

# Teoria della Stabilità per Sistemi Non Lineari

G. Oriolo

Sapienza Università di Roma

# Introduzione

consideriamo un generico sistema dinamico **non lineare** stazionario

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x)\end{aligned}$$

con stato  $x \in \mathbb{R}^n$ , ingresso  $u \in \mathbb{R}^p$ , uscita  $y \in \mathbb{R}^q$

## problema tipico

calcolare, dati  $x_0 = x(0)$  e  $u_{[0,t]}$ , lo stato  $x(t)$  e l'uscita  $y(t)$  per valori di  $t > 0$

**es:** nei sistemi lineari, dove  $f(x, u) = Ax + Bu$ , si ha

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

## tuttavia

spesso non si ha interesse a stabilire esplicitamente la soluzione, ma piuttosto a determinarne alcune proprietà come **limitatezza**, **comportamento asintotico**, ...

$\Rightarrow$  teoria **qualitativa** delle equazioni differenziali (Poincaré 1880, Lyapunov 1892, LaSalle e Lefschetz 1947...)

## idea di base

valutare il comportamento qualitativo del sistema in corrispondenza a **perturbazioni** dello stato iniziale e dell'ingresso del sistema rispetto a valori nominali

indicata con  $x(t)$  l'evoluzione dello stato in corrispondenza a  $x_0$  e  $u_{[0,t]}$ , ci si chiede:

- cosa succede se  $x_0 \rightarrow x_0 + \Delta x_0$ ?
- cosa succede se  $u(t) \rightarrow u(t) + \Delta u(t)$ ?

in particolare:

- quanto è **prossima** l'evoluzione perturbata a quella nominale?
- sotto quali condizioni le due soluzioni tendono a **coincidere** per  $t \rightarrow \infty$ ?

qualitativamente, appare naturale chiamare

- **stabile** un sistema nel quale piccole perturbazioni danno luogo a piccoli scostamenti
- **instabile** un sistema nel quale piccole perturbazioni danno luogo ad ampi scostamenti

# teoria della stabilità

## definizioni

proprietà di stabilità (diversi tipi in relazione al comportamento del sistema e alle esigenze applicative) e di instabilità

## condizioni

che un sistema deve soddisfare per godere dell'una o dell'altra di queste proprietà

## criteri

per verificare la sussistenza o meno delle condizioni senza calcolare esplicitamente la soluzione perturbata del sistema

**es:** nei sistemi lineari

- definizione di stabilità, stabilità asintotica, instabilità
- condizione di stabilità asintotica:  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)|_{u \equiv 0} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} x_0 = 0$
- criteri di stabilità asintotica:  $\sigma(A) \in \mathcal{C}^-$ , criterio di Routh, oppure criterio di Nyquist per sistemi retroazionati

generalmente si considera il comportamento di sistemi **in evoluzione libera**

$$\dot{x} = f(x)$$

**rispetto a perturbazioni dello stato iniziale**  $x_0$

infatti:

- scelta una legge di controllo in retroazione  $u = h(x)$ , la dinamica **ad anello chiuso** diventa

$$\dot{x} = f(x, h(x)) = f'(x)$$

cioè appunto un (nuovo) sistema in evoluzione libera

- anche ad anello aperto, se la perturbazione sull'ingresso è **non persistente**

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) + \delta(t) & t \in [0, t_1] \\ u(t) & t > t_1 \end{cases}$$

il problema si riconduce allo studio dell'effetto di una perturbazione (e cioè  $x(t_1)$ ) sullo stato iniziale

# Definizioni

un importante concetto preliminare: punto di equilibrio

uno stato  $x_e \in \mathbb{R}^n$  è un **punto di equilibrio** (**pde**) per il sistema  $\dot{x} = f(x)$  se, posto  $x_0 = x_e$ , si ha  $x(t) \equiv x_e, \forall t > 0$

**nota:** si tratta di una traiettoria **degenere** del sistema

matematicamente:

$$x_e \text{ è un pde} \iff f(x_e) = 0$$

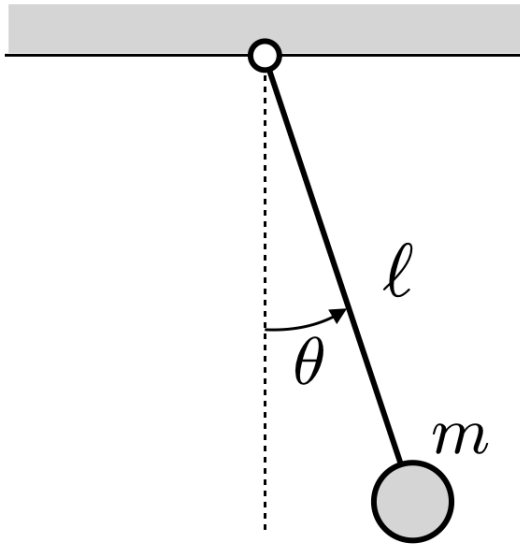
i pde sono perciò gli **zeri** della funzione vettoriale  $f(x)$

**es:** nei sistemi lineari  $\dot{x} = Ax$ , i pde sono i punti  $x_e$  tali che

$$Ax_e = 0, \quad \text{cioè} \quad x_e \in \mathcal{N}(A)$$

- se  $A$  è non singolare, l'**unico** pde è l'origine
- se  $A$  è singolare, i pde sono **infiniti** e **contigui**: geometricamente, sono iperpiani passanti per l'origine (rette se  $\dim(\mathcal{N}(A)) = 1$ , piani se  $\dim(\mathcal{N}(A)) = 2, \dots$ )

**es:** pendolo di lunghezza  $\ell$  e massa  $m$  in presenza di attrito viscoso di coefficiente  $d$



$$m \ell^2 \ddot{\theta} + d \dot{\theta} + m g \ell \sin \theta = 0$$

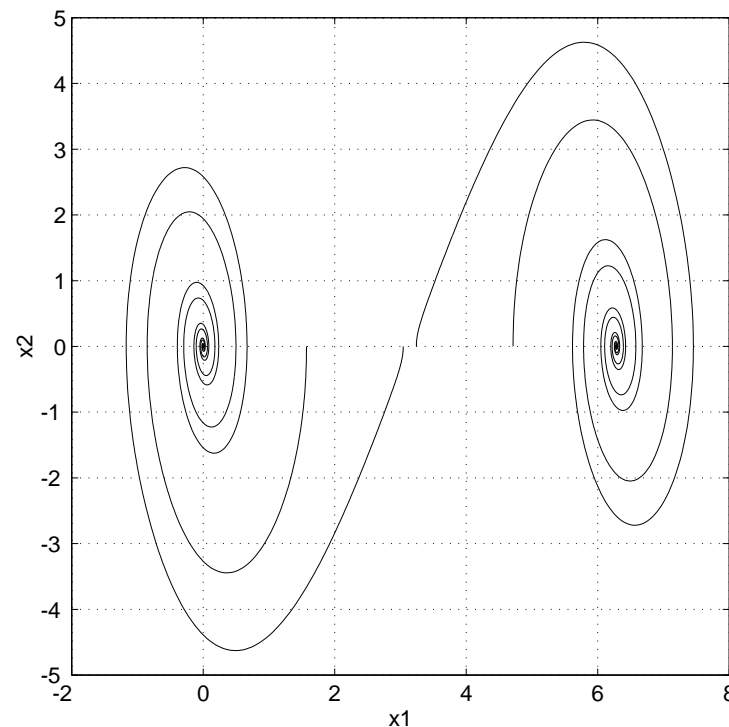
ponendo  $x = (x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta})$ , l'equazione nello spazio di stato è

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell} \sin x_1 - \frac{d}{m \ell^2} x_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x) = (x_2 \quad -\frac{g}{\ell} \sin x_1 - \frac{d}{m \ell^2} x_2)^T$ ; sistema **non lineare**!

quindi, i punti di equilibrio sono caratterizzati da  $x_1 = j\pi$  ( $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) e  $x_2 = 0$  (e cioè, pendolo (i) verticale verso il basso/l'alto e (ii) fermo)

ecco le traiettorie del pendolo nel piano  $(x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta})$  (**piano delle fasi**)



**es:** ancora un sistema non lineare

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 1 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2^2\end{aligned}$$

i pde sono caratterizzati da  $x_1 = 1$  e  $x_2 = \pm 1$  ■

**nota:** i pde di un sistema non lineare possono essere in numero finito (2 nei precedenti esempi, ma eventualmente nullo) o infinito, ed essere punti **isolati** nello spazio di stato

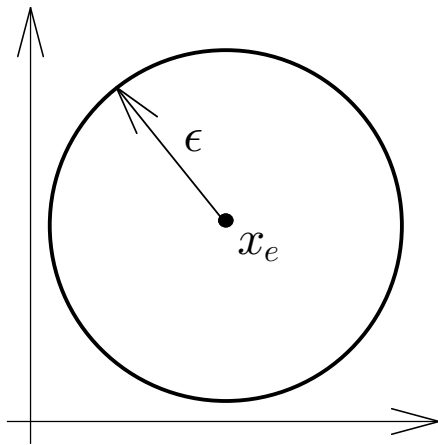


## definizioni di stabilità (secondo Lyapunov)

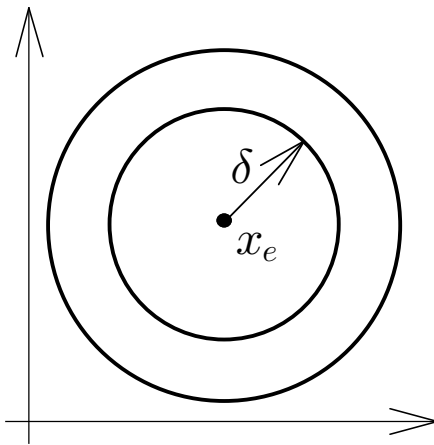
(nel seguito,  $|\cdot|$  indica una qualsiasi norma di  $\mathbb{R}^n$ )

un pde  $x_e$  si dice **stabile** (S) se:

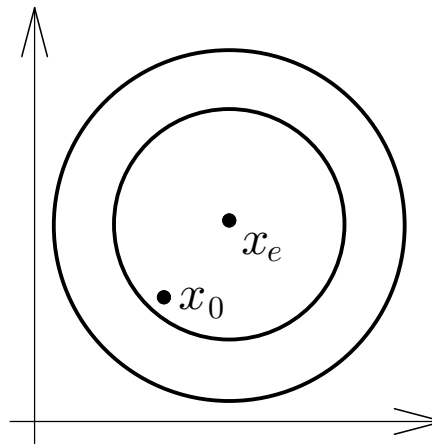
$$\forall \epsilon, \exists \delta(\epsilon) : |x_0 - x_e| < \delta \Rightarrow |x(t) - x_e| < \epsilon, \forall t > 0$$



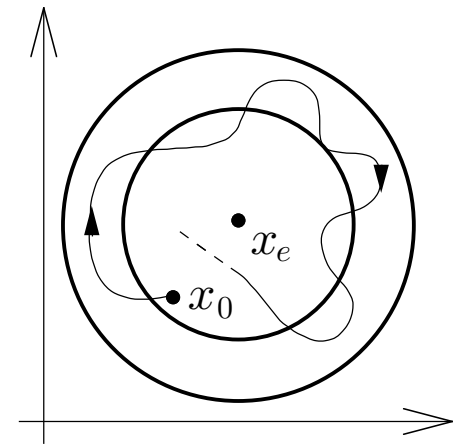
$\forall \epsilon$



$\exists \delta(\epsilon)$



$|x_0 - x_e| < \delta$



$|x(t) - x_e| < \epsilon, \forall t > 0$

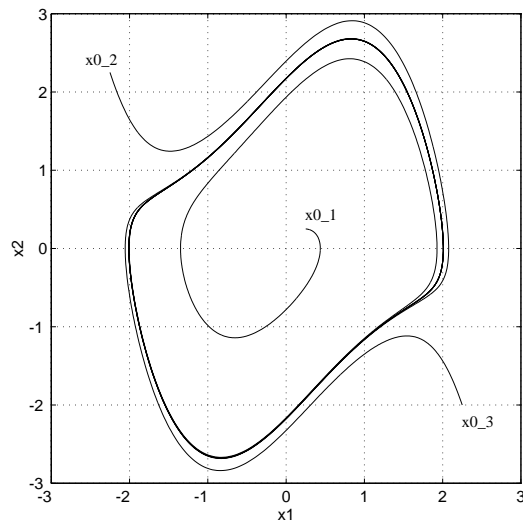
un pde  $x_e$  di un sistema dinamico è stabile se è possibile mantenere l'evoluzione del sistema **arbitrariamente vicina** a  $x_e$  prendendo la condizione iniziale  $x_0$  **sufficientemente vicina** a  $x_e$ ; ovvero, se nell'intorno di  $x_e$  è possibile limitare a piacimento lo scostamento limitando opportunamente la perturbazione

ovviamente:

un pde  $x_e$  si dice **instabile** se non è stabile

- la stabilità è una **proprietà dei pde**, non del sistema: lo stesso sistema può avere sia pde stabili che instabili (accade nei sistemi non lineari, es: pendolo)
  - nella definizione di stabilità **non** si richiede che lo stato perturbato tenda a convergere verso  $x_e$
  - d'altra parte, nella definizione di instabilità **non** si richiede che l'evoluzione perturbata tenda a divergere
- es:** oscillatore di Van der Pol (sistema MMS con damping dipendente dalla posizione)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + (1 - x_1^2)x_2\end{aligned}$$



le traiettorie nello spazio di stato mostrano che, indipendentemente dalla condizione iniziale, lo stato converge ad un **ciclo limite**: quindi, è impossibile limitare a piacimento lo scostamento da 0 (ad es., se si pone  $\epsilon = 1$  non esiste alcun  $\delta$ )

⇒ l'origine è un pde instabile per il sistema

■

in pratica, spesso la stabilità **semplice** non basta:

un pde  $x_e$  si dice **asintoticamente stabile** (AS) se:

1. è stabile

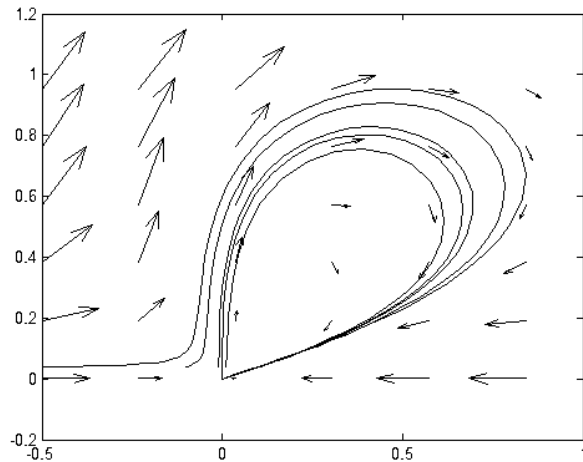
2.  $\exists \delta_a : |x_0 - x_e| < \delta_a \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_e| = 0$

- in aggiunta alla stabilità, si richiede la convergenza a  $x_e$  se la condizione iniziale è sufficientemente vicina a  $x_e$
- la stabilità asintotica è un concetto **locale**, nel senso che la convergenza si ha se  $x_0$  appartiene all'intorno di  $x_e$  avente raggio  $\delta_a$  (**dominio di attrazione**); all'esterno di tale intorno si può avere semplice limitatezza o **persino divergenza!**
- la 2. **non implica** la 1.; è possibile cioè avere la convergenza senza la stabilità (qualche volta pde di questo tipo si definiscono **quasi-stabili asintoticamente**, ma sono a tutti gli effetti pde instabili)

es: (dovuto a Vinograd)

$$\dot{x}_1 = \frac{x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^5}{(x_1^2 + x_2^2)(1 + (x_1^2 + x_2^2)^2)}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{x_2^2(x_2 - 2x_1)}{(x_1^2 + x_2^2)(1 + (x_1^2 + x_2^2)^2)}$$



le traiettorie nello spazio di stato mostrano che, indipendentemente dalla distanza di  $x_0$  dall'origine, se  $x_{1,0} < 0$  lo stato converge all'origine dopo aver toccato una curva che si trova **a distanza finita** da 0: quindi, è impossibile limitare a piacimento lo scostamento dall'origine

⇒ l'origine è un pde quasi-stabile asintoticamente (ma instabile) per il sistema

■

tuttavia, nelle applicazioni, è spesso necessario disporre di una **stima** del tempo necessario perché lo stato perturbato ritorni in  $x_e$ :

un pde  $x_e$  si dice **esponenzialmente stabile** (ES) se esistono costanti positive  $\alpha$ ,  $\lambda$  e  $c$  tali che:

$$|x(t) - x_e| \leq \alpha |x_0 - x_e| e^{-\lambda t}, \quad \forall t > 0, \quad \forall |x_0 - x_e| < c$$

- in pratica, si richiede che esista un intorno di  $x_e$  a partire dal quale la traiettoria perturbata converge a  $x_e$  con velocità almeno esponenziale (anche questo è un concetto locale)
- $\lambda$  viene detto **tasso** di convergenza esponenziale; posto  $\alpha = e^{\lambda \tau_0}$ , si trova facilmente che dopo  $(\tau_0 + 1/\lambda)$  secondi la distanza da  $x_e$  si è ridotta ad almeno  $1/e$  (circa il 35%) del suo valore iniziale
- la stabilità esponenziale **implica** la stabilità asintotica (e quindi la stabilità); il viceversa **non è vero**

**es:** l'origine è un pde asintoticamente ma non esponenzialmente stabile per il sistema

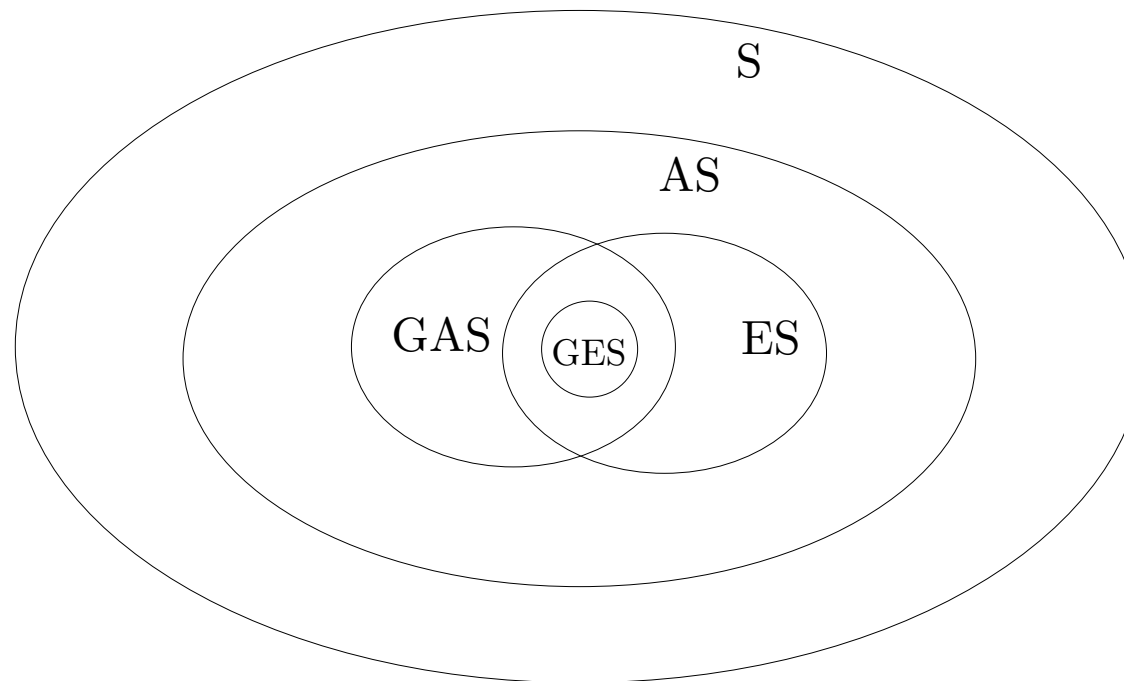
$$\dot{x} = -x^2$$

infatti, la soluzione è  $x(t) = \frac{x_0}{1 + tx_0}$ , che converge a zero più lentamente di qualsiasi funzione esponenziale ■

le proprietà di stabilità asintotica e stabilità esponenziale, che sono intrinsecamente locali, possono anche essere **globali**

- un pde si dice **globalmente asintoticamente stabile** (GAS) se è stabile e lo stato converge a  $x_e$  per **qualsiasi** stato iniziale (il dominio di attrazione coincide con tutto  $\mathbb{R}^n$ )
- un pde si dice **globalmente esponenzialmente stabile** (GES) se lo stato converge esponenzialmente a  $x_e$  per **qualsiasi** stato iniziale

riassumendo, si ha la seguente classificazione dei pde **stabili**



**nota:**  $x_e$  può essere GAS solo se è l'**unico** pde del sistema (C.N.)

# Stabilità dei sistemi lineari

## Teorema

se un sistema lineare ammette più di un pde, la stabilità (instabilità) di uno di essi implica ed è implicata da quella di tutti gli altri

**dim** basta mostrare che, se il generico pde  $x_e$  è stabile, lo è anche l'origine, e viceversa per ipotesi  $\forall \epsilon, \exists \delta(\epsilon) : |x_0 - x_e| < \delta \Rightarrow |x(t) - x_e| < \epsilon, \forall t > 0$   
 $x(t) - x_e$  è la differenza tra la risposta a partire da  $x_0$  e quella a partire da  $x_e \Rightarrow$  per la linearità,  $x(t) - x_e$  è la risposta a partire da  $x_0 - x_e = z_0$ , che indicheremo con  $x_{z_0}(t)$   
si ha dunque  $\forall \epsilon, \exists \delta(\epsilon) : |z_0| < \delta \Rightarrow |x_{z_0}(t)| < \epsilon, \forall t > 0$ , cioè la stabilità dell'origine  
analogamente si prova il 'è implicata' ■

## Teorema

in un sistema lineare:

1. si può avere stabilità asintotica solo per l'origine e solo nel caso in cui sia l'unico pde
2. se l'origine è AS, è anche GAS

**dim** 1: l'origine è sempre un pde, se ci sono altri pde sono contigui all'origine (cfr. slide 5)  
2: ovvia per sistemi stazionari a dimensione finita, considerando che affinché l'evoluzione libera  $x(t) = e^{At}x_0$  converga da un intorno dell'origine è necessario che gli autovalori di  $A$  abbiano parte reale negativa, il che implica che l'evoluzione libera converge da  $\forall x_0$  ■

## Teorema

in un sistema lineare, l'origine è ES se e solo se è AS

**dim** necessità: ovvia

sufficienza: ovvia per sistemi stazionari a dimensione finita, poiché se l'origine è AS l'evoluzione libera è combinazione di esponenziali convergenti ■

riassumendo, nei sistemi lineari:

- se l'origine è l'unico pde, può essere S, AS (in effetti ES), oppure I
- se ci sono più pde, sono infiniti, contigui e sono tutti S oppure tutti I
- in ogni caso, è lecito parlare di stabilità, stabilità asintotica (in effetti esponenziale) o instabilità **del sistema nel suo complesso**

il seguente criterio di stabilità è immediato per sistemi stazionari a dimensione finita

## Teorema

un sistema lineare stazionario a dimensione finita è S se e solo se

1. gli autovalori di  $A$  con molteplicità geometrica pari a quella algebrica hanno  $\text{Re}[\ ] \leq 0$
2. gli autovalori di  $A$  con molteplicità geometrica minore di quella algebrica hanno  $\text{Re}[\ ] < 0$

il sistema è AS (in effetti ES) se e solo se tutti gli autovalori di  $A$  hanno  $\text{Re}[\ ] < 0$

oppure, per evitare il calcolo degli autovalori: criterio di Routh

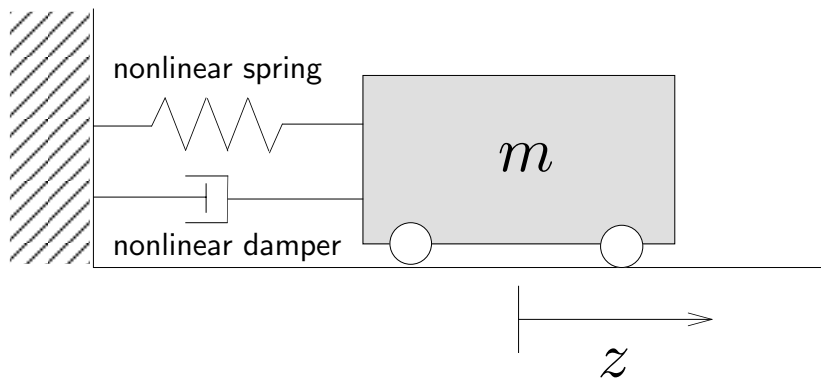


# Criterio diretto di Lyapunov

## idea di base

se l'energia totale di un sistema (meccanico, elettrico, ...) viene continuamente **dissipata**, il sistema (lineare o non lineare) tende a un punto di equilibrio  $\Rightarrow$  è possibile studiare la stabilità del punto esaminando un'**unica funzione scalare**

es: sistema MMS non lineare



$$m \ddot{z} + d \dot{z} |\dot{z}| + (k_0 z + k_1 z^3) = 0$$

unico pde: origine, ma è impossibile studiarne la stabilità usando le definizioni, poiché non siamo in grado di ottenere la soluzione dell'equazione

invece: esaminiamo l'**energia meccanica**! posto  $x = (z, \dot{z})$ , si ha

$$V(x) = V_{\text{cin}}(\dot{z}) + V_{\text{pot}}(z) = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \int_0^z (k_0 \zeta + k_1 \zeta^3) d\zeta = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} k_0 z^2 + \frac{1}{4} k_1 z^4$$

## relazioni energia/stabilità

- si ha energia nulla **solo** se  $z = 0$ ,  $\dot{z} = 0$ , cioè nell'origine
- se l'energia converge (sempre) a zero, ne segue la stabilità asintotica (globale) dell'origine
- se l'energia diverge, ne segue l'instabilità dell'origine

come varia l'energia durante il moto del sistema? basta derivare  $V$  rispetto a  $t$  (di cui è funzione composta) e sostituire a  $\ddot{z}$  l'espressione che se ne ricava dal modello dinamico

$$\dot{V}(x) = m\dot{z}\ddot{z} + (k_0z + k_1z^3)\dot{z} = -d|\dot{z}|^3$$

⇒ l'energia viene **continuamente dissipata** e il sistema converge ad uno stato con velocità nulla ( $\dot{z} = 0$ ); d'altra parte, poiché in qualsiasi posizione diversa da  $z = 0$  la massa sarebbe soggetta a una forza di richiamo  $-k_0z - k_1z^3$  non nulla, è evidente che **il sistema converge in effetti all'origine** ( $z = 0$ ,  $\dot{z} = 0$ ) ■

il metodo diretto di Lyapunov si basa appunto su una generalizzazione (e una formalizzazione rigorosa) di questo concetto: si cerca un'opportuna funzione scalare *energy-like* per il sistema dinamico non lineare in esame, e se ne esamina la variazione nel tempo lungo le traiettorie del sistema

nel seguito, faremo riferimento al generico sistema non lineare stazionario

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

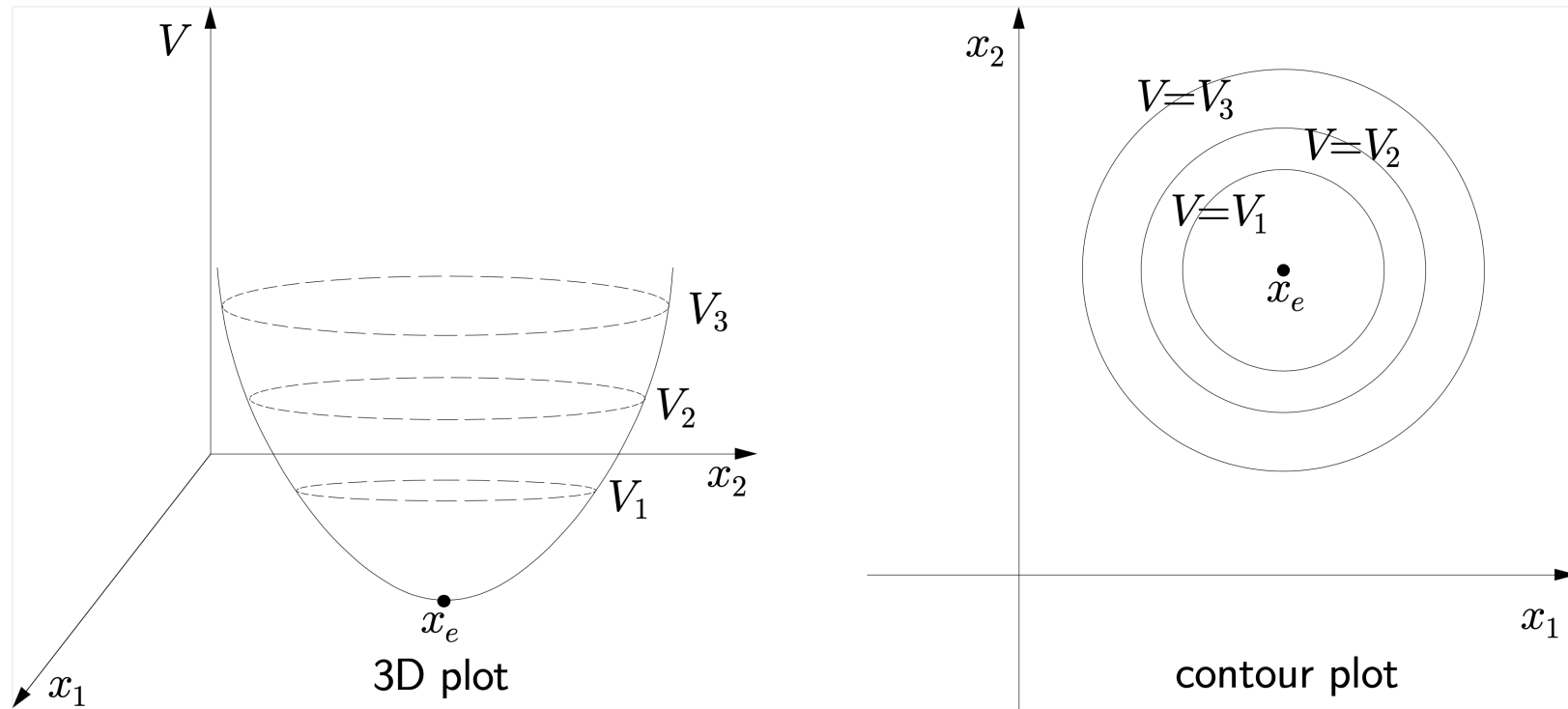
e indicheremo con  $x_e$  il pde da studiare; dunque,  $f(x_e) = 0$

concetti preliminari: data una funzione scalare  $V(x)$ , continua e derivabile rispetto a  $x$  ( $V \in C^1$ ), e detto  $S(x_e, r)$  un intorno sferico di  $x_e$  di raggio  $r$

- $V(x)$  si dice **definita positiva** (DP) in  $S(x_e, r)$  se
  - a)  $V(x_e) = 0$
  - b)  $V(x) > 0, \forall x \in S(x_e, r), x \neq x_e$
- $V(x)$  si dice **semidefinita positiva** (SDP) in  $S(x_e, r)$  se
  - a)  $V(x_e) = 0$
  - b)  $V(x) \geq 0, \forall x \in S(x_e, r), x \neq x_e$
- $V(x)$  si dice **definita negativa** (DN) in  $S(x_e, r)$  se  $-V(x)$  è definita positiva, **semidefinita negativa** (SDN) in  $S(x_e, r)$  se  $-V(x)$  è semidefinita positiva
- $V(x)$  si dice **indefinita** (I) in  $S(x_e, r)$  se non è DP, SDP, DN o SDN

**nota:**  $V(x)$  DP (DN) in  $S(x_e, r) \Rightarrow V(x)$  SDP (SDN) in  $S(x_e, r)$

caso  $n = 2$ : rappresentazione grafica **locale** di una funzione  $V$  DP in  $x_e$



**es:** in  $\mathbb{R}^2$ , la funzione  $V(x) = x^T x = x_1^2 + x_2^2$  è DP in qualsiasi intorno dell'origine (le curve di livello sono **chiuse**)

**es:** in  $\mathbb{R}^2$ , la funzione  $V(x) = x_1^2$  è SDP in qualsiasi intorno dell'origine (si annulla su tutto l'asse  $x_2$ ; le curve di livello sono **aperte**)

**es:** in  $\mathbb{R}^2$ , la funzione  $V(x) = x_1 x_2$  è I in qualsiasi intorno dell'origine (ci sono sempre punti dell'intorno dove è positiva e punti dove è negativa)

**es:** per il sistema MMS non lineare, l'energia meccanica  $V(x)$  è DP in qualsiasi intorno dell'origine

data una funzione  $V(x)$ , e considerata una soluzione  $x(t)$  della  $\dot{x} = f(x)$ , si può riguardare la  $V(x(t))$  come una funzione **composta** di  $t$ , continua e derivabile per ogni  $t$ ; si ha quindi

$$\dot{V}(t) = \frac{dV(x(t))}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x(t)) = \dot{V}(x)$$

dove  $f_i(x(t))$  è la  $i$ -esima componente della funzione vettoriale  $f(x)$

la  $\dot{V}(x)$ , considerata come una funzione della sola  $x$ , viene chiamata la **derivata di V lungo le traiettorie del sistema**

alla  $\dot{V}(x)$  è quindi ancora possibile attribuire le proprietà di definitezza positiva, negativa, semidefinitezza positiva, etc.

**es:** si consideri il sistema dinamico

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2\end{aligned}$$

il cui unico pde è l'origine, e si ponga  $V = x_1^2 + x_2^2$ , che è DP intorno all'origine; si ha

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1x_2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 = -2x_2^2$$

che è SDN intorno all'origine

■

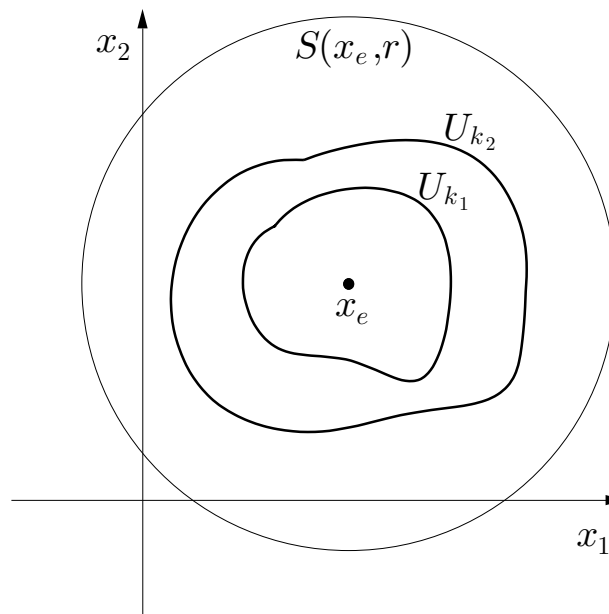
## Teorema

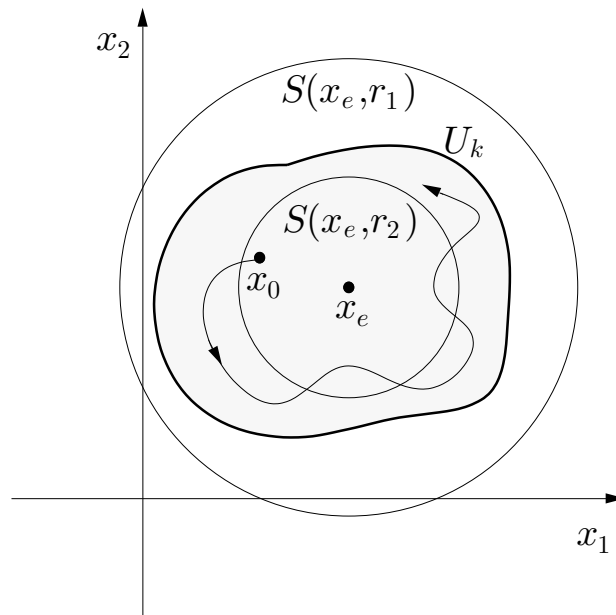
un pde  $x_e$  di un sistema  $\dot{x} = f(x)$  è **stabile** se esiste una funzione  $V(x) \in C^1$  tale che

1.  $V(x)$  sia DP in un intorno  $S(x_e, r)$
2.  $\dot{V}(x)$  sia SDN nello stesso intorno

**dim** di tipo geometrico, per  $n = 2$  (ma valida in generale)

si noti intanto che, poiché  $V(x)$  è DP in  $S(x_e, r)$ , le linee di livello  $U_k = \{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) = k\}$  sono **chiuse** per  $k$  sufficientemente piccolo; inoltre, se  $k_1 < k_2$ ,  $U_{k_1}$  è **interna** a  $U_{k_2}$





scelto  $r_1$  tale che  $0 < r_1 \leq r$ , esiste certamente un valore  $k$  tale che  $U_k$  è interna a  $S(x_e, r_1)$  (basta prendere il valore minimo di  $V$  lungo la frontiera di  $S(x_e, r_1)$ , che esiste ed è positivo perché  $V$  è continua, e scegliere  $k$  minore di tale valore); dunque  $U_k$  è chiusa

inoltre, poiché  $U_k$  è una curva chiusa che contiene  $x_e$ , è sempre possibile trovare  $r_2$  tale che  $S(x_e, r_2)$  è interno a  $U_k$

si consideri una traiettoria che origina da  $x_0 \in S(x_e, r_2)$ ; si ha  $V(x_0) < k$  ed essendo  $\dot{V}$  negativa o nulla lungo le traiettorie del sistema contenute in  $S(x_e, r)$ , la  $V(x(t))$  è **non crescente** nello stesso intorno

$\Rightarrow$  si ha  $V(x(t)) < k, \forall t > 0$ , e dunque lo stato  $x(t)$  si mantiene all'interno di  $S(x_e, r_1)$  **indefinitamente**

quindi:

$$|x_0 - x_e| < r_2 \quad \Rightarrow \quad |x(t) - x_e| < r_1, \quad \forall t > 0 \quad \text{c.d.d.} \quad \blacksquare$$

- una funzione  $V(x)$  che gode delle proprietà richieste dal teorema (cioè tale che  $V$  sia DP e  $\dot{V}$  sia SDN in un intorno di  $x_e$ ) si definisce **funzione di Lyapunov**
- il teorema stabilisce dunque che l'**esistenza** di una funzione di Lyapunov è condizione **sufficiente** per la stabilità; in effetti, per sistemi stazionari a dimensione finita si può mostrare che la condizione è anche **necessaria**
- l'applicazione del teorema passa attraverso due fasi, eventualmente ripetute:
  1. costruzione di una  $V(x)$  DP in un intorno di  $x_e$  (detta **candidata** di Lyapunov)
  2. calcolo della  $\dot{V}$  lungo le traiettorie del sistema e verifica della sua SDN nell'intorno

**nota:** se la  $V(x)$  scelta non risulta essere una funzione di Lyapunov, non si può concludere nulla; potrebbe esistere un'altra
- se  $V(x)$  è una funzione di Lyapunov per un sistema, lo è anche la funzione
 
$$V'(x) = \beta V^\gamma(x) \quad \beta > 0, \gamma > 1$$
- la scelta della candidata di Lyapunov è ovviamente cruciale: nei sistemi meccanici ed elettrici si può provare a scegliere l'energia totale, ma possono esistere scelte migliori che non hanno un'immediata interpretazione fisica



**es:** pendolo (per semplicità,  $m = 1$ ,  $d = 1$ ,  $\ell = 1$ )

il vettore di stato è  $x = (x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta})$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g \sin x_1 - x_2\end{aligned}$$

posto  $x_e^{\text{down}} = (0, 0)$ , proviamo con l'energia meccanica

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + g(1 - \cos x_1) \quad \text{DP in } S(0, 2\pi^-)$$

si ha

$$\dot{V}(x) = x_2 \dot{x}_2 + g \sin x_1 \dot{x}_1 = -x_2^2 \quad \text{SDN in } S(0, 2\pi^-) \text{ (in effetti, in qualsiasi intorno)}$$

dunque  $x_e^{\text{down}}$  è un pde **stabile** per il pendolo (e  $\dot{V}$  è la potenza dissipata) ■

però: l'intuizione fisica ci dice che, in presenza di attrito, l'origine è un pde **asintoticamente** stabile per il pendolo  $\Rightarrow$  ci serve un teorema più forte

## Teorema

un pde  $x_e$  di un sistema  $\dot{x} = f(x)$  è **asintoticamente stabile** se esiste una funzione  $V(x) \in C^1$  tale che

1.  $V(x)$  sia DP in un intorno  $S(x_e, r)$
2.  $\dot{V}(x)$  sia DN nello stesso intorno

**dim** intanto,  $x_e$  è certamente stabile; in particolare, se  $x_0 \in S(x_e, r_2)$  (cfr. dimostrazione precedente) la traiettoria rimane in  $S(x_e, r_1)$  indefinitamente  $\Rightarrow V(t)$  lungo la traiettoria tende a un valore limite  $\bar{V} \geq 0$  (perché  $\dot{V} < 0$  e  $V$  è limitata inferiormente da zero)

supponiamo  $\bar{V} > 0$ ; poiché  $V$  è continua e si azzera solo in  $x_e$ , esiste un intorno  $S(x_e, \sigma)$  in cui la traiettoria non entra mai  $\Rightarrow$  poiché anche  $\dot{V}$  è continua e si azzera solo in  $x_e$ , esiste un  $\alpha > 0$  tale che  $\dot{V} \leq -\alpha$  indefinitamente

ma allora avremmo

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \dot{V}(\tau) d\tau \leq V(0) - \alpha t$$

e quindi  $V$  diventerebbe negativa dopo un tempo finito, contraddicendo l'assunzione  $\bar{V} > 0$

quindi, se  $x_0 \in S(x_e, r_2)$  si ha  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$ ; quindi, essendo  $V(x)$  nulla solo per  $x = x_e$ , implica che  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$ , c.d.d. ■

**nota:** estrapolando le proprietà di  $S(x_e, r_2)$  dalla prova del criterio di stabilità precedente, si conclude che **qualsiasi intorno di  $x_e$  contenuto in  $U_{V^*}$**  (dove  $V^*$  è il valore minimo di  $V$  lungo la frontiera di  $S(x_e, r)$ ) è una **stima** (per difetto) del **dominio di attrazione** di  $x_e$

es: si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)\end{aligned}$$

per il quale l'origine è un punto di equilibrio

scelta

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \quad \text{DP in qualsiasi intorno dell'origine}$$

si ha

$$\dot{V}(x) = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \quad \text{DN per } x : x_1^2 + x_2^2 < 1, \text{ ovvero in } S(0, 1^-)$$

l'origine è dunque asintoticamente stabile per il sistema in questione

per stimare il dominio di attrazione:

si ponga  $U_{V^*} = \{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) \leq 1/2\} = S(0, 1^-)$ ; scelto  $\rho \in (0, 1)$ , qualunque intorno  $S(0, \rho)$  è contenuto in  $U_{V^*}$  e dunque costituisce una stima (per difetto) del **dominio di attrazione** dell'origine ■

**es:** pendolo; prendiamo la seguente candidata di Lyapunov (nessuna interpretazione fisica)

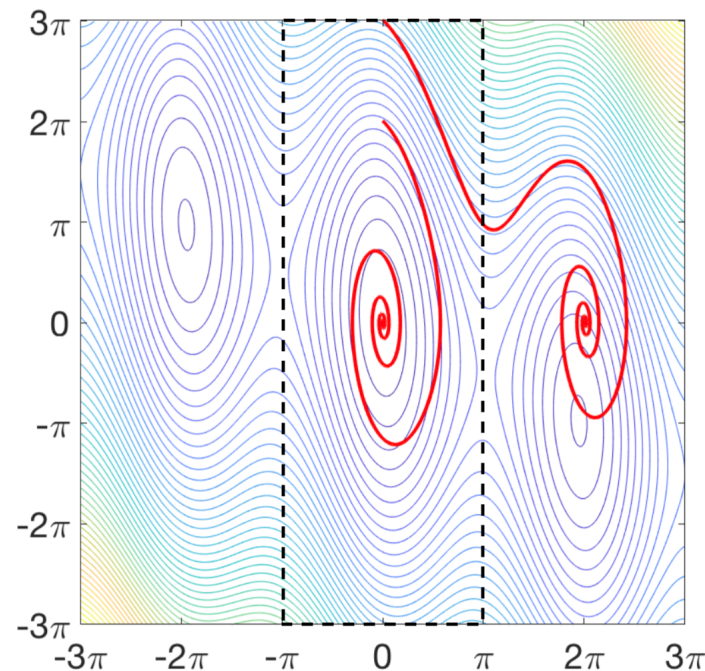
$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + 2g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 \quad \text{DP in qualsiasi intorno dell'origine}$$

si trova

$$\dot{V}(x) = -x_2^2 - gx_1 \sin x_1 \quad \text{DN in qualsiasi intorno dell'origine tale che } x_1 \in (-\pi, \pi)$$

dunque  $x_e^{\text{down}}$  è un pde **asintoticamente stabile** per il pendolo

dominio di attrazione: la convergenza all'origine è garantita da stati iniziali **interni a linee di livello interamente contenute nella regione dove  $\dot{V}$  è DN**, ma **non** a partire da stati iniziali interni a linee di livello che **escono** da tale regione, da cui **può** verificarsi divergenza



cosa succede se cerchiamo di applicare i teoremi precedenti al punto di equilibrio  $x_e^{\text{up}} = (\pi, 0)$  del pendolo? l'intuizione fisica ci dice che  $x_e^{\text{up}}$  è **instabile**, ma la condizione necessaria (e sufficiente) di stabilità è l'**esistenza** di una funzione di Lyapunov, che non possiamo escludere a priori  $\Rightarrow$  è utile disporre di un **criterio di instabilità**

### Teorema [Cetaev]

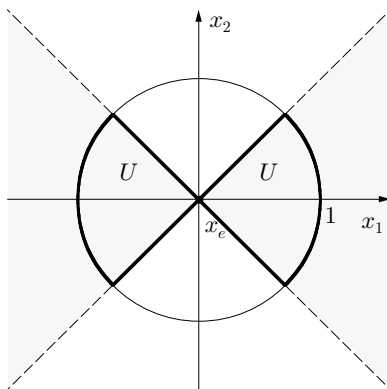
un pde  $x_e$  di un sistema  $\dot{x} = f(x)$  è **instabile** se esiste una funzione  $V(x) \in C^1$  tale che

1. l'insieme  $P = \{x : V(x) > 0\}$  ha  $x_e$  come punto di accumulazione (pda)
2.  $\dot{V}(x)$  sia DP in  $U = P \cap S(x_e, r)$ , per qualche  $r > 0$

**es:** il teorema di Cetaev mostra che il pde  $x_e = (0, 0)$  è **instabile** per il sistema dinamico

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2\end{aligned}$$

si consideri  $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2$ , che è positiva in  $P = \{x : |x_1| > |x_2|\}$ , di cui  $x_e$  è pda



si ha

$$\dot{V}(x) = x_1^2 + x_1x_2^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2(1 + x_1)$$

che è chiaramente DP in  $U = P \cap S(x_e, 1)$

è disponibile anche un criterio di stabilità asintotica **globale**

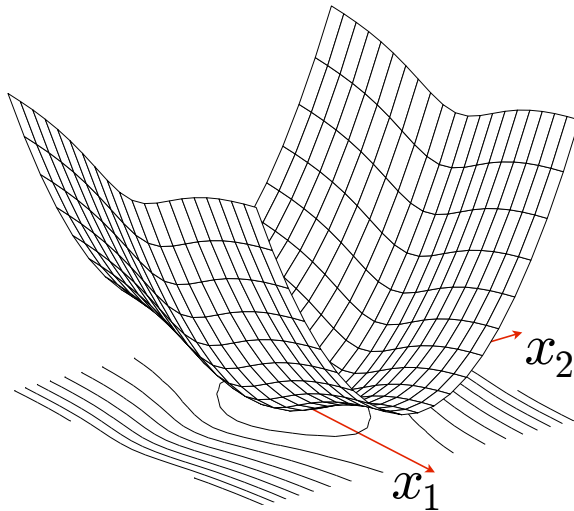
### Teorema

un pde  $x_e$  di un sistema  $\dot{x} = f(x)$  è **globalmente asintoticamente stabile** se esiste una funzione  $V(x) \in C^1$  tale che

1.  $V(x)$  sia DP in qualsiasi intorno di  $x_e$
2.  $\dot{V}(x)$  sia DN in qualsiasi intorno di  $x_e$
3.  $V(x)$  sia **radialmente illimitata**, cioè  $\lim_{|x-x_e| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$

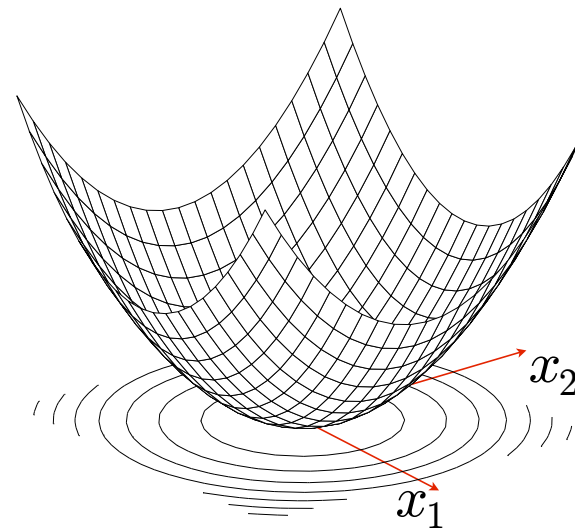
es:

$$V = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$$



radialmente limitata

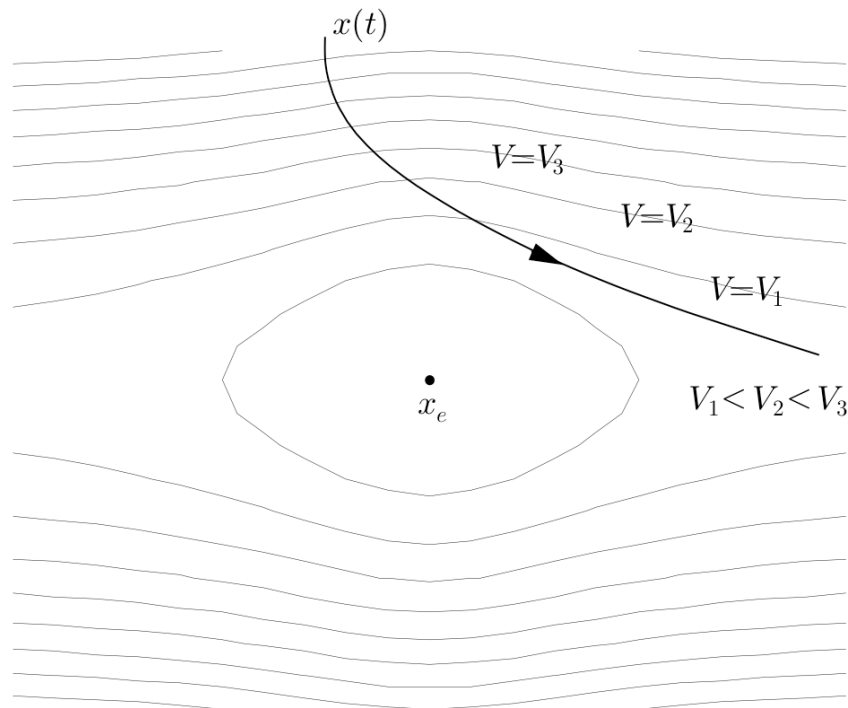
$$V = x_1^2 + x_2^2$$



radialmente illimitata

**dim** come nel caso locale, osservando che la illimitatezza radiale di  $V$ , combinata con il fatto che  $\dot{V}$  è DN in tutto  $\mathbb{R}^n$ , implica che per qualsiasi condizione iniziale  $x_0$  le traiettorie rimangono all'interno della regione **limitata** definita da  $V(x) \leq V(x_0)$  ■

**nota:** nel caso in cui  $V$  sia radialmente limitata, le curve di livello 'lontane' da  $x_e$  non sono chiuse; di conseguenza, è possibile che lo stato si allontani indefinitamente da  $x_e$  pur rimanendo all'interno della regione definita da  $V(x) \leq V(x_0)$ , e anzi attraversando curve di livello relative a valori progressivamente decrescenti di  $V$



⇒ quando  $x_0$  è sufficientemente lontano,  $x(t)$  può **non** convergere a  $x_e$

**es:** si consideri la famiglia di sistemi non lineari descritta da

$$\dot{x} = -c(x), \quad \text{con} \quad x c(x) > 0, \forall x \neq 0, \quad c(0) = 0$$

e la candidata di Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2} x^2$$

che è DP in qualsiasi intorno di  $x_e = 0$  e radialmente illimitata

essendo

$$\dot{V}(x) = x \dot{x} = -x c(x)$$

la  $\dot{V}(x)$  è DN in qualsiasi intorno di  $x_e = 0$

$\Rightarrow x_e$  è un pde globalmente asintoticamente stabile

■

riassumendo, il **criterio diretto di stabilità di Lyapunov** si basa sulle seguenti condizioni:

	$x_e$ è S	$x_e$ è AS	$x_e$ è GAS	$x_e$ è instabile
$V(x)$	DP in un $S(x_e, r)$	DP in un $S(x_e, r)$	DP in $\forall S(x_e, r)$ e rad. illim.	$x_e$ è punto di accum. di $P = \{x : V(x) > 0\}$
$\dot{V}(x)$	SDN in $S(x_e, r)$	DN in $S(x_e, r)$	DN in $\forall S(x_e, r)$	DP in $P \cap S(x_e, r)$



# Costruzione di funzioni di Lyapunov

la maggiore difficoltà nell'applicare il metodo diretto di Lyapunov per studiare un pde  $x_e$  di un sistema non lineare  $\dot{x} = f(x)$  consiste nella **scelta** della funzione  $V(x)$ ; a volte la fisica del problema fornisce un'ispirazione, ma in generale è utile procedere sistematicamente

una scelta spesso efficace consiste nello scegliere come candidata di Lyapunov una **forma quadratica** del tipo

$$V(x) = \frac{1}{2}(x - x_e)^T Q (x - x_e)$$

con la matrice  $Q : n \times n$  **simmetrica** e **definita positiva** (tale cioè che  $w^T Q w > 0, \forall w \neq 0$ )

per garantire la definitezza positiva di  $Q$  si può utilizzare la **C.N.&S. di Sylvester**

$$Q_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots \quad \det(Q) > 0$$

essendo  $Q$  simmetrica, la  $\dot{V}(x)$  risulta essere

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^T Q (x - x_e) + \frac{1}{2}(x - x_e)^T \dot{Q} (x - x_e) + \frac{1}{2}(x - x_e)^T Q \dot{x} = (x - x_e)^T Q \dot{x} + \frac{1}{2}(x - x_e)^T \dot{Q} (x - x_e)$$

**es:** si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 + k_2 x_3 \\ \dot{x}_3 &= -2x_2 - x_3^3\end{aligned}$$

con  $k_1, k_2 > 0$ ; l'origine è l'unico pde

- posto

$$V(x) = \frac{1}{2}(x - x_e)^T I_{3 \times 3}(x - x_e) = \frac{1}{2}x^T x = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

che è DP in qualsiasi intorno dell'origine e radialmente illimitata, si trova

$$\dot{V}(x) = x^T \dot{x} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 + x_3 \dot{x}_3 = -k_1 x_1^2 - x_2^4 + (k_2 - 2)x_2 x_3 - x_3^4$$

per  $k_2 = 2$ ,  $\dot{V}(x)$  è DN in qualsiasi intorno dell'origine, che è in questo caso GAS

- si può fare un'analisi molto più generale ponendo  $Q = \text{diag}(1, \frac{2}{k_2}, 1)$

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T Q x = \frac{1}{2}(x_1^2 + \frac{2}{k_2}x_2^2 + x_3^2) \quad \implies \quad \dot{V}(x) = -k_1 x_1^2 - \frac{2}{k_1}x_2^4 - x_3^4$$

che per  $k_1, k_2 > 0$  è sempre DN  $\Rightarrow$  l'origine è GAS in ogni caso! ■

## metodo di Krasovski

assumendo che l'origine sia un pde per  $\dot{x} = f(x)$  (altrimenti: traslazione  $x_e \rightarrow O$ ), provare come candidata di Lyapunov la  $V(x) = f^T(x)f(x)$ , chiaramente DP in un intorno di  $x_e$

### Teorema

indicata con  $J(x) = df/dx$  la matrice Jacobiana della funzione  $f$ :

- se la matrice  $F(x) = J(x) + J^T(x)$  è definita negativa in un intorno  $S(x_e, r)$  allora  $x_e$  è **asintoticamente stabile**
- se  $F(x) = J(x) + J^T(x)$  è definita negativa in tutto  $\mathbb{R}^n$  e  $V(x) = f^T(x)f(x)$  è radialmente illimitata, allora  $x_e$  è **globalmente asintoticamente stabile**

**dim** posto  $V(x) = f^T(x)f(x)$ , si ha  $\dot{V} = 2f^T(x)\dot{f}(x) = 2\dot{x}^T \frac{df}{dx} \dot{x}$  che, se  $F(x)$  è definita negativa, è anch'essa DN  $\Rightarrow V$  è una funzione di Lyapunov ■

**es:** l'origine è un pde GAS per il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_2^3\end{aligned}$$

infatti si ha

$$J(x) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 - 3x_2^2 \end{pmatrix} \implies F(x) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2 - 6x_2^2 \end{pmatrix}$$

dalla condizione di Sylvester,  $-F(x)$  è definita positiva in tutto  $\mathbb{R}^n$ ; quindi  $F(x)$  è definita negativa in tutto  $\mathbb{R}^n$  e inoltre

$$V(x) = f^T(x)f(x) = (-3x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2 - x_2^3)^2 \rightarrow \infty \text{ per } |x| \rightarrow \infty \quad \blacksquare$$

## metodo del gradiente variabile

si basa sull'osservazione che, se  $V(x)$  è una funzione di Lyapunov per il pde  $x_e$  del sistema  $\dot{x} = f(x)$ , allora

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dx} \dot{x} = \nabla V^T(x) \dot{x} \quad \nabla V(x) : \text{gradiente di } V \text{ rispetto a } x$$

l'idea di base è di **scegliere direttamente  $\nabla V(x)$**  (invece che  $V(x)$ ), in modo da ottenere  $V$  DP e  $\dot{V}$  DN; generalmente si pone

$$\nabla V_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) x_j$$

affinché  $\nabla V(x)$  sia un gradiente, si deve imporre la condizione che (Th. di Schwartz)

$$\frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i} \quad i, j = 1, \dots, n$$

si cerca di scegliere gli  $a_{ij}$  in modo che (i) sia verificata questa condizione; (ii)  $\dot{V}(x)$  sia DN in un intorno  $S(x_e, r)$ ; e infine

$$(iii) \quad V(x) = \int_0^x \frac{dV}{dx} dx = \int_0^x \nabla V^T(x) dx \quad \text{sia DP in } S(x_e, r)$$

**nota:** poiché  $V(x)$  dipende solo da  $x$ , l'integrale è indipendente dal percorso di integrazione; conviene dunque usare un percorso di integrazione allineato di volta in volta con gli assi  $x_1, \dots, x_n$ , cioè

$$V(x) = \int_0^{x_1} \nabla V_1^T(x_1, 0, \dots, 0) dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2^T(x_1, x_2, 0, \dots, 0) dx_2 + \dots + \int_0^{x_n} \nabla V_n^T(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n$$

**es:** si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1x_2^2\end{aligned}$$

e si scelga la seguente forma per  $\nabla V(x)$

$$\begin{aligned}\nabla V_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \nabla V_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{aligned}$$

la condizione di simmetria

$$x_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial x_2} + a_{12} + x_2 \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} = x_2 \frac{\partial a_{22}}{\partial x_1} + a_{21} + x_1 \frac{\partial a_{21}}{\partial x_1}$$

si può soddisfare ponendo  $a_{12} = a_{21} = \text{cost}$  e  $a_{11} = \text{cost}$ ,  $a_{22} = \text{cost}$ . Ad esempio, si può provare con  $a_{12} = a_{21} = 0$ , cioè  $\nabla V_1 = a_{11}x_1$  e  $\nabla V_2 = a_{22}x_2$ . Ne segue

$$\dot{V}(x) = (a_{11}x_1 \ a_{22}x_2)^T \dot{x} = -a_{11}x_1^2 - a_{22}x_2^2(1 - x_1x_2)$$

che, se  $a_{11} > 0$ ,  $a_{22} > 0$ , risulta DN in qualsiasi intorno dell'origine tale che  $x_1x_2 < 1$  (ad esempio, la crf di raggio 1). Proviamo dunque a porre  $a_{11} = a_{22} = 1$ . Troviamo

$$V(x) = \int_0^{x_1} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 dx_2 = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 \quad \text{DP in qualsiasi intorno dell'origine}$$

$\Rightarrow$  l'origine è un pde AS

# Teorema dell'insieme invariante

spesso la funzione di Lyapunov scelta ha una derivata  $\dot{V}(x)$  che è **solo SDN** (e non DN); in queste condizioni, si può concludere la stabilità semplice di  $x_e$  ma non l'eventuale stabilità asintotica (cfr: la prima funzione di Lyapunov per il pendolo)

in queste condizioni, il **teorema dell'insieme invariante** consente di analizzare più a fondo la situazione

un sottoinsieme  $G \subset \mathbb{R}^n$  dello spazio di stato si dice **insieme invariante** per un sistema dinamico  $\dot{x} = f(x)$  se qualsiasi traiettoria  $x(t)$  del sistema che parte da un punto  $x_0 \in G$  rimane indefinitamente in  $G$

è una generalizzazione del concetto di punto di equilibrio; esempi di insiemi invarianti:

- qualsiasi punto di equilibrio
- il dominio di attrazione di un punto di equilibrio AS
- qualsiasi traiettoria del sistema (purché questo sia stazionario)
- $\mathbb{R}^n$  stesso

## idea di base

se  $V(x)$  è DP in un intorno di  $x_e$  e  $\dot{V}(x)$  è SDN nello stesso intorno  $\Rightarrow$  partendo da qualunque punto dell'intorno,  $\dot{V}(t)$  tende a zero e  $V(t)$  tende a un valore limite

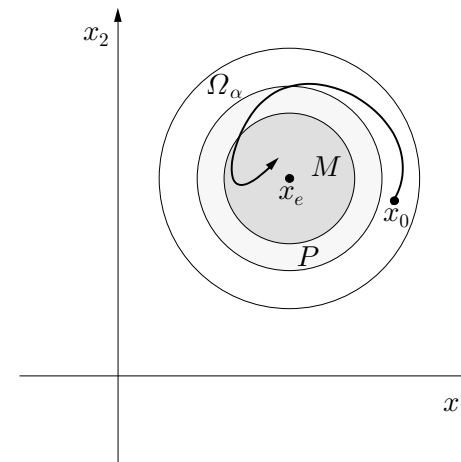
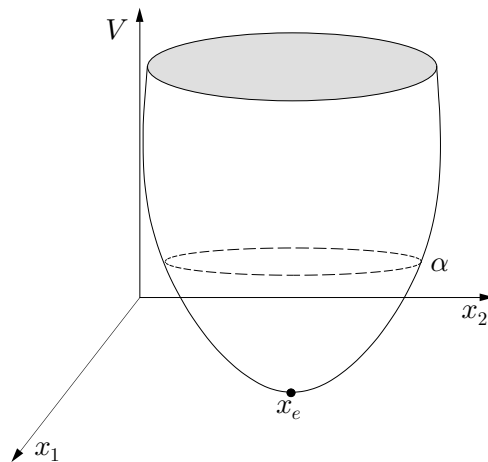
## Teorema locale dell'insieme invariante [LaSalle]

per un sistema  $\dot{x} = f(x)$ , si assuma che esista una funzione  $V(x) \in C^1$  tale che:

1. la regione  $\Omega_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \alpha\}$  sia limitata, per qualche  $\alpha > 0$
2.  $\dot{V}(x) \leq 0$  in  $\Omega_\alpha$

allora, ogni traiettoria del sistema che parte da  $\Omega_\alpha$  tende asintoticamente all'insieme  $M$ , il **massimo insieme invariante** contenuto in  $P$ , l'insieme dei punti di  $\Omega_\alpha$  dove  $\dot{V} = 0$

qui: massimo insieme invariante contenuto in  $P =$  unione di tutti i sottoinsiemi invarianti di  $P$



si noti come il criterio di AS sia un caso particolare di questo teorema con  $P = M = x_e$

l'uso del teorema dell'insieme invariante consente, in certi casi, di concludere la stabilità asintotica anche in presenza di una  $\dot{V}$  SDN

in particolare, si può enunciare il seguente

### Corollario [LaSalle]

un pde  $x_e$  di un sistema  $\dot{x} = f(x)$  è **asintoticamente stabile** se esiste una funzione  $V(x) \in C^1$  tale che

1.  $V(x)$  sia DP in un insieme  $D$  che contiene  $x_e$  al suo interno
2.  $\dot{V}(x)$  sia SDN nello stesso insieme
3. il massimo insieme invariante  $M$  contenuto in  $P$  (l'insieme dei punti di  $D$  per cui  $\dot{V} = 0$ ) contenga solo  $x_e$

inoltre, detta  $\Omega_\alpha$  una regione limitata definita dalla  $V(x) \leq \alpha$ ,  $\alpha > 0$  e contenuta in  $D$ , si ha che  $\Omega_\alpha$  costituisce una stima per difetto del **dominio di attrazione** per  $x_e$

- rispetto al criterio diretto di AS di Lyapunov, questo corollario 'rilassa' la condizione 2 (DN  $\rightarrow$  SDN) ma aggiunge la 3; inoltre la condizione 1 del corollario garantisce la condizione 1 del Teorema Locale dell'Insieme Invariante
- l'insieme  $D$  di per sé non è una stima del dominio di attrazione (in sostanza, alcune delle curve di livello che cadono in  $D$  possono essere aperte, e dunque esso risulterebbe non invariante)



**es:** riprendiamo in esame il pendolo con la prima funzione di Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + g(1 - \cos x_1) \quad \text{DP in } S(0, \pi^-)$$

si ha

$$\dot{V}(x) = x_2\dot{x}_2 + g \sin x_1 \dot{x}_1 = -x_2^2 \quad \text{SDN in qualsiasi intorno dell'origine}$$

come già osservato, questo ci consente di dire che  $x_e^{\text{down}} = (0, 0)$  è un pde stabile per il pendolo; ma il teorema dell'insieme invariante **dice qualcosa in più**

l'insieme  $P$  è costituito dagli stati in  $S(0, \pi^-)$  per cui  $\dot{V} = 0$ , ovvero dai punti di  $S(0, \pi^-)$  aventi  $x_2 = 0$ ; qual è il massimo insieme invariante  $M$  contenuto in  $P$ ?

la dinamica del sistema in  $P$  è

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 \\ \dot{x}_2 &= -g \sin x_1 \end{aligned}$$

se  $x_1 \neq 0$ , si ha  $\dot{x}_2 \neq 0$  e quindi  $x_2$  varia, facendo uscire la traiettoria  $x(t)$  dall'insieme  $P$

$\Rightarrow$  l'insieme  $M$  consiste solo dell'origine, cui dunque converge qualsiasi traiettoria

dunque  $x_e^{\text{down}}$  è un pde **asintoticamente stabile** per il pendolo

**nota:** in effetti la  $V(x)$  è DP in  $S(0, 2\pi^-)$ ; abbiamo ristretto l'analisi a  $S(0, 2\pi^-)$  perché altrimenti  $M$  avrebbe compreso oltre a  $x_e^{\text{down}}$  anche i punti  $(0, \pm\pi)$ , cioè  $x_e^{\text{up}}$ ! e non avremmo potuto concludere la AS di  $x_e^{\text{down}}$

**dominio di attrazione:** si può stimare (per difetto) come l'insieme delimitato dalla più ampia linea di livello di  $V$  contenuta all'interno di  $S(0, 2\pi^-)$  ■

il teorema dell'insieme invariante ammette ovviamente una versione globale

### Teorema globale dell'insieme invariante [LaSalle]

per un sistema  $\dot{x} = f(x)$ , si assuma che esista una funzione  $V(x) \in C^1$  tale che:

1.  $V(x)$  sia radialmente illimitata
2.  $\dot{V}(x) \leq 0$  in tutto  $\mathbb{R}^n$

allora, ogni traiettoria del sistema tende asintoticamente all'insieme  $M$ , il **massimo insieme invariante** contenuto in  $P$ , l'insieme dei punti di  $\mathbb{R}^n$  dove  $\dot{V} = 0$

**nota:** il fatto che  $V(x)$  sia radialmente illimitata garantisce che qualsiasi regione  $\Omega_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < \alpha\}$ , con  $\alpha > 0$ , sia limitata

cui corrisponde il seguente

### Corollario [LaSalle]

un pde  $x_e$  di un sistema  $\dot{x} = f(x)$  è **globalmente asintoticamente stabile** se esiste una funzione  $V(x) \in C^1$  tale che

1.  $V(x)$  sia DP in qualsiasi intorno di  $x_e$  e radialmente illimitata
2.  $\dot{V}(x)$  sia SDN in qualsiasi intorno di  $x_e$
3. il massimo insieme invariante  $M$  contenuto in  $P$  (l'insieme dei punti di  $\mathbb{R}^n$  per cui  $\dot{V} = 0$ ) contenga solo  $x_e$

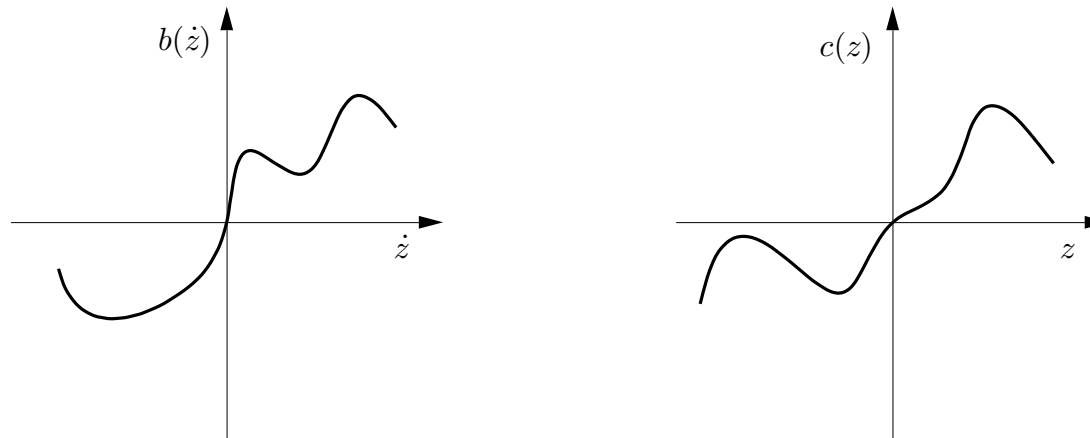
**es:** si consideri la famiglia di sistemi non lineari del secondo ordine descritta da

$$\ddot{z} + b(\dot{z}) + c(z) = 0$$

dove le funzioni generiche  $b$  e  $c$  sono continue e verificano le condizioni

$$\dot{z} b(\dot{z}) > 0, \forall \dot{z} \neq 0 \quad z c(z) > 0, \forall z \neq 0$$

si noti che queste condizioni, insieme alla continuità, implicano che  $b(0) = 0$ ,  $c(0) = 0$



fanno parte di questa famiglia i sistemi meccanici massa-molla-smorzatore (con molla e smorzatore non lineari, rappresentati rispettivamente dalla forza di richiamo elastica  $c(z)$  e dalla forza di attrito  $b(\dot{z})$ ) e i circuiti elettrici RLC (con resistenza  $b(\dot{z})$  e capacità  $c(z)$  non lineari)

si consideri il punto di equilibrio  $x_e = (z_e, \dot{z}_e) = (0, 0)$ ; una candidata di Lyapunov è l'energia totale del sistema (ad esempio, cinetica + potenziale)

$$V(x) = \frac{1}{2} \dot{z}^2 + \int_0^z c(y) dy$$

che è DP in qualsiasi intorno di  $x_e$

si ha

$$\dot{V}(z) = \dot{z}\ddot{z} + c(z)\dot{z} = -\dot{z}b(\dot{z}) - \dot{z}c(z) + c(z)\dot{z} = -\dot{z}b(\dot{z})$$

che nelle ipotesi del problema è SDN in qualsiasi intorno di  $x_e = 0$

l'insieme  $P$  è costituito dagli stati per cui  $\dot{V} = 0$ , ovvero dai punti aventi  $\dot{z} = 0$ ; qual è il massimo insieme invariante  $M$  contenuto in  $P$ ?

la dinamica del sistema in  $P$  è

$$\ddot{z} = -c(z)$$

se  $z \neq 0$ , si ha  $\ddot{z} \neq 0$  e quindi  $\dot{z}$  varia, facendo uscire la traiettoria  $x(t)$  dall'insieme  $P \Rightarrow$  l'insieme  $M$  consiste solo dell'origine, cui dunque converge qualsiasi traiettoria

dunque l'origine è un pde **asintoticamente stabile** per il sistema

inoltre, se  $\int_0^z c(y) dy$  è illimitato per  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $V(x)$  risulta essere radialmente illimitata, e quindi  $x_e$  è un pde **globalmente asintoticamente stabile** ■

# Criterio indiretto di Lyapunov

## idea di base

analizzare la stabilità dell'**approssimazione lineare** del sistema intorno al punto di equilibrio  $x_e$ : in certe condizioni, è possibile trarre da ciò conclusioni sulla stabilità o meno di  $x_e$  **per il sistema originario**

si consideri il generico sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{con } x_e \text{ pde, cioè } f(x_e) = 0$$

nell'ipotesi che  $f \in C^\infty$ , la si può sviluppare in serie di Taylor nell'intorno di  $x_e$

$$f(x) = f(x_e) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_e} (x - x_e) + h(x - x_e) = J(x_e)(x - x_e) + h(x - x_e)$$

dove  $h(x - x_e)$  raccoglie gli (infiniti) termini di grado superiore al primo e  $J(x_e)$  è la matrice Jacobiana di  $f$  rispetto a  $x$ , calcolata in  $x_e$

effettuiamo una trasformazione di coordinate

$$\xi = x - x_e \quad \implies \quad \dot{\xi} = \dot{x} = f(x) = J(x_e)\xi + h(\xi)$$

nell'intorno di  $x_e$ , i termini di ordine superiore sono trascurabili rispetto a quello lineare  $\Rightarrow$  si può associare al sistema non lineare originario la seguente **approssimazione lineare**

$$\dot{\xi} = J(x_e)\xi$$

che è naturalmente tanto più accurata quanto più lo stato è prossimo a  $x_e$

l'analisi dell'approssimazione lineare  $\dot{\xi} = J(x_e)\xi$  conduce a risultati interessanti sul sistema non lineare originario  $\dot{x} = f(x)$

### Teorema

se la matrice  $J(x_e)$  è **non singolare**,  $x_e$  è un pde **isolato** del sistema non lineare

**dim** per assurdo: se ciò non fosse vero, in qualsiasi intorno di  $x_e$  cadrebbe almeno un punto  $x'_e$  tale che  $f(x'_e) = f(x_e) = 0$ ; si avrebbe allora

$$f(x'_e) = f(x_e) + J(x_e)(x'_e - x_e) + h(x'_e - x_e) = 0 \implies J(x_e)(x'_e - x_e) + h(x'_e - x_e) = 0$$

poiché  $x'_e$  varia, tale condizione richiede di fatto che siano nulli entrambi gli addendi, in particolare, deve essere  $J(x_e)(x'_e - x_e) = 0$ , che però contraddice il fatto che  $J(x_e)$  sia non singolare ■

il viceversa non è vero; può accadere che  $x_e$  sia isolato e  $J(x_e)$  risulti singolare

**es:** si consideri il sistema non lineare

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_2\end{aligned}$$

il cui unico pde è l'origine; tuttavia

$$J(x_e) = \left( \begin{array}{cc} 2x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \Big|_{x_e} = \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$$

che è singolare ■

il risultato più forte è il seguente

**Teorema** (**criterio indiretto di stabilità di Lyapunov**)

si consideri l'approssimazione lineare  $\dot{\xi} = J(x_e)\xi$  di un sistema non lineare  $\dot{x} = f(x)$  intorno a un suo punto di equilibrio  $x_e$

1. se tutti gli autovalori di  $J(x_e)$  hanno parte reale negativa ( $\Rightarrow$  l'approssimazione lineare è AS)  $x_e$  è un pde **asintoticamente stabile** per il sistema non lineare
2. se almeno uno degli autovalori di  $J(x_e)$  ha parte reale positiva ( $\Rightarrow$  l'approssimazione lineare è I)  $x_e$  è un pde **instabile** per il sistema non lineare

**dim** basata sull'applicazione del criterio diretto di Lyapunov: in particolare, si dimostra che una funzione di Lyapunov per l'approssimazione lineare risulta essere tale anche per il sistema non lineare

comunque: la tesi è intuitiva per **continuità** ■

- la stabilità asintotica dell'origine dell'approssimazione lineare (che è sempre globale) consente di concludere solo la stabilità asintotica **locale** di  $x_e$  per il sistema non lineare
- in effetti il teorema contiene anche un criterio di **instabilità**
- se nessun autovalore di  $J(x_e)$  ha parte reale positiva, ma qualcuno di essi ha parte reale nulla ( $\Rightarrow$  l'approssimazione lineare è SS o I, a seconda della relazione tra molteplicità geometrica e algebrica per questi autovalori) si è nel **caso critico**: non si può concludere **nulla** sulla natura del pde  $x_e$  per il sistema non lineare (sono decisivi i termini di ordine superiore al primo)

**es:** riprendiamo ancora in esame il pendolo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g \sin x_1 - x_2\end{aligned}$$

la matrice Jacobiana è

$$J(x) = \frac{df}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g \cos x_1 & -1 \end{pmatrix}$$

- nell'intorno del pde  $x_e^{\text{down}} = (0, 0)$  si ha

$$J_e^{\text{down}}(x) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_e^{\text{down}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g & -1 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è  $\lambda^2 + \lambda + g$ ; quindi l'approssimazione lineare del pendolo nell'intorno di  $x_e^{\text{down}}$  è AS

$\implies x_e^{\text{down}}$  è un pde asintoticamente stabile per il pendolo

- nell'intorno del pde  $x_e^{\text{up}} = (\pi, 0)$  si ha

$$J_e^{\text{up}}(x) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_e^{\text{up}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & -1 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è  $\lambda^2 + \lambda - g$ ; quindi l'approssimazione lineare del pendolo nell'intorno di  $x_e^{\text{up}}$  è I

$\implies x_e^{\text{up}}$  è un pde instabile per il pendolo

■



spesso, tuttavia, il criterio indiretto **non è risolutivo** perché ci si trova nel caso critico; in questi casi si deve ricorrere al criterio diretto, che è più potente (e, con l'aiuto del teorema dell'insieme invariante, consente anche di stabilire l'eventuale dominio di attrazione, che non è direttamente analizzabile con il metodo indiretto)

**es:** si consideri il sistema non lineare

$$\dot{x} = -x^3$$

avente come unico pde  $x_e = 0$

la Jacobiana è in questo caso uno scalare

$$J(x_e) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_e} = -3x^2 \Big|_{x_e} = 0$$

e dunque l'approssimazione lineare del sistema intorno a  $x_e$  è  $\dot{\xi} = 0 \Rightarrow$  siamo nel **caso critico**

si consideri allora la seguente candidata di Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{DP in qualsiasi intorno dell'origine, e radialmente illimitata}$$

si ha

$$\dot{V}(x) = -x^4 \quad \text{DN in qualsiasi intorno dell'origine}$$

$\Rightarrow x_e = 0$  è dunque un pde GAS per il sistema (prevedibile, cfr. esempio slide 31) ■