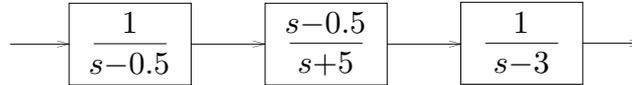


## Esempio di instabilità interna dovuta a perdita di raggiungibilità

### Problema

Si consideri il processo composito in figura



Disponendo di due sensori ideali (in grado di misurare qualsiasi segnale del processo e aventi funzione di trasferimento unitaria) e di due amplificatori (a guadagno costante ma modificabile a piacere), oltre che di sommatori, si progetti uno schema di controllo in grado di stabilizzare il processo.

La cancellazione polo/zero in 0.5 va assolutamente evitata, perché ad essa corrisponderebbe la creazione di un autovalore nascosto (in particolare, non raggiungibile) con parte reale positiva. A quel punto, nessuna retroazione sarebbe in grado di stabilizzare il processo, che conterrebbe sempre tale autovalore e sarebbe dunque instabile internamente.

Il file `unstable.m` è uno schema SIMULINK che si riferisce appunto al caso in cui la cancellazione *non* venga evitata. La soluzione proposta si basa sull'osservazione che a seguito della cancellazione polo/zero la funzione di trasferimento del processo diventa

$$P(s) = \frac{1}{(s-3)(s+5)}$$

e dunque un semplice guadagno  $K > 15$  è sufficiente per far sì che i poli ad anello chiuso abbiano tutti parte reale negativa. Simulando lo schema, si vede immediatamente come tale sintesi sia disastrosa. Mentre l'uscita converge ad un valore di regime (tanto più vicino al riferimento quanto maggiore è  $K$ ), il segnale proveniente dal primo blocco del processo (che è in sostanza una variabile di stato) diverge: dunque, il sistema è instabile internamente.

Il file `stabilized.m` riporta invece la soluzione corretta, che fa uso di tutti i componenti indicati nella traccia del problema. L'anello interno di retroazione ha lo scopo di *spostare* il polo in 0.5, evitando così la cancellazione e la perdita di raggiungibilità del corrispondente autovalore. In particolare, il guadagno dell'anello interno ( $k_2 = -0.5$ ) è tale da disporre il polo risultante in 1, cioè *a destra* dello zero del processo. Ciò crea un punto singolare nel luogo positivo corrispondente all'anello esterno, e garantisce in ultima analisi la possibilità di stabilizzare il sistema complessivo. Risulta che, a tal fine, il guadagno  $k_1$  dell'anello esterno deve essere compreso tra  $-60$  e  $-42.6$ . Una simulazione dello schema conferma che i segnali interni sono ora tutti limitati.

Si noti tuttavia la pessima precisione di risposta (che d'altra parte non è oggetto di specifiche), dovuta al basso valore del guadagno  $k_F$  del ramo diretto, pericolosamente vicino a  $-1$ . In particolare, l'errore a regime per un riferimento a gradino vale

$$e_0 = \frac{1}{1+k_F} = \frac{1}{1+k_1 \cdot 0.016}$$

dove  $0.016$  è il guadagno della funzione di trasferimento risultante dalla cascata dell'anello interno con il secondo e il terzo blocco del processo. L'errore a regime (definito come la differenza tra il segnale di riferimento e il segnale di uscita) ha dunque un valore minimo di circa 3.4615 (per  $k_1 \rightarrow -42.6^-$ ) e tende all'infinito per  $k_1 \rightarrow -60^+$ .