECESSITÀ FILTRO PASSA BASSO

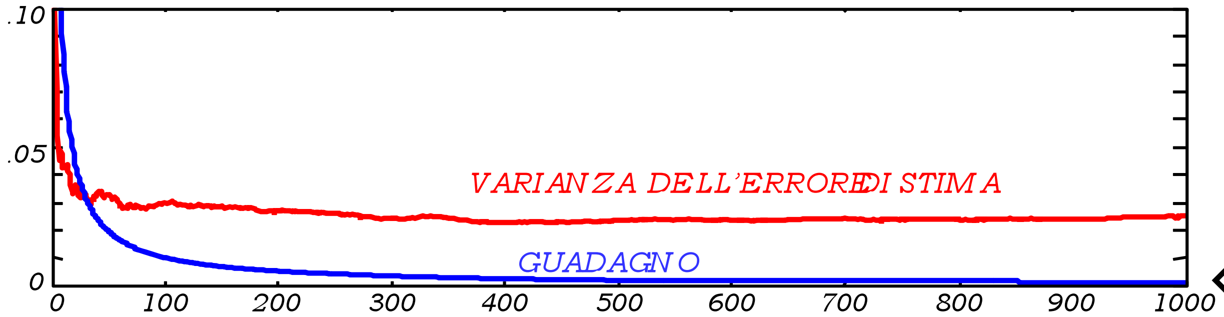
TRANSITORIO DI ALGORITMO

MEDIA PESATA

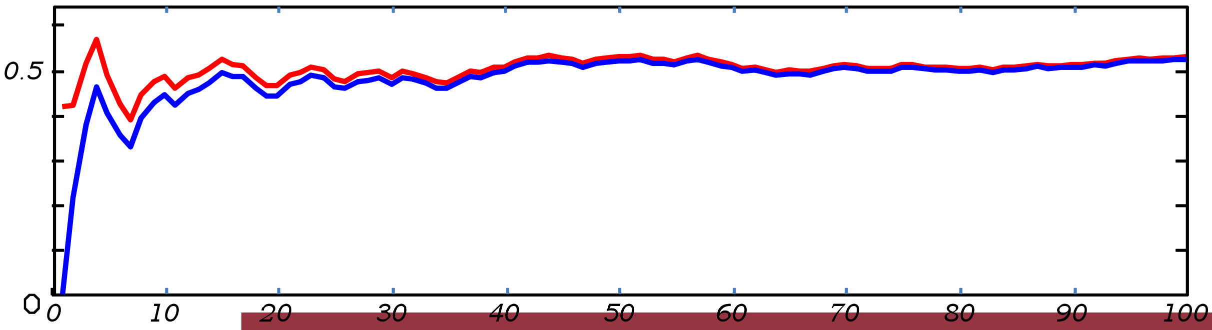


MEDIA ADATTATIVA

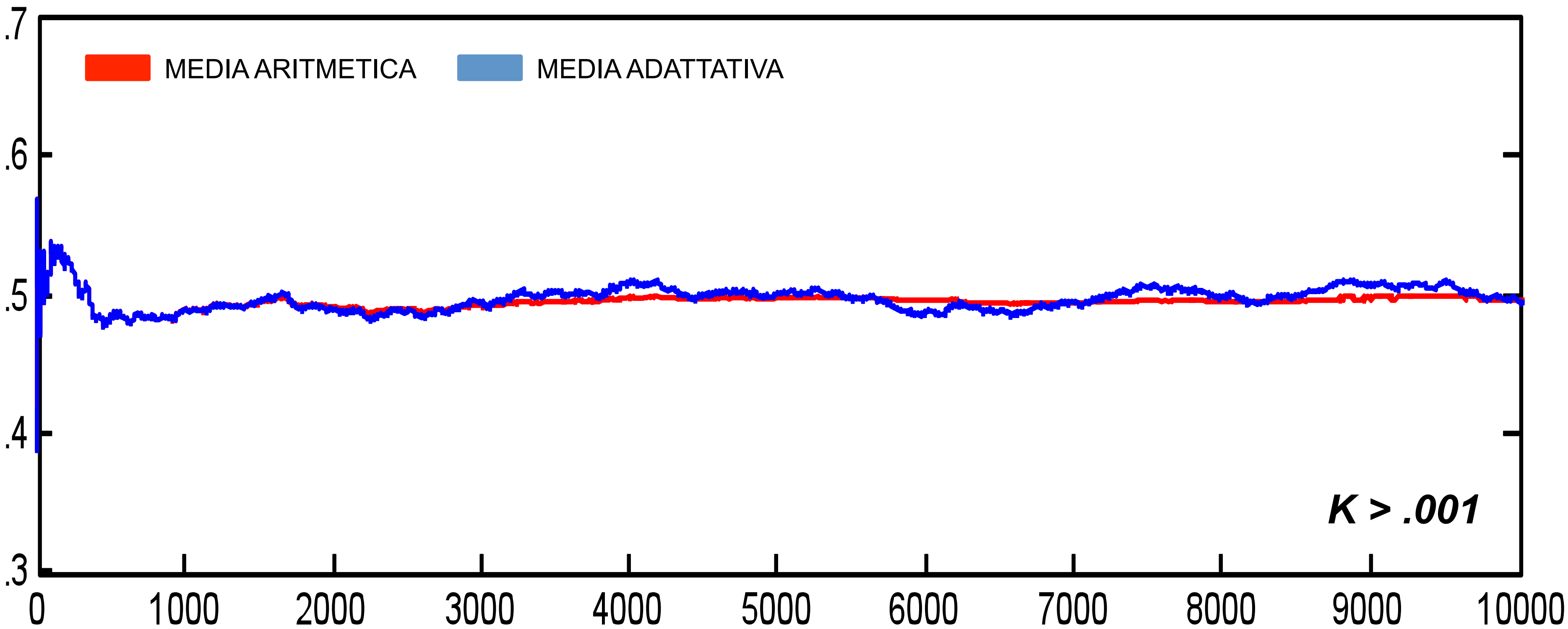




PERICOLO DI UNDERFLOW



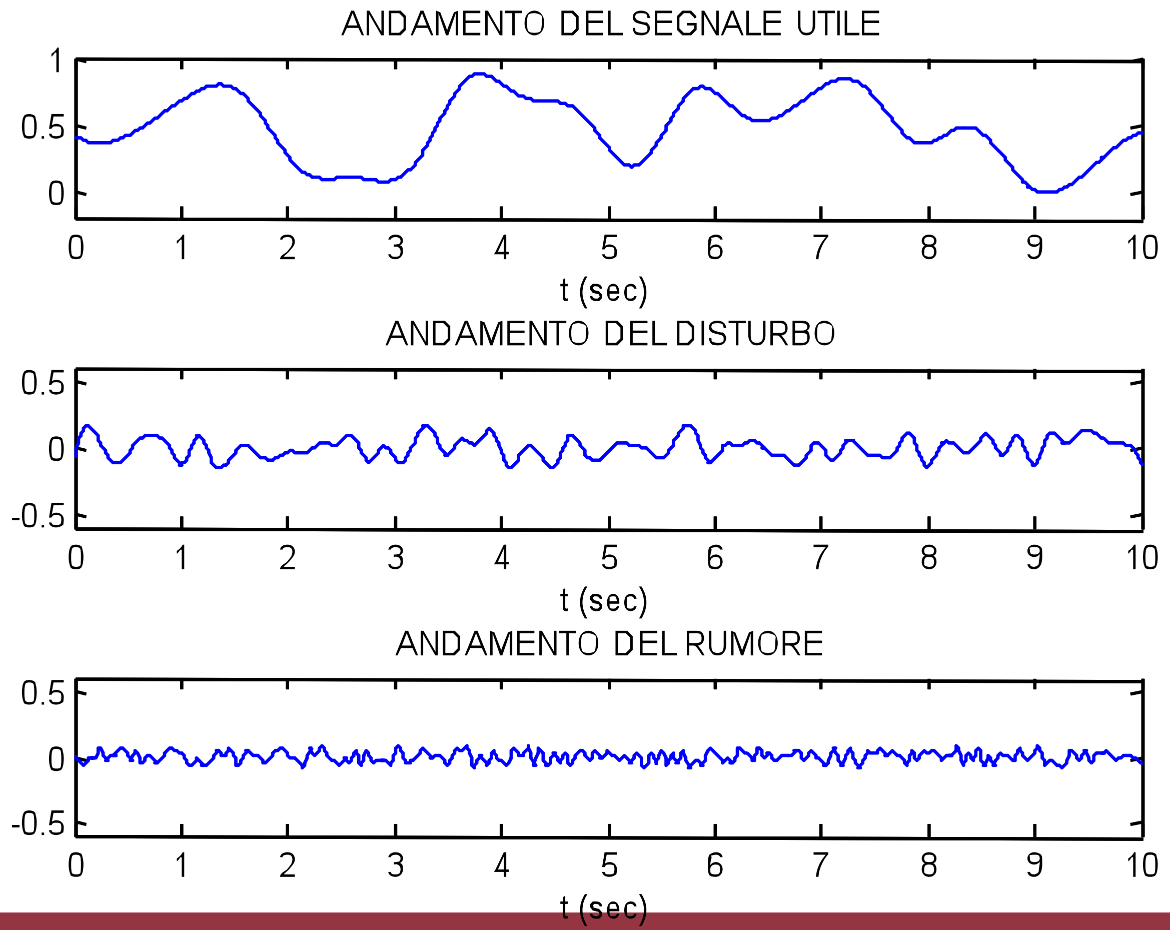
MEDIA ADATTATIVA
CON GUADAGNO LIMITATO INFERIORMENTE



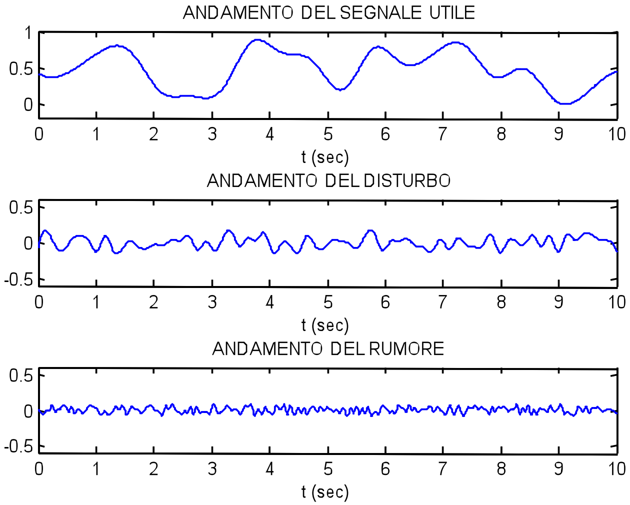
ESTRAZIONE DEL SEGNALE UTILE

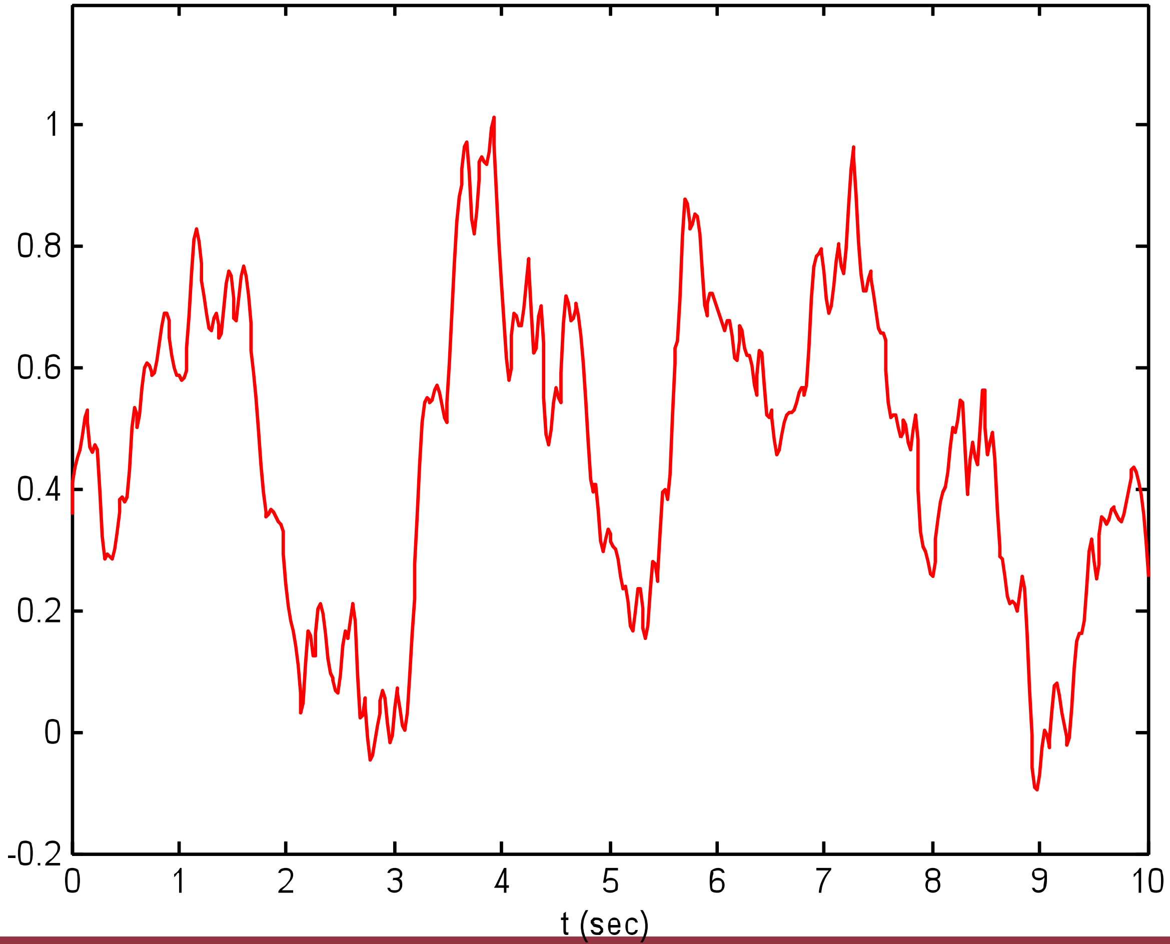
AUTOCORRELAZIONE

SEGNALE UTILE, DISTURBO E RUMORE

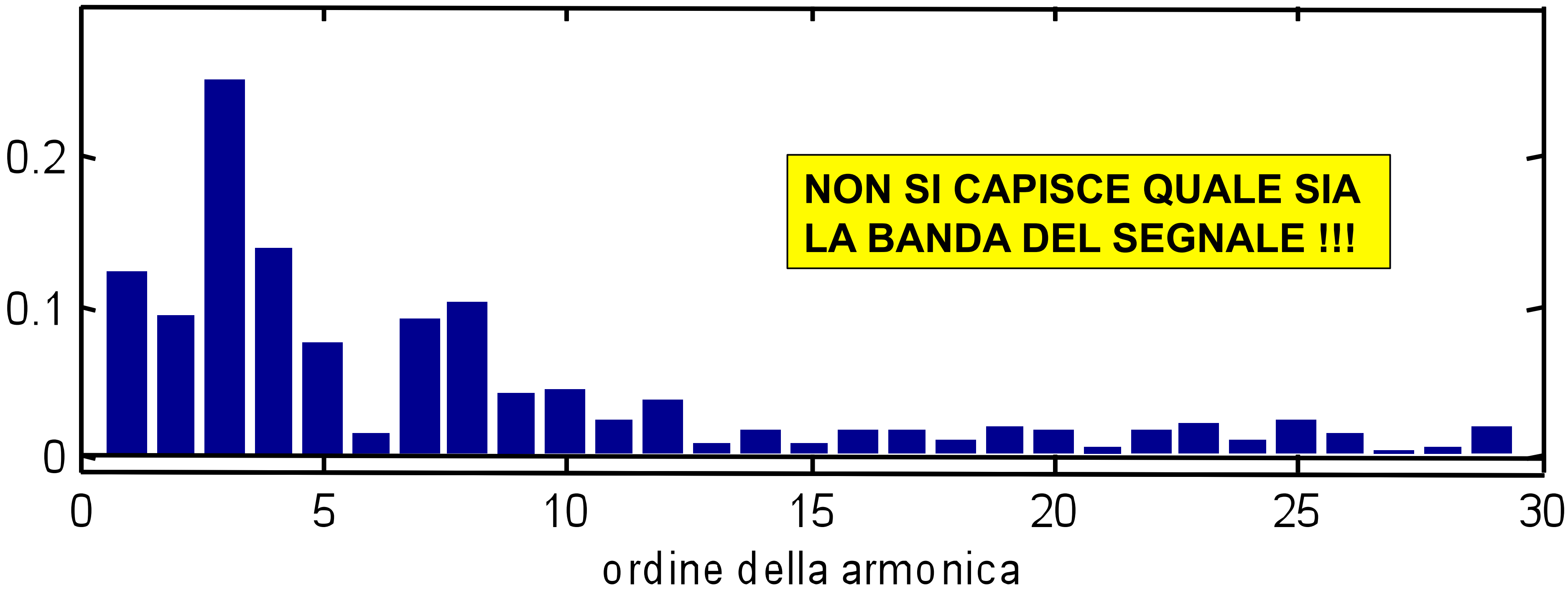


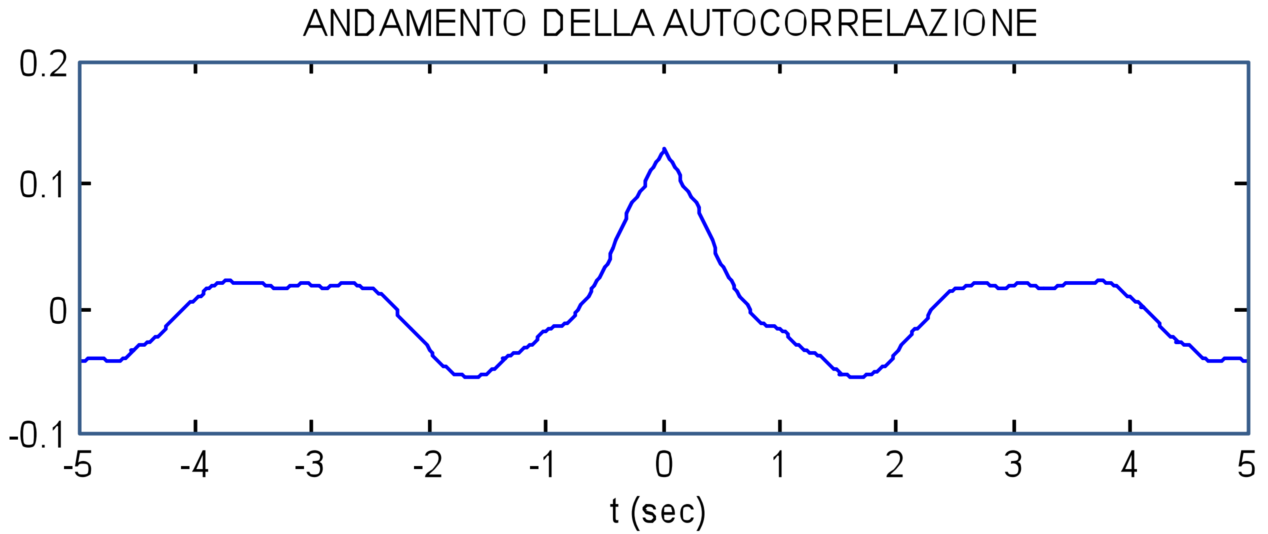
SEGNALE MISURATO

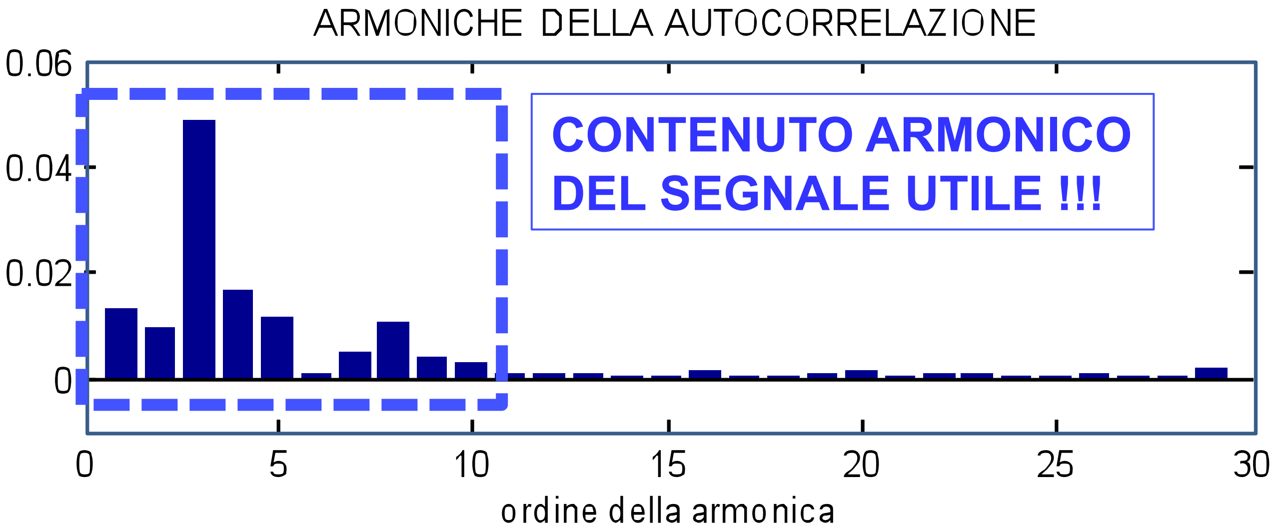




CONTENUTO ARMONICO DEL SEGNALE MISURATO







SPETTRO DI DENSITÀ DI ENERGIA

CONTENUTO ARMONICO DELLA AUTOCORRELAZIONE DEL SEGNALE MISURATO

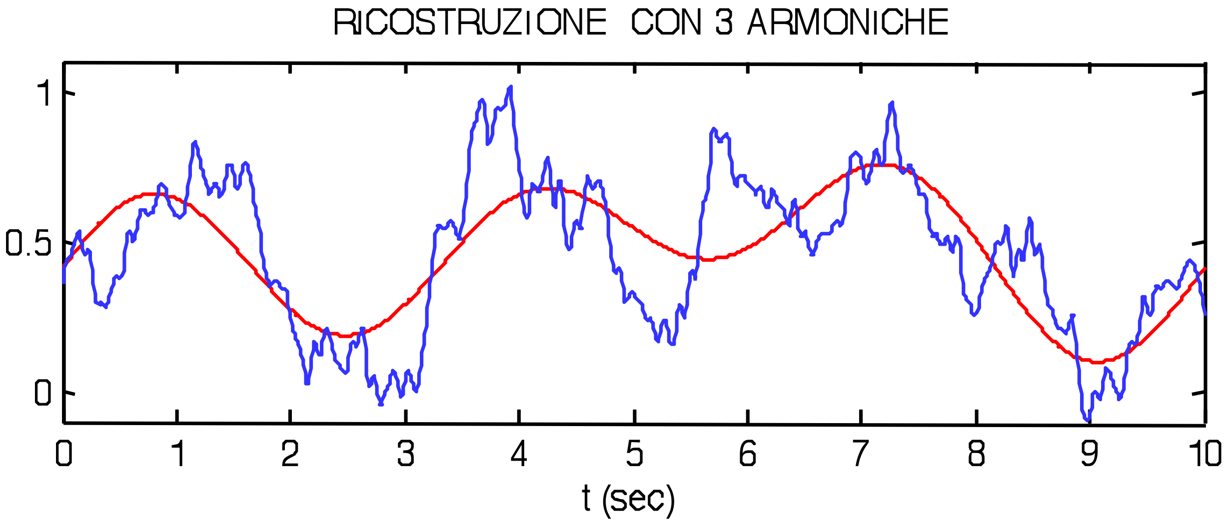
T TEMPO DI OSSERVAZIONE DEI DATI

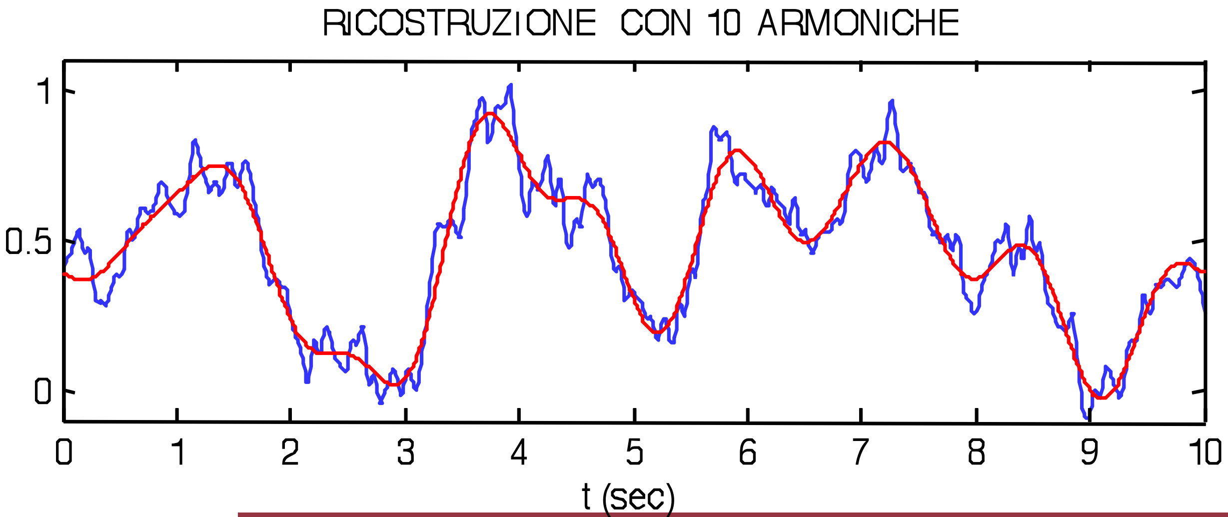
$$\omega = 2\pi n / T$$

ARMONICA DI ORDINE n

VERIFICA

DEL CONTENUTO ARMONICO DELLA AUTOCORRELAZIONE DEL SEGNALE MISURATO





3 ARMONICHE

10 ARMONICHE

ESTRAZIONE DEL SEGNALE UTILE

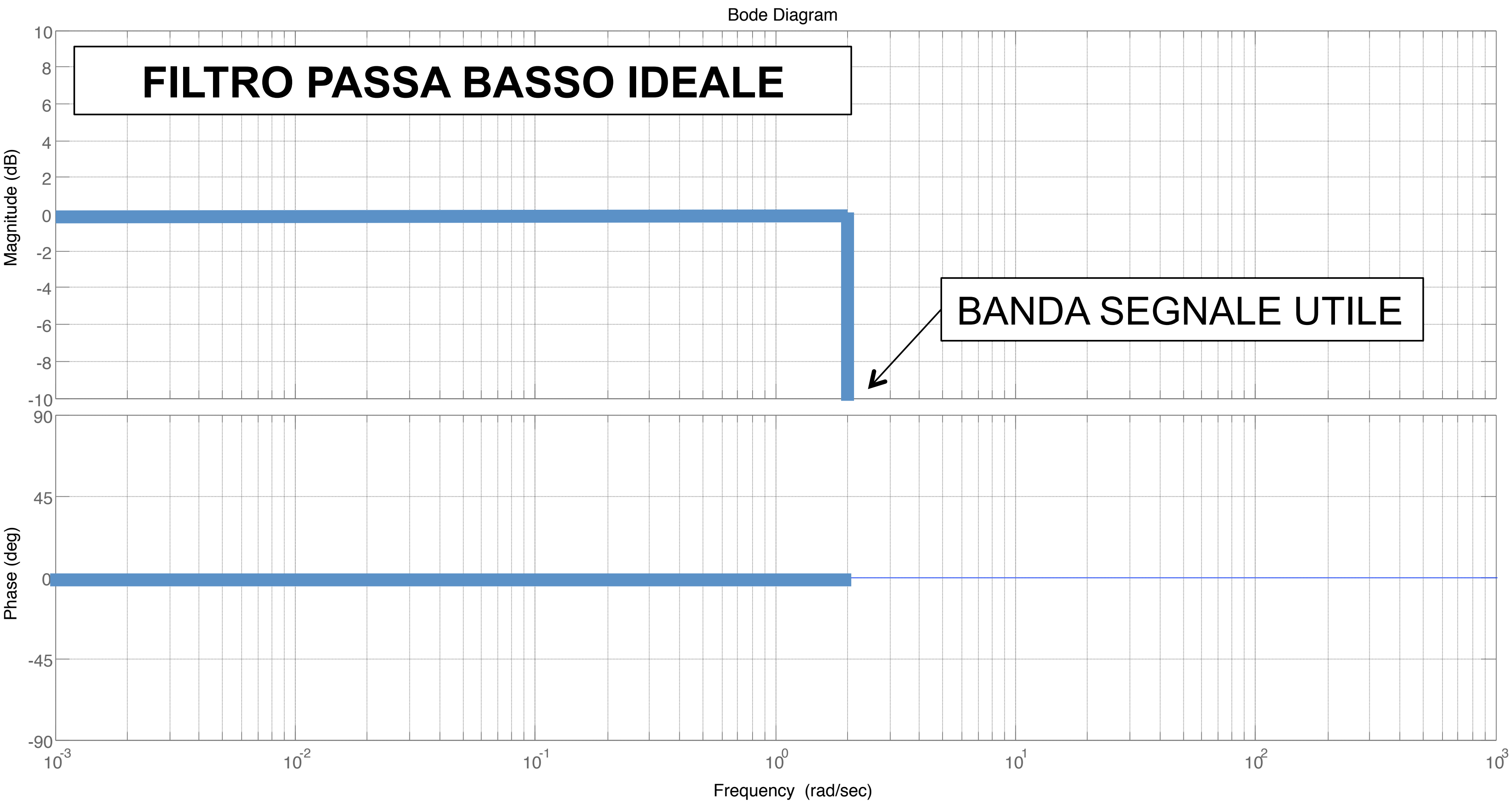
FILTRI PASSA-BASSO

FILTRO PASSA BASSO IDEALE

- Un filtro passa-basso ideale dovrebbe:

1. **LASCIARE** INALTERATE LE FREQUENZE (IN MODULO E FASE) **ENTRO LA BANDA** DEL SEGNALE UTILE (BANDA PASSANTE DEL FILTRO)

2. **ATTENUARE** MASSIMAMENTE LE FREQUENZE **OLTRE LA BANDA** DEL SEGNALE UTILE (BANDA PASSANTE DEL FILTRO)

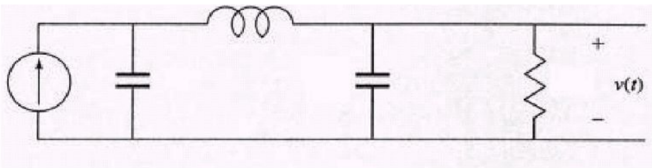

Bode Diagram
FILTRO PASSA BASSO IDEALE
BANDA SEGNALE UTILE
Magnitude (dB)
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
Phase (deg)
90
45
0
-45
-90
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Frequency (rad/sec)

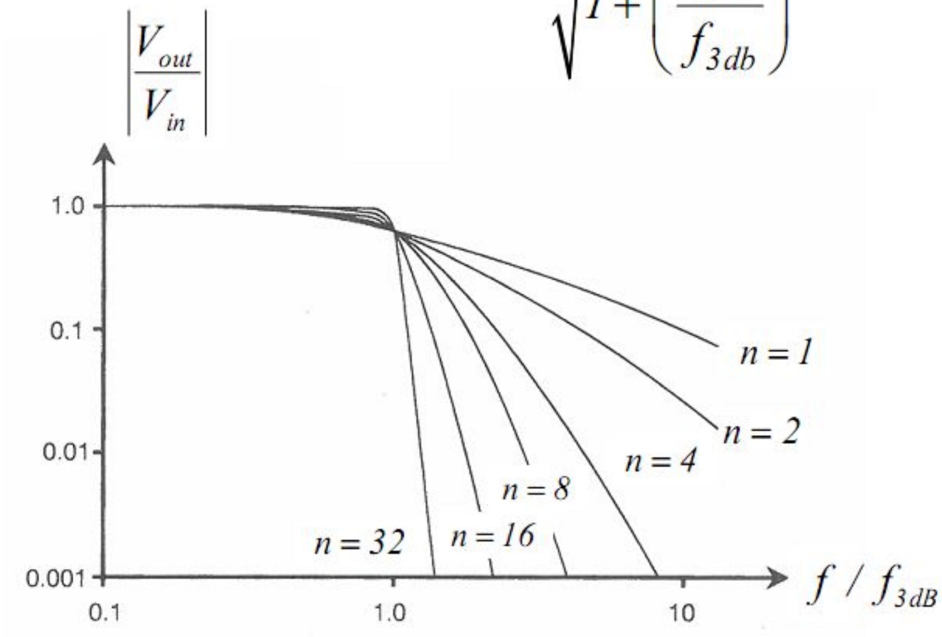
FILTRI DI BUTTERWORTH

- Esistono vari filtri in grado di fornire ottime prestazioni come filtri passa-basso, ad es. il filtro di Butterworth

$$\left|\frac{V_{out}}{V_{in}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_{3db}}\right)^{2n}}}$$

INTRODUCE RITARDO DI FASE IN BANDA





FILTRI DI BESSEL

- Per capire come funzionano i filtri di Bessel, chiediamoci che forma dovrebbe avere la funzione di trasferimento del filtro passa basso ideale.
- Il filtro deve avere un guadagno *k* e una distorsione di fase il più possibile «piatta» al variare delle frequenze nella banda passante.

$$v(t) = ku(t-\delta)$$

- Passando nel dominio di Laplace

$$H(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = ke^{-s\delta}$$

FILTRI DI BESSEL

- Ricordando le espressioni del seno iperbolico e del coseno iperbolico

$$sinh(s) = \frac{e^s - e^{-s}}{2} \qquad cosh(s) = \frac{e^s + e^{-s}}{2}$$

esplicitiamo l'esponenziale presente nella funzione di trasferimento:

$$H(s) = ke^{-s\delta} = \frac{k}{sinh(s\delta) + cosh(s\delta)}$$

FILTRI DI BESSEL

- Gli sviluppi in serie di Taylor del seno e del coseno iperbolico sono

$$sinh(s) = s + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \cdots + \frac{s^{2h+1}}{(2h+1)!} + \cdots$$

$$cosh(s) = 1 + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + \cdots + \frac{s^{2h}}{(2h)!} + \cdots$$

- Blocchiamo ad n lo sviluppo in serie

$$sinh(s) \cong \sum_{h=0}^{n} \frac{s^{2h+1}}{(2h+1)!} \qquad cosh(s) \cong \sum_{h=0}^{n} \frac{s^{2h}}{(2h)!}$$

FILTRI DI BESSEL

- Sostituendo nella funzione di trasferimento

$$H(s) \cong H_n(s) = \frac{k}{\sum_{h=0}^{n} \frac{(s\delta)^{2h+1}}{(2h+1)!} + \sum_{h=0}^{n} \frac{(s\delta)^{2h}}{(2h)!}}$$

si può dimostrare che:

$$H_n(s) = \frac{B_0(s)}{B_n(s)}$$

dove

$$B_n(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n-k)!\,s^k}{2^{n-k}\,k!(n-k)!}$$

FILTRI DI BESSEL

- Passando nel dominio della frequenza:

$$H(j\omega) = ke^{-j\omega\delta}$$

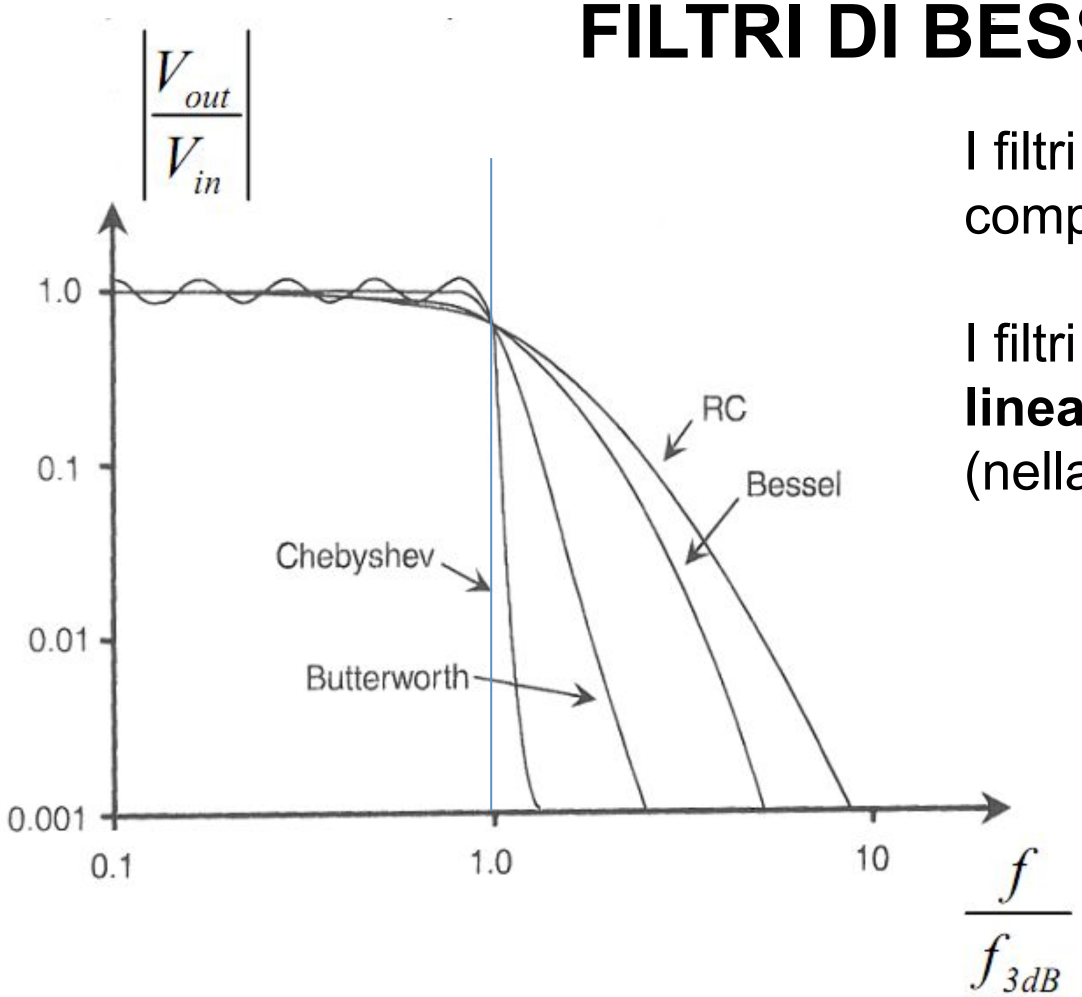
- Questa funzione di trasferimento ha un guadagno costante e una **fase che varia linearmente con la pulsazione**:

$$\varphi(j\omega) = \omega\delta$$

- La velocità di fase è costante e **può essere scelta piccola a piacere**, per avere una variazione di fase minima all'interno della banda passante:

$$\frac{d\varphi(j\omega)}{d\omega} = \delta$$

FILTRI DI BESSEL



I filtri di Bessel hanno un buon comportamento passa-basso.

I filtri di Bessel hanno la **massima linearità nella risposta in fase** (nella banda passante).