

Teoria della Stabilità per Sistemi Non Lineari

G. Oriolo

Sapienza Università di Roma

Introduzione

consideriamo un generico sistema dinamico **non lineare** stazionario

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x)\end{aligned}$$

con stato $x \in \mathbb{R}^n$, ingresso $u \in \mathbb{R}^p$, uscita $y \in \mathbb{R}^q$

problema tipico

calcolare, dati $x_0 = x(0)$ e $u_{[0,t]}$, lo stato $x(t)$ e l'uscita $y(t)$ per valori di $t > 0$

es: nei sistemi lineari, dove $f(x, u) = Ax + Bu$, si ha

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

tuttavia

spesso non si ha interesse a stabilire esplicitamente la soluzione, ma piuttosto a determinarne alcune proprietà come **limitatezza**, **comportamento asintotico**, ...

\implies teoria **qualitativa** delle equazioni differenziali (Poincaré 1880, Lyapunov 1892, LaSalle e Lefschetz 1947...)

idea di base

valutare il comportamento qualitativo del sistema in corrispondenza a **perturbazioni** dello stato iniziale e dell'ingresso del sistema rispetto a valori nominali

indicata con $x(t)$ l'evoluzione dello stato in corrispondenza a x_0 e $u_{[0,t]}$, ci si chiede:

- cosa succede se $x_0 \rightarrow x_0 + \Delta x_0$?
- cosa succede se $u(t) \rightarrow u(t) + \Delta u(t)$?

in particolare:

- quanto è **prossima** l'evoluzione perturbata a quella nominale?
- sotto quali condizioni le due soluzioni tendono a **coincidere** per $t \rightarrow \infty$?

qualitativamente, appare naturale chiamare

- **stabile** un sistema nel quale piccole perturbazioni danno luogo a piccoli scostamenti
- **instabile** un sistema nel quale piccole perturbazioni danno luogo ad ampi scostamenti

teoria della stabilità

definizioni

proprietà di stabilità (diversi tipi in relazione al comportamento del sistema e alle esigenze applicative) e di instabilità

condizioni

che un sistema deve soddisfare per godere dell'una o dell'altra di queste proprietà

criteri

per verificare la sussistenza o meno delle condizioni senza calcolare esplicitamente la soluzione perturbata del sistema

es: nei sistemi lineari

- definizione di stabilità, stabilità asintotica, instabilità
- condizione di stabilità asintotica: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)|_{u \equiv 0} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} x_0 = 0$
- criteri di stabilità asintotica: $\sigma(A) \in \mathcal{C}^-$, criterio di Routh, oppure criterio di Nyquist per sistemi retroazionati

generalmente si considera il comportamento di sistemi **in evoluzione libera**

$$\dot{x} = f(x)$$

rispetto a perturbazioni dello stato iniziale x_0

infatti:

- scelta una legge di controllo in retroazione $u = h(x)$, la dinamica **ad anello chiuso** diventa

$$\dot{x} = f(x, h(x)) = f'(x)$$

cioè appunto un (nuovo) sistema in evoluzione libera

- anche ad anello aperto, se la perturbazione sull'ingresso è **non persistente**

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) + \delta(t) & t \in [0, t_1] \\ u(t) & t > t_1 \end{cases}$$

il problema si riconduce allo studio dell'effetto di una perturbazione (e cioè $x(t_1)$) sullo stato iniziale

Definizioni

un importante concetto preliminare: punto di equilibrio

uno stato $x_e \in \mathbb{R}^n$ è un **punto di equilibrio** (**pde**) per il sistema $\dot{x} = f(x)$ se, posto $x_0 = x_e$, si ha $x(t) \equiv x_e, \forall t > 0$

nota: si tratta di una traiettoria **degenere** del sistema

matematicamente:

$$x_e \text{ è un pde} \iff f(x_e) = 0$$

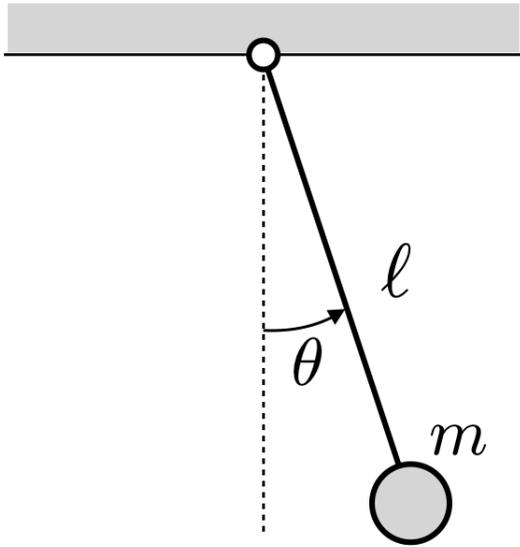
i pde sono perciò gli **zeri** della funzione vettoriale $f(x)$

es: nei sistemi lineari $\dot{x} = Ax$, i pde sono i punti x_e tali che

$$Ax_e = 0, \quad \text{cioè} \quad x_e \in \mathcal{N}(A)$$

- se A è non singolare, l'**unico** pde è l'origine
- se A è singolare, i pde sono **infiniti** e **contigui**: geometricamente, sono iperpiani passanti per l'origine (rette se $\dim(\mathcal{N}(A)) = 1$, piani se $\dim(\mathcal{N}(A)) = 2, \dots$)

es: pendolo di lunghezza ℓ e massa m in presenza di attrito viscoso di coefficiente d



$$m \ell^2 \ddot{\theta} + d \dot{\theta} + m g \ell \sin \theta = 0$$

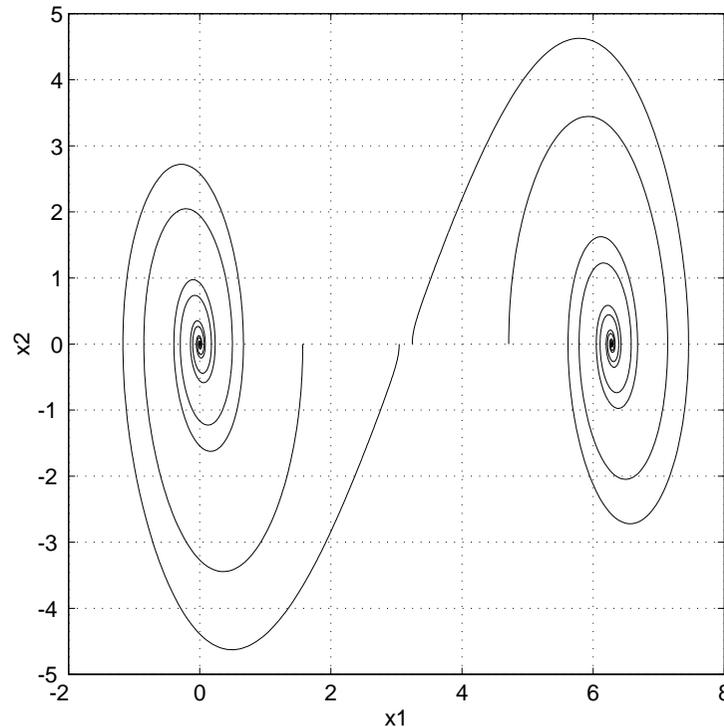
ponendo $x = (x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta})$, l'equazione nello spazio di stato è

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell} \sin x_1 - \frac{d}{m \ell^2} x_2 \end{aligned}$$

$\implies f(x) = (x_2 \quad -\frac{g}{\ell} \sin x_1 - \frac{d}{m \ell^2} x_2)^T$; sistema **non lineare!**

quindi, i punti di equilibrio sono caratterizzati da $x_1 = j\pi$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) e $x_2 = 0$ (e cioè, pendolo (i) verticale verso il basso/l'alto e (ii) fermo)

ecco le traiettorie del pendolo nel piano $(x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta})$ (**piano delle fasi**)



es: ancora un sistema non lineare

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 1 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2^2\end{aligned}$$

i pde sono caratterizzati da $x_1 = 1$ e $x_2 = \pm 1$ ■

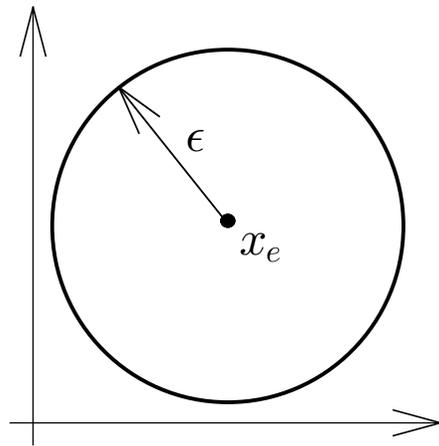
nota: i pde di un sistema non lineare possono essere in numero finito (2 nei precedenti esempi, ma eventualmente nullo) o infinito, ed essere punti **isolati** nello spazio di stato

definizioni di stabilità (secondo Lyapunov)

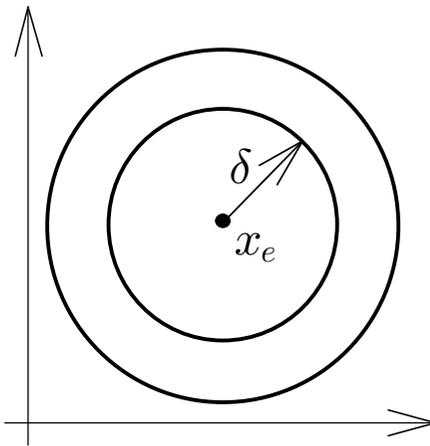
(nel seguito, $|\cdot|$ indica una qualsiasi norma di \mathbb{R}^n)

un pde x_e si dice **stabile** (S) se:

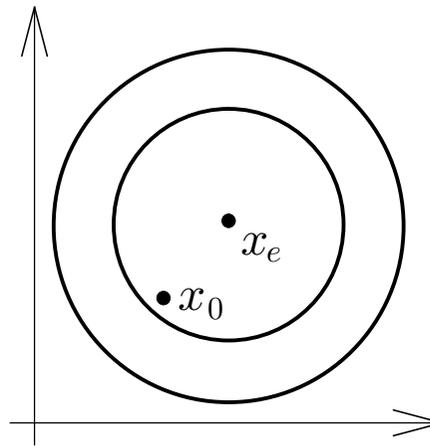
$$\forall \epsilon, \exists \delta(\epsilon) : |x_0 - x_e| < \delta \Rightarrow |x(t) - x_e| < \epsilon, \forall t > 0$$



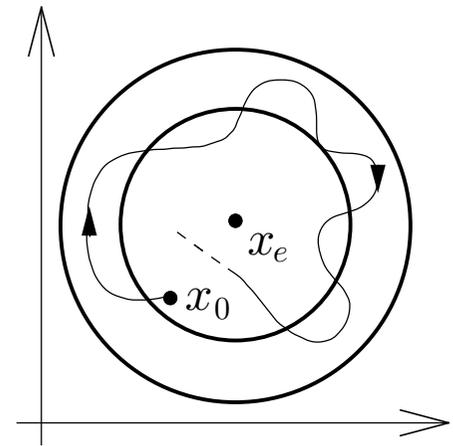
$\forall \epsilon$



$\exists \delta(\epsilon)$



$|x_0 - x_e| < \delta$



$|x(t) - x_e| < \epsilon, \forall t > 0$

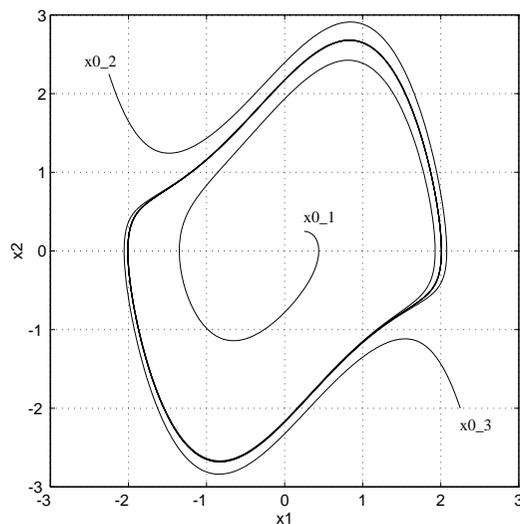
un pde x_e di un sistema dinamico è stabile se è possibile mantenere l'evoluzione del sistema **arbitrariamente vicina** a x_e prendendo la condizione iniziale x_0 **sufficientemente vicina** a x_e ; ovvero, se nell'intorno di x_e è possibile limitare a piacimento lo scostamento limitando opportunamente la perturbazione

ovviamente:

un pde x_e si dice **instabile** se non è stabile

- la stabilità è una **proprietà dei pde**, non del sistema: lo stesso sistema può avere sia pde stabili che instabili (accade nei sistemi non lineari, es: pendolo)
 - nella definizione di stabilità **non** si richiede che lo stato perturbato tenda a convergere verso x_e
 - d'altra parte, nella definizione di instabilità **non** si richiede che l'evoluzione perturbata tenda a divergere
- es:** oscillatore di Van der Pol (sistema MMS con damping dipendente dalla posizione)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + (1 - x_1^2)x_2\end{aligned}$$



le traiettorie nello spazio di stato mostrano che, indipendentemente dalla condizione iniziale, lo stato converge ad un **ciclo limite**: quindi, è impossibile limitare a piacimento lo scostamento da 0 (ad es., se si pone $\epsilon = 1$ non esiste alcun δ)

⇒ l'origine è un pde instabile per il sistema

■

in pratica, spesso la stabilità **semplice** non basta:

un pde x_e si dice **asintoticamente stabile** (AS) se:

1. è stabile

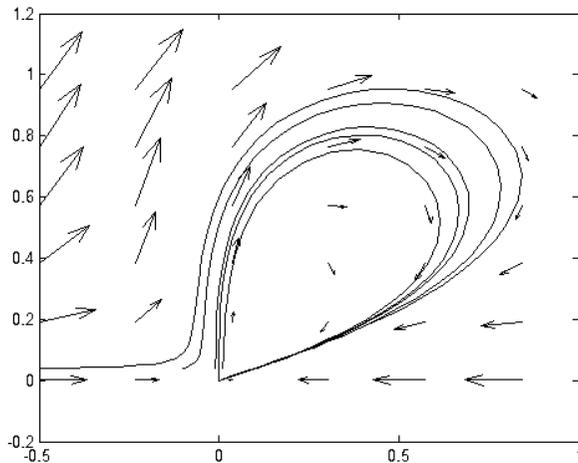
$$2. \exists \delta_a : |x_0 - x_e| < \delta_a \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_e| = 0$$

- in aggiunta alla stabilità, si richiede la convergenza a x_e se la condizione iniziale è sufficientemente vicina a x_e
- la stabilità asintotica è un concetto **locale**, nel senso che la convergenza si ha se x_0 appartiene all'intorno di x_e avente raggio δ_a (**dominio di attrazione**); all'esterno di tale intorno si può avere semplice limitatezza o **persino divergenza!**
- la 2. **non implica** la 1.; è possibile cioè avere la convergenza senza la stabilità (qualche volta pde di questo tipo si definiscono **quasi-stabili asintoticamente**, ma sono a tutti gli effetti pde instabili)

es: (dovuto a Vinograd)

$$\dot{x}_1 = \frac{x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^5}{(x_1^2 + x_2^2)(1 + (x_1^2 + x_2^2)^2)}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{x_2^2(x_2 - 2x_1)}{(x_1^2 + x_2^2)(1 + (x_1^2 + x_2^2)^2)}$$



le traiettorie nello spazio di stato mostrano che, indipendentemente dalla distanza di x_0 dall'origine, se $x_{1,0} < 0$ lo stato converge all'origine dopo aver toccato una curva che si trova **a distanza finita** da 0: quindi, è impossibile limitare a piacimento lo scostamento dall'origine

⇒ l'origine è un pde quasi-stabile asintoticamente (ma instabile) per il sistema ■

tuttavia, nelle applicazioni, è spesso necessario disporre di una **stima** del tempo necessario perché lo stato perturbato ritorni in x_e :

un pde x_e si dice **esponenzialmente stabile** (ES) se esistono costanti positive α , λ e c tali che:

$$|x(t) - x_e| \leq \alpha |x_0 - x_e| e^{-\lambda t}, \quad \forall t > 0, \quad \forall |x_0 - x_e| < c$$

- in pratica, si richiede che esista un intorno di x_e a partire dal quale la traiettoria perturbata converge a x_e con velocità almeno esponenziale (anche questo è un concetto locale)
- λ viene detto **tasso** di convergenza esponenziale; posto $\alpha = e^{\lambda \tau_0}$, si trova facilmente che dopo $(\tau_0 + 1/\lambda)$ secondi la distanza da x_e si è ridotta ad almeno $1/e$ (circa il 35%) del suo valore iniziale
- la stabilità esponenziale **implica** la stabilità asintotica (e quindi la stabilità); il viceversa **non è vero**

es: l'origine è un pde asintoticamente ma non esponenzialmente stabile per il sistema

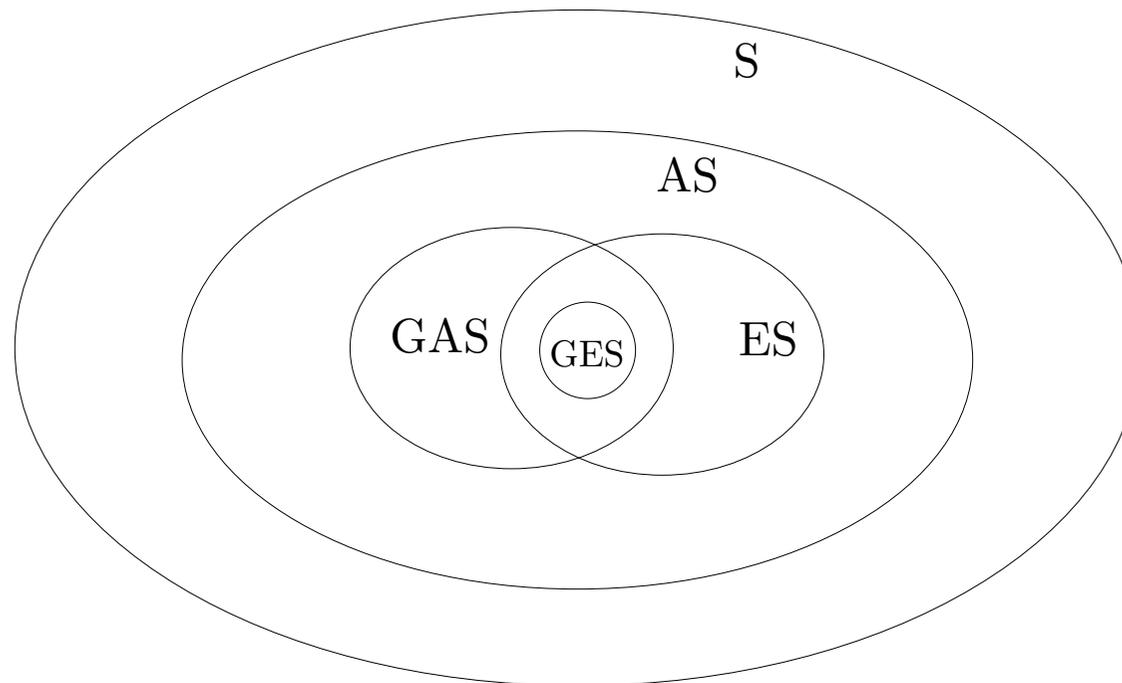
$$\dot{x} = -x^2$$

infatti, la soluzione è $x(t) = \frac{x_0}{1 + tx_0}$, che converge a zero più lentamente di qualsiasi funzione esponenziale ■

le proprietà di stabilità asintotica e stabilità esponenziale, che sono intrinsecamente locali, possono anche essere **globali**

- un pde si dice **globalmente asintoticamente stabile** (GAS) se è stabile e lo stato converge a x_e per **qualsiasi** stato iniziale (il dominio di attrazione coincide con tutto \mathbb{R}^n)
- un pde si dice **globalmente esponenzialmente stabile** (GES) se lo stato converge esponenzialmente a x_e per **qualsiasi** stato iniziale

riassumendo, si ha la seguente classificazione dei pde **stabili**



nota: x_e può essere GAS solo se è l'**unico** pde del sistema (C.N.)

Stabilità dei sistemi lineari

Teorema

se un sistema lineare ammette più di un pde, la stabilità (instabilità) di uno di essi implica ed è implicata da quella di tutti gli altri

dim basta mostrare che, se il generico pde x_e è stabile, lo è anche l'origine, e viceversa

per ipotesi $\forall \epsilon, \exists \delta(\epsilon) : |x_0 - x_e| < \delta \Rightarrow |x(t) - x_e| < \epsilon, \forall t > 0$

$x(t) - x_e$ è la differenza tra la risposta a partire da x_0 e quella a partire da $x_e \Rightarrow$ per la linearità, $x(t) - x_e$ è la risposta a partire da $x_0 - x_e = z_0$, che indicheremo con $x_{z_0}(t)$

si ha dunque $\forall \epsilon, \exists \delta(\epsilon) : |z_0| < \delta \Rightarrow |x_{z_0}(t)| < \epsilon, \forall t > 0$, cioè la stabilità dell'origine

analogamente si prova il 'è implicata' ■

Teorema

in un sistema lineare:

1. si può avere stabilità asintotica solo per l'origine e solo nel caso in cui sia l'unico pde
2. se l'origine è AS, è anche GAS

dim 1: l'origine è sempre un pde, se ci sono altri pde sono contigui all'origine (cfr. slide 5)

2: ovvia per sistemi stazionari a dimensione finita, considerando che affinché l'evoluzione libera $x(t) = e^{At}x_0$ converga da un intorno dell'origine è necessario che gli autovalori di A abbiano parte reale negativa, il che implica che l'evoluzione libera converge da $\forall x_0$ ■

Teorema

in un sistema lineare, l'origine è ES se e solo se è AS

dim necessità: ovvia

sufficienza: ovvia per sistemi stazionari a dimensione finita, poiché se l'origine è AS l'evoluzione libera è combinazione di esponenziali convergenti ■

riassumendo, nei sistemi lineari:

- se l'origine è l'unico pde, può essere S, AS (in effetti ES), oppure I
- se ci sono più pde, sono infiniti, contigui e sono tutti S oppure tutti I
- in ogni caso, è lecito parlare di stabilità, stabilità asintotica (in effetti esponenziale) o instabilità **del sistema nel suo complesso**

il seguente criterio di stabilità è immediato per sistemi stazionari a dimensione finita

Teorema

un sistema lineare stazionario a dimensione finita è S se e solo se

1. gli autovalori di A con molteplicità geometrica pari a quella algebrica hanno $\text{Re}[\lambda] \leq 0$
2. gli autovalori di A con molteplicità geometrica minore di quella algebrica hanno $\text{Re}[\lambda] < 0$

il sistema è AS (in effetti ES) se e solo se tutti gli autovalori di A hanno $\text{Re}[\lambda] < 0$

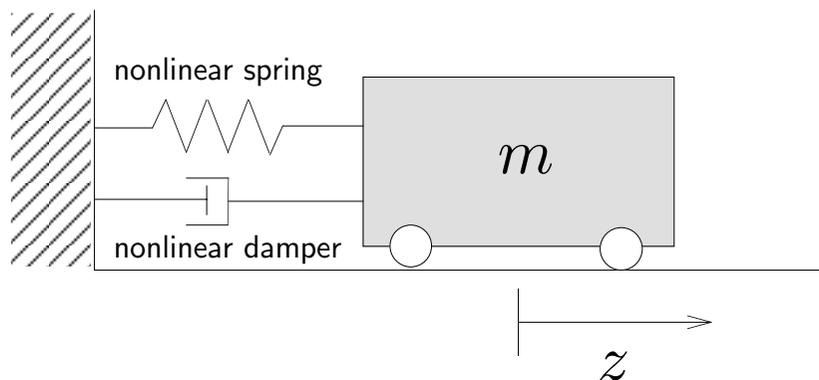
oppure, per evitare il calcolo degli autovalori: criterio di Routh

Criterio diretto di Lyapunov

idea di base

se l'energia totale di un sistema (meccanico, elettrico, ...) viene continuamente **dissipata**, il sistema (lineare o non lineare) tende a un punto di equilibrio \Rightarrow è possibile studiare la stabilità del punto esaminando un'**unica funzione scalare**

es: sistema MMS non lineare



$$m \ddot{z} + d \dot{z} |\dot{z}| + (k_0 z + k_1 z^3) = 0$$

unico pde: origine, ma è impossibile studiarne la stabilità usando le definizioni, poiché non siamo in grado di ottenere la soluzione dell'equazione

invece: esaminiamo l'**energia meccanica**! posto $x = (z, \dot{z})$, si ha

$$V(x) = V_{\text{cin}}(\dot{z}) + V_{\text{pot}}(z) = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \int_0^z (k_0 \zeta + k_1 \zeta^3) d\zeta = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} k_0 z^2 + \frac{1}{4} k_1 z^4$$

relazioni energia/stabilità

- si ha energia nulla **solo** se $z = 0$, $\dot{z} = 0$, cioè nell'origine
- se l'energia converge (sempre) a zero, ne segue la stabilità asintotica (globale) dell'origine
- se l'energia diverge, ne segue l'instabilità dell'origine

come varia l'energia durante il moto del sistema? basta derivare V rispetto a t (di cui è funzione composta) e sostituire a \ddot{z} l'espressione che se ne ricava dal modello dinamico

$$\dot{V}(x) = m\dot{z}\ddot{z} + (k_0z + k_1z^3)\dot{z} = -d|\dot{z}|^3$$

⇒ l'energia viene **continuamente dissipata** e il sistema converge ad uno stato con velocità nulla ($\dot{z} = 0$); d'altra parte, poiché in qualsiasi posizione diversa da $z = 0$ la massa sarebbe soggetta a una forza di richiamo $-k_0z - k_1z^3$ non nulla, è evidente che **il sistema converge in effetti all'origine** ($z = 0$, $\dot{z} = 0$) ■

il metodo diretto di Lyapunov si basa appunto su una generalizzazione (e una formalizzazione rigorosa) di questo concetto: si cerca un'opportuna funzione scalare *energy-like* per il sistema dinamico non lineare in esame, e se ne esamina la variazione nel tempo lungo le traiettorie del sistema

nel seguito, faremo riferimento al generico sistema non lineare stazionario

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

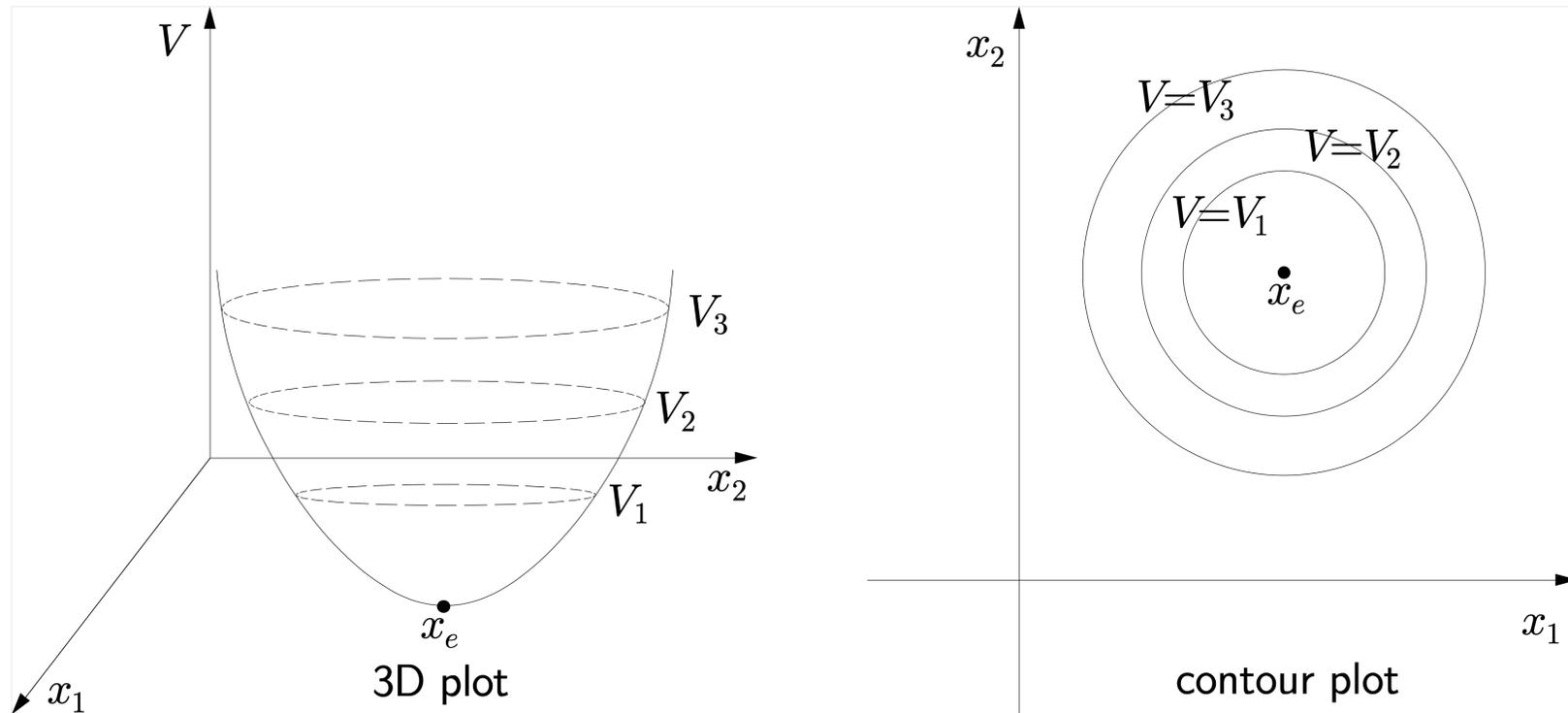
e indicheremo con x_e il pde da studiare; dunque, $f(x_e) = 0$

concetti preliminari: data una funzione scalare $V(x)$, continua e derivabile rispetto a x ($V \in C^1$), e detto $S(x_e, r)$ un intorno sferico di x_e di raggio r

- $V(x)$ si dice **definita positiva** (DP) in $S(x_e, r)$ se
 - a) $V(x_e) = 0$
 - b) $V(x) > 0, \forall x \in S(x_e, r), x \neq x_e$
- $V(x)$ si dice **semidefinita positiva** (SDP) in $S(x_e, r)$ se
 - a) $V(x_e) = 0$
 - b) $V(x) \geq 0, \forall x \in S(x_e, r), x \neq x_e$
- $V(x)$ si dice **definita negativa** (DN) in $S(x_e, r)$ se $-V(x)$ è definita positiva, **semidefinita negativa** (SDN) in $S(x_e, r)$ se $-V(x)$ è semidefinita positiva
- $V(x)$ si dice **indefinita** (I) in $S(x_e, r)$ se non è DP, SDP, DN o SDN

nota: $V(x)$ DP (DN) in $S(x_e, r) \Rightarrow V(x)$ SDP (SDN) in $S(x_e, r)$

caso $n = 2$: rappresentazione grafica **locale** di una funzione V DP in x_e



es: in \mathbb{R}^2 , la funzione $V(x) = x^T x = x_1^2 + x_2^2$ è DP in qualsiasi intorno dell'origine (le curve di livello sono **chiuse**)

es: in \mathbb{R}^2 , la funzione $V(x) = x_1^2$ è SDP in qualsiasi intorno dell'origine (si annulla su tutto l'asse x_2 ; le curve di livello sono **aperte**)

es: in \mathbb{R}^2 , la funzione $V(x) = x_1 x_2$ è I in qualsiasi intorno dell'origine (ci sono sempre punti dell'intorno dove è positiva e punti dove è negativa)

es: per il sistema MMS non lineare, l'energia meccanica $V(x)$ è DP in qualsiasi intorno dell'origine

data una funzione $V(x)$, e considerata una soluzione $x(t)$ della $\dot{x} = f(x)$, si può riguardare la $V(x(t))$ come una funzione **composta** di t , continua e derivabile per ogni t ; si ha quindi

$$\dot{V}(t) = \frac{dV(x(t))}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x(t)) = \dot{V}(x)$$

dove $f_i(x(t))$ è la i -esima componente della funzione vettoriale $f(x)$

la $\dot{V}(x)$, considerata come una funzione della sola x , viene chiamata la **derivata di V lungo le traiettorie del sistema**

alla $\dot{V}(x)$ è quindi ancora possibile attribuire le proprietà di definitezza positiva, negativa, semidefinitezza positiva, etc.

es: si consideri il sistema dinamico

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2\end{aligned}$$

il cui unico pde è l'origine, e si ponga $V = x_1^2 + x_2^2$, che è DP intorno all'origine; si ha

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1x_2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 = -2x_2^2$$

che è SDN intorno all'origine ■

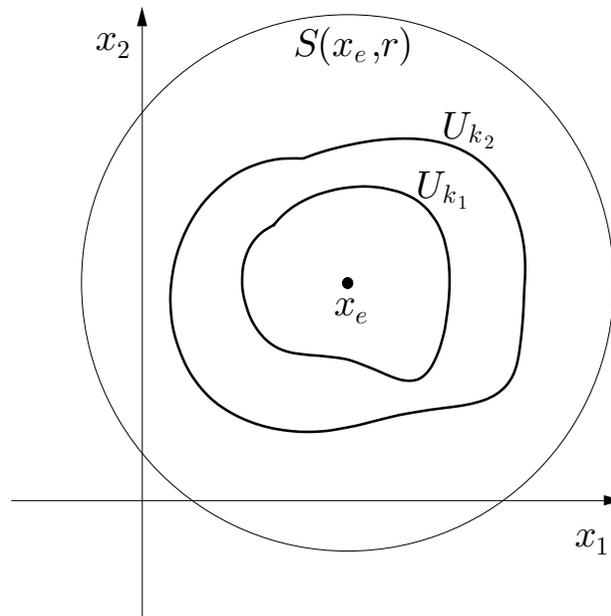
Teorema

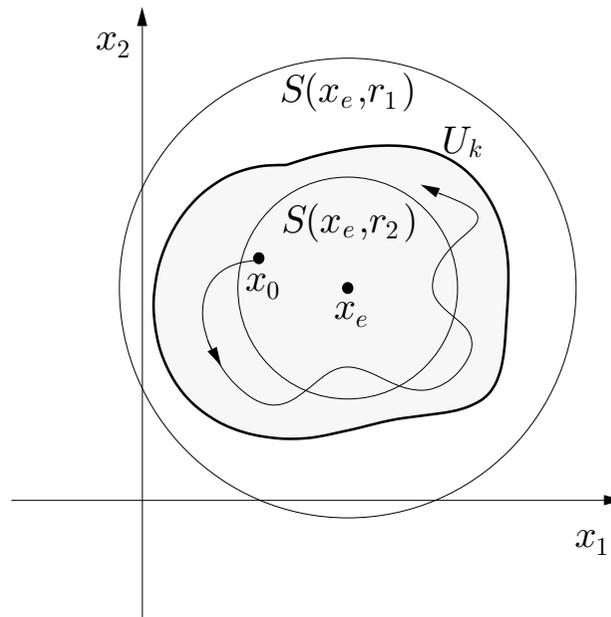
un pde x_e di un sistema $\dot{x} = f(x)$ è **stabile** se esiste una funzione $V(x) \in C^1$ tale che

1. $V(x)$ sia DP in un intorno $S(x_e, r)$
2. $\dot{V}(x)$ sia SDN nello stesso intorno

dim di tipo geometrico, per $n = 2$ (ma valida in generale)

si noti intanto che, poiché $V(x)$ è DP in $S(x_e, r)$, le linee di livello $U_k = \{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) = k\}$ sono **chiuse** per k sufficientemente piccolo; inoltre, se $k_1 < k_2$, U_{k_1} è **interna** a U_{k_2}





scelto r_1 tale che $0 < r_1 \leq r$, esiste certamente un valore k tale che U_k è interna a $S(x_e, r_1)$ (basta prendere il valore minimo di V lungo la frontiera di $S(x_e, r_1)$, che esiste ed è positivo perché V è continua, e scegliere k minore di tale valore); dunque U_k è chiusa

inoltre, poiché U_k è una curva chiusa che contiene x_e , è sempre possibile trovare r_2 tale che $S(x_e, r_2)$ è interno a U_k

si consideri una traiettoria che origina da $x_0 \in S(x_e, r_2)$; si ha $V(x_0) < k$ ed essendo \dot{V} negativa o nulla lungo le traiettorie del sistema contenute in $S(x_e, r)$, la $V(x(t))$ è **non crescente** nello stesso intorno

\Rightarrow si ha $V(x(t)) < k, \forall t > 0$, e dunque lo stato $x(t)$ si mantiene all'interno di $S(x_e, r_1)$ **indefinitamente**

quindi:

$$|x_0 - x_e| < r_2 \quad \Rightarrow \quad |x(t) - x_e| < r_1, \quad \forall t > 0 \quad \text{c.d.d.} \quad \blacksquare$$

- una funzione $V(x)$ che gode delle proprietà richieste dal teorema (cioè tale che V sia DP e \dot{V} sia SDN in un intorno di x_e) si definisce **funzione di Lyapunov**
- il teorema stabilisce dunque che l'**esistenza** di una funzione di Lyapunov è condizione **sufficiente** per la stabilità; in effetti, per sistemi stazionari a dimensione finita si può mostrare che la condizione è anche **necessaria**
- l'applicazione del teorema passa attraverso due fasi, eventualmente ripetute:
 1. costruzione di una $V(x)$ DP in un intorno di x_e (detta **candidata** di Lyapunov)
 2. calcolo della \dot{V} lungo le traiettorie del sistema e verifica della sua SDN nell'intorno

nota: se la $V(x)$ scelta non risulta essere una funzione di Lyapunov, non si può concludere nulla; potrebbe esistere un'altra
- se $V(x)$ è una funzione di Lyapunov per un sistema, lo è anche la funzione

$$V'(x) = \beta V^\gamma(x) \quad \beta > 0, \gamma > 1$$

- la scelta della candidata di Lyapunov è ovviamente cruciale: nei sistemi meccanici ed elettrici si può provare a scegliere l'energia totale, ma possono esistere scelte migliori che non hanno un'immediata interpretazione fisica

es: pendolo (per semplicità, $m = 1$, $d = 1$, $\ell = 1$)

il vettore di stato è $x = (x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta})$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g \sin x_1 - x_2\end{aligned}$$

posto $x_e^{\text{down}} = (0, 0)$, proviamo con l'energia meccanica

$$V(x) = \frac{1}{2} x_2^2 + g(1 - \cos x_1) \quad \text{DP in } S(0, 2\pi^-)$$

si ha

$$\dot{V}(x) = x_2 \dot{x}_2 + g \sin x_1 \dot{x}_1 = -x_2^2 \quad \text{SDN in } S(0, 2\pi^-) \text{ (in effetti, in qualsiasi intorno)}$$

dunque x_e^{down} è un pde **stabile** per il pendolo (e \dot{V} è la potenza dissipata) ■

però: l'intuizione fisica ci dice che, in presenza di attrito, l'origine è un pde **asintoticamente stabile** per il pendolo \Rightarrow ci serve un teorema più forte

Teorema

un pde x_e di un sistema $\dot{x} = f(x)$ è **asintoticamente stabile** se esiste una funzione $V(x) \in C^1$ tale che

1. $V(x)$ sia DP in un intorno $S(x_e, r)$
2. $\dot{V}(x)$ sia DN nello stesso intorno

dim intanto, x_e è certamente stabile; in particolare, se $x_0 \in S(x_e, r_2)$ (cfr. dimostrazione precedente) la traiettoria rimane in $S(x_e, r_1)$ indefinitamente $\Rightarrow V(t)$ lungo la traiettoria tende a un valore limite $\bar{V} \geq 0$ (perché $\dot{V} < 0$ e V è limitata inferiormente da zero)

supponiamo $\bar{V} > 0$; poiché V è continua e si azzera solo in x_e , esiste un intorno $S(x_e, \sigma)$ in cui la traiettoria non entra mai \Rightarrow poiché anche \dot{V} è continua e si azzera solo in x_e , esiste un $\alpha > 0$ tale che $\dot{V} \leq -\alpha$ indefinitamente

ma allora avremmo

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \dot{V}(\tau) d\tau \leq V(0) - \alpha t$$

e quindi V diventerebbe negativa dopo un tempo finito, contraddicendo l'assunzione $\bar{V} > 0$

quindi, se $x_0 \in S(x_e, r_2)$ si ha $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$; quindi, essendo $V(x)$ nulla solo per $x = x_e$, implica che $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$, c.d.d. ■

nota: estrapolando le proprietà di $S(x_e, r_2)$ dalla prova del criterio di stabilità precedente, si conclude che **qualsiasi intorno di x_e contenuto in U_{V^*}** (dove V^* è il valore minimo di V lungo la frontiera di $S(x_e, r)$) è una **stima** (per difetto) del **dominio di attrazione** di x_e

es: si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)\end{aligned}$$

per il quale l'origine è un punto di equilibrio

scelta

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \quad \text{DP in qualsiasi intorno dell'origine}$$

si ha

$$\dot{V}(x) = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \quad \text{DN per } x : x_1^2 + x_2^2 < 1, \text{ ovvero in } S(0, 1^-)$$

l'origine è dunque asintoticamente stabile per il sistema in questione

per stimare il dominio di attrazione:

si ponga $U_{V^*} = \{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) \leq 1/2\} = S(0, 1^-)$; scelto $\rho \in (0, 1)$, qualunque intorno $S(0, \rho)$ è contenuto in U_{V^*} e dunque costituisce una stima (per difetto) del **dominio di attrazione** dell'origine ■

es: pendolo; prendiamo la seguente candidata di Lyapunov (nessuna interpretazione fisica)

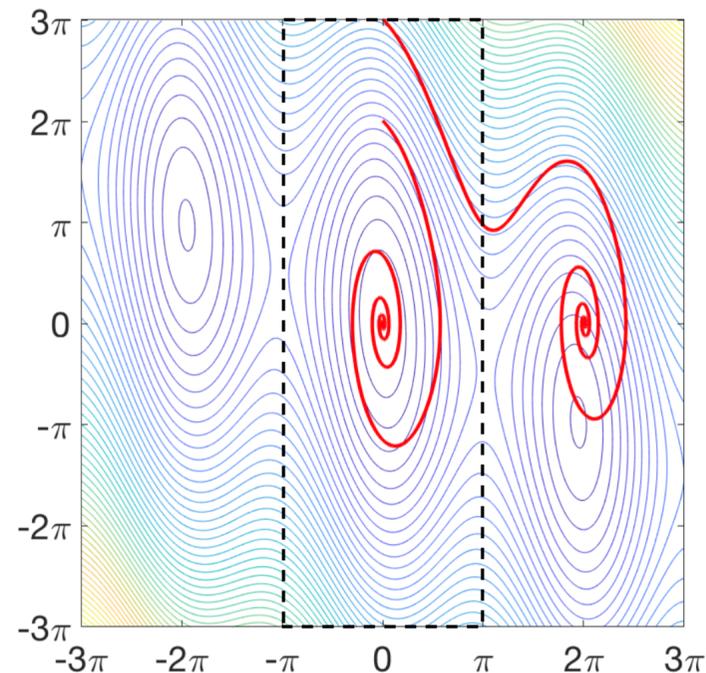
$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + 2g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 \quad \text{DP in qualsiasi intorno dell'origine}$$

si trova

$$\dot{V}(x) = -x_2^2 - gx_1 \sin x_1 \quad \text{DN in qualsiasi intorno dell'origine tale che } x_1 \in (-\pi, \pi)$$

dunque x_e^{down} è un pde **asintoticamente stabile** per il pendolo

dominio di attrazione: la convergenza all'origine è garantita da stati iniziali **interni a linee di livello interamente contenute nella regione dove \dot{V} è DN**, ma **non** a partire da stati iniziali interni a linee di livello che **escono** da tale regione, da cui **può** verificarsi divergenza



cosa succede se cerchiamo di applicare i teoremi precedenti al punto di equilibrio $x_e^{up} = (\pi, 0)$ del pendolo? l'intuizione fisica ci dice che x_e^{up} è **instabile**, ma la condizione necessaria (e sufficiente) di stabilità è l'**esistenza** di una funzione di Lyapunov, che non possiamo escludere a priori \Rightarrow è utile disporre di un **criterio di instabilità**

Teorema [Cetaev]

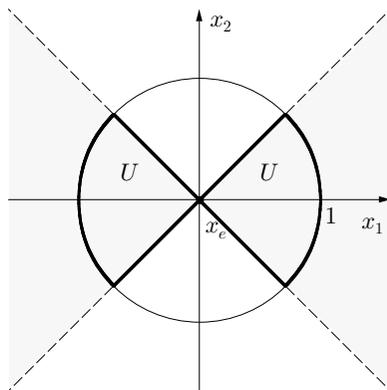
un pde x_e di un sistema $\dot{x} = f(x)$ è **instabile** se esiste una funzione $V(x) \in C^1$ tale che

1. l'insieme $P = \{x : V(x) > 0\}$ ha x_e come punto di accumulazione (pda)
2. $\dot{V}(x)$ sia DP in $U = P \cap S(x_e, r)$, per qualche $r > 0$

es: il teorema di Cetaev mostra che il pde $x_e = (0, 0)$ è **instabile** per il sistema dinamico

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2\end{aligned}$$

si consideri $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2$, che è positiva in $P = \{x : |x_1| > |x_2|\}$, di cui x_e è pda



si ha

$$\dot{V}(x) = x_1^2 + x_1x_2^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2(1 + x_1)$$

che è chiaramente DP in $U = P \cap S(x_e, 1)$

è disponibile anche un criterio di stabilità asintotica **globale**

Teorema

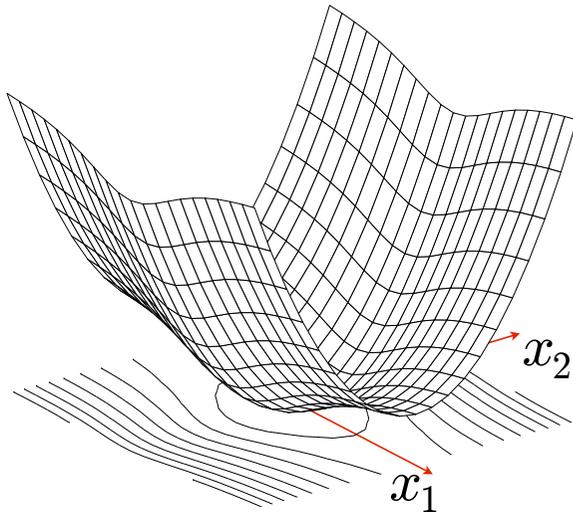
un pde x_e di un sistema $\dot{x} = f(x)$ è **globalmente asintoticamente stabile** se esiste una funzione $V(x) \in C^1$ tale che

1. $V(x)$ sia DP in qualsiasi intorno di x_e
2. $\dot{V}(x)$ sia DN in qualsiasi intorno di x_e
3. $V(x)$ sia **radialmente illimitata**, cioè

$$\lim_{|x-x_e| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$$

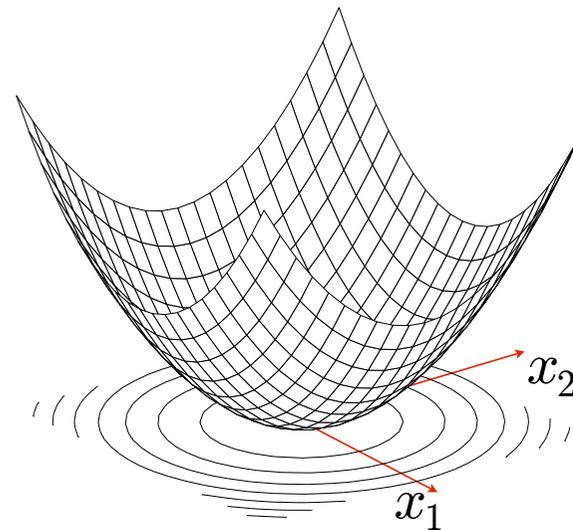
es:

$$V = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$$



radialmente limitata

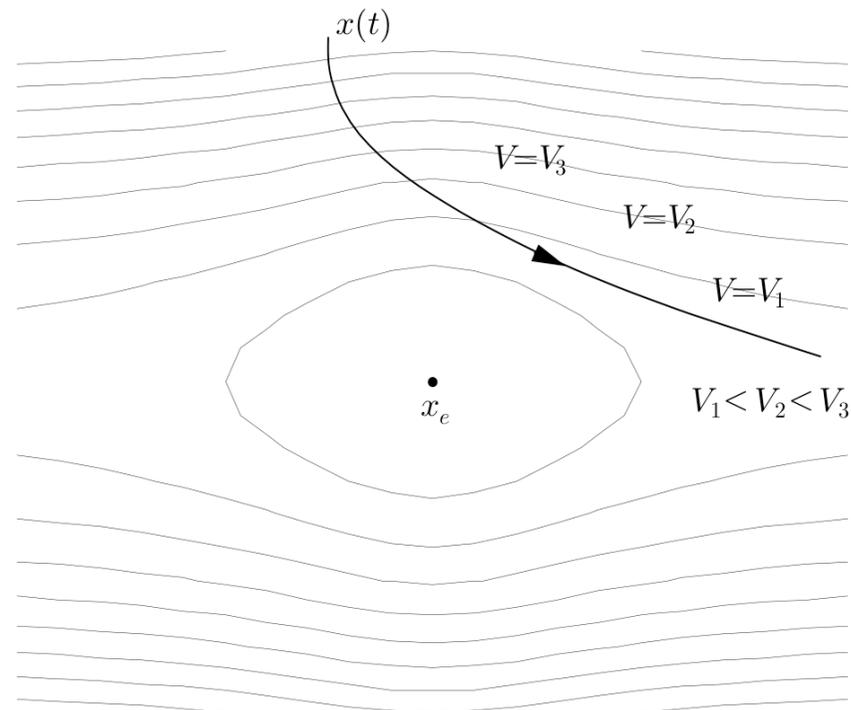
$$V = x_1^2 + x_2^2$$



radialmente illimitata

dim come nel caso locale, osservando che la illimitatezza radiale di V , combinata con il fatto che \dot{V} è DN in tutto \mathbb{R}^n , implica che per qualsiasi condizione iniziale x_0 le traiettorie rimangono all'interno della regione **limitata** definita da $V(x) \leq V(x_0)$ ■

nota: nel caso in cui V sia radialmente limitata, le curve di livello 'lontane' da x_e non sono chiuse; di conseguenza, è possibile che lo stato si allontani indefinitamente da x_e pur rimanendo all'interno della regione definita da $V(x) \leq V(x_0)$, e anzi attraversando curve di livello relative a valori progressivamente decrescenti di V



⇒ quando x_0 è sufficientemente lontano, $x(t)$ può **non** convergere a x_e

es: si consideri la famiglia di sistemi non lineari descritta da

$$\dot{x} = -c(x), \quad \text{con } x c(x) > 0, \forall x \neq 0, \quad c(0) = 0$$

e la candidata di Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2} x^2$$

che è DP in qualsiasi intorno di $x_e = 0$ e radialmente illimitata

essendo

$$\dot{V}(x) = x \dot{x} = -x c(x)$$

la $\dot{V}(x)$ è DN in qualsiasi intorno di $x_e = 0$

$\Rightarrow x_e$ è un pde globalmente asintoticamente stabile ■

riassumendo, il **criterio diretto di stabilità di Lyapunov** si basa sulle seguenti condizioni:

	x_e è S	x_e è AS	x_e è GAS	x_e è instabile
$V(x)$	DP in un $S(x_e, r)$	DP in un $S(x_e, r)$	DP in $\forall S(x_e, r)$ e rad. illim.	x_e è punto di accum. di $P = \{x : V(x) > 0\}$
$\dot{V}(x)$	SDN in $S(x_e, r)$	DN in $S(x_e, r)$	DN in $\forall S(x_e, r)$	DP in $P \cap S(x_e, r)$

Costruzione di funzioni di Lyapunov

la maggiore difficoltà nell'applicare il metodo diretto di Lyapunov per studiare un pde x_e di un sistema non lineare $\dot{x} = f(x)$ consiste nella **scelta** della funzione $V(x)$; a volte la fisica del problema fornisce un'ispirazione, ma in generale è utile procedere sistematicamente

una scelta spesso efficace consiste nello scegliere come candidata di Lyapunov una **forma quadratica** del tipo

$$V(x) = \frac{1}{2}(x - x_e)^T Q (x - x_e)$$

con la matrice $Q : n \times n$ **simmetrica** e **definita positiva** (tale cioè che $w^T Q w > 0, \forall w \neq 0$)

per garantire la definitezza positiva di Q si può utilizzare la **C.N.&S. di Sylvester**

$$Q_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots \quad \det(Q) > 0$$

essendo Q simmetrica, la $\dot{V}(x)$ risulta essere

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^T Q (x - x_e) + \frac{1}{2}(x - x_e)^T \dot{Q} (x - x_e) + \frac{1}{2}(x - x_e)^T Q \dot{x} = (x - x_e)^T Q \dot{x} + \frac{1}{2}(x - x_e)^T \dot{Q} (x - x_e)$$

es: si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 + k_2 x_3 \\ \dot{x}_3 &= -2x_2 - x_3^3\end{aligned}$$

con $k_1, k_2 > 0$; l'origine è l'unico pde

- posto

$$V(x) = \frac{1}{2}(x - x_e)^T I_{3 \times 3}(x - x_e) = \frac{1}{2}x^T x = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

che è DP in qualsiasi intorno dell'origine e radialmente illimitata, si trova

$$\dot{V}(x) = x^T \dot{x} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 + x_3 \dot{x}_3 = -k_1 x_1^2 - x_2^4 + (k_2 - 2)x_2 x_3 - x_3^4$$

per $k_2 = 2$, $\dot{V}(x)$ è DN in qualsiasi intorno dell'origine, che è in questo caso GAS

- si può fare un'analisi molto più generale ponendo $Q = \text{diag}(1, \frac{2}{k_2}, 1)$

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T Qx = \frac{1}{2}(x_1^2 + \frac{2}{k_2}x_2^2 + x_3^2) \implies \dot{V}(x) = -k_1 x_1^2 - \frac{2}{k_1}x_2^4 - x_3^4$$

che per $k_1, k_2 > 0$ è sempre DN \implies l'origine è GAS in ogni caso! ■

metodo di Krasovski

assumendo che l'origine sia un pde per $\dot{x} = f(x)$ (altrimenti: traslazione $x_e \rightarrow O$), provare come candidata di Lyapunov la $V(x) = f^T(x)f(x)$, chiaramente DP in un intorno di x_e

Teorema

indicata con $J(x) = df/dx$ la matrice Jacobiana della funzione f :

- se la matrice $F(x) = J(x) + J^T(x)$ è definita negativa in un intorno $S(x_e, r)$ allora x_e è **asintoticamente stabile**
- se $F(x) = J(x) + J^T(x)$ è definita negativa in tutto \mathbb{R}^n e $V(x) = f^T(x)f(x)$ è radialmente illimitata, allora x_e è **globalmente asintoticamente stabile**

dim posto $V(x) = f^T(x)f(x)$, si ha $\dot{V} = 2f^T(x)\dot{f}(x) = 2\dot{x}^T \frac{df}{dx} \dot{x}$ che, se $F(x)$ è definita negativa, è anch'essa DN $\Rightarrow V$ è una funzione di Lyapunov ■

es: l'origine è un pde GAS per il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_2^3\end{aligned}$$

infatti si ha

$$J(x) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 - 3x_2^2 \end{pmatrix} \implies F(x) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2 - 6x_2^2 \end{pmatrix}$$

dalla condizione di Sylvester, $-F(x)$ è definita positiva in tutto \mathbb{R}^n ; quindi $F(x)$ è definita negativa in tutto \mathbb{R}^n e inoltre

$$V(x) = f^T(x)f(x) = (-3x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2 - x_2^3)^2 \rightarrow \infty \text{ per } |x| \rightarrow \infty \quad \blacksquare$$

metodo del gradiente variabile

si basa sull'osservazione che, se $V(x)$ è una funzione di Lyapunov per il pde x_e del sistema $\dot{x} = f(x)$, allora

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dx} \dot{x} = \nabla V^T(x) \dot{x} \quad \nabla V(x) : \text{gradiente di } V \text{ rispetto a } x$$

l'idea di base è di **scegliere direttamente** $\nabla V(x)$ (invece che $V(x)$), in modo da ottenere V DP e \dot{V} DN; generalmente si pone

$$\nabla V_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) x_j$$

affinché $\nabla V(x)$ sia un gradiente, si deve imporre la condizione che (Th. di Schwartz)

$$\frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i} \quad i, j = 1, \dots, n$$

si cerca di scegliere gli a_{ij} in modo che (i) sia verificata questa condizione; (ii) $\dot{V}(x)$ sia DN in un intorno $S(x_e, r)$; e infine

$$(iii) \quad V(x) = \int_0^x \frac{dV}{dx} dx = \int_0^x \nabla V^T(x) dx \quad \text{sia DP in } S(x_e, r)$$

nota: poiché $V(x)$ dipende solo da x , l'integrale è indipendente dal percorso di integrazione; conviene dunque usare un percorso di integrazione allineato di volta in volta con gli assi x_1, \dots, x_n , cioè

$$V(x) = \int_0^{x_1} \nabla V_1^T(x_1, 0, \dots, 0) dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2^T(x_1, x_2, 0, \dots, 0) dx_2 + \dots + \int_0^{x_n} \nabla V_n^T(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n$$

es: si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1x_2^2\end{aligned}$$

e si scelga la seguente forma per $\nabla V(x)$

$$\begin{aligned}\nabla V_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \nabla V_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{aligned}$$

la condizione di simmetria

$$x_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial x_2} + a_{12} + x_2 \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} = x_2 \frac{\partial a_{22}}{\partial x_1} + a_{21} + x_1 \frac{\partial a_{21}}{\partial x_1}$$

si può soddisfare ponendo $a_{12} = a_{21} = \text{cost}$ e $a_{11} = \text{cost}$, $a_{22} = \text{cost}$. Ad esempio, si può provare con $a_{12} = a_{21} = 0$, cioè $\nabla V_1 = a_{11}x_1$ e $\nabla V_2 = a_{22}x_2$. Ne segue

$$\dot{V}(x) = (a_{11}x_1 \ a_{22}x_2)^T \dot{x} = -a_{11}x_1^2 - a_{22}x_2^2(1 - x_1x_2)$$

che, se $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, risulta DN in qualsiasi intorno dell'origine tale che $x_1x_2 < 1$ (ad esempio, la crf di raggio 1). Proviamo dunque a porre $a_{11} = a_{22} = 1$. Troviamo

$$V(x) = \int_0^{x_1} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 dx_2 = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 \quad \text{DP in qualsiasi intorno dell'origine}$$

⇒ l'origine è un pde AS

Teorema dell'insieme invariante

spesso la funzione di Lyapunov scelta ha una derivata $\dot{V}(x)$ che è **solo SDN** (e non DN); in queste condizioni, si può concludere la stabilità semplice di x_e ma non l'eventuale stabilità asintotica (cfr: la prima funzione di Lyapunov per il pendolo)

in queste condizioni, il **teorema dell'insieme invariante** consente di analizzare più a fondo la situazione

un sottoinsieme $G \subset \mathbb{R}^n$ dello spazio di stato si dice **insieme invariante** per un sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ se qualsiasi traiettoria $x(t)$ del sistema che parte da un punto $x_0 \in G$ rimane indefinitamente in G

è una generalizzazione del concetto di punto di equilibrio; esempi di insiemi invarianti:

- qualsiasi punto di equilibrio
- il dominio di attrazione di un punto di equilibrio AS
- qualsiasi traiettoria del sistema (purché questo sia stazionario)
- \mathbb{R}^n stesso

idea di base

se $V(x)$ è DP in un intorno di x_e e $\dot{V}(x)$ è SDN nello stesso intorno \Rightarrow partendo da qualunque punto dell'intorno, $\dot{V}(t)$ tende a zero e $V(t)$ tende a un valore limite

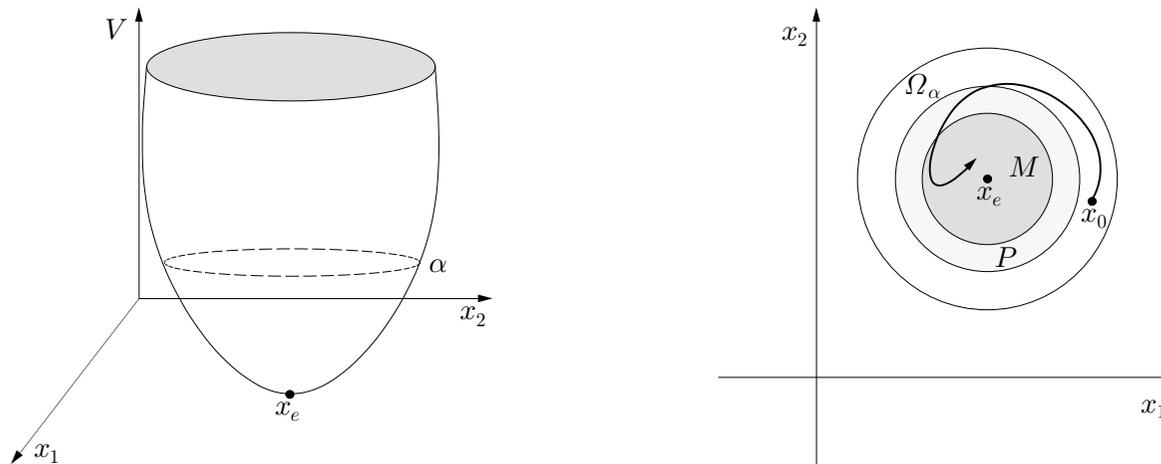
Teorema locale dell'insieme invariante [LaSalle]

per un sistema $\dot{x} = f(x)$, si assuma che esista una funzione $V(x) \in C^1$ tale che:

1. la regione $\Omega_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \alpha\}$ sia limitata, per qualche $\alpha > 0$
2. $\dot{V}(x) \leq 0$ in Ω_α

allora, ogni traiettoria del sistema che parte da Ω_α tende asintoticamente all'insieme M , il **massimo insieme invariante** contenuto in P , l'insieme dei punti di Ω_α dove $\dot{V} = 0$

qui: massimo insieme invariante contenuto in $P =$ unione di tutti i sottoinsiemi invarianti di P



si noti come il criterio di AS sia un caso particolare di questo teorema con $P = M = x_e$

l'uso del teorema dell'insieme invariante consente, in certi casi, di concludere la stabilità asintotica anche in presenza di una \dot{V} SDN

in particolare, si può enunciare il seguente

Corollario [LaSalle]

un pde x_e di un sistema $\dot{x} = f(x)$ è **asintoticamente stabile** se esiste una funzione $V(x) \in C^1$ tale che

1. $V(x)$ sia DP in un insieme D che contiene x_e al suo interno
2. $\dot{V}(x)$ sia SDN nello stesso insieme
3. il massimo insieme invariante M contenuto in P (l'insieme dei punti di D per cui $\dot{V} = 0$) contenga solo x_e

inoltre, detta Ω_α una regione limitata definita dalla $V(x) \leq \alpha$, $\alpha > 0$ e contenuta in D , si ha che Ω_α costituisce una stima per difetto del **dominio di attrazione** per x_e

- rispetto al criterio diretto di AS di Lyapunov, questo corollario 'rilassa' la condizione 2 (DN \rightarrow SDN) ma aggiunge la 3; inoltre la condizione 1 del corollario garantisce la condizione 1 del Teorema Locale dell'Insieme Invariante
- l'insieme D di per sé non è una stima del dominio di attrazione (in sostanza, alcune delle curve di livello che cadono in D possono essere aperte, e dunque esso risulterebbe non invariante)

es: riprendiamo in esame il pendolo con la prima funzione di Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + g(1 - \cos x_1) \quad \text{DP in } S(0, \pi^-)$$

si ha

$$\dot{V}(x) = x_2\dot{x}_2 + g \sin x_1 \dot{x}_1 = -x_2^2 \quad \text{SDN in qualsiasi intorno dell'origine}$$

come già osservato, questo ci consente di dire che $x_e^{\text{down}} = (0, 0)$ è un pde stabile per il pendolo; ma il teorema dell'insieme invariante **dice qualcosa in più**

l'insieme P è costituito dagli stati in $S(0, \pi^-)$ per cui $\dot{V} = 0$, ovvero dai punti di $S(0, \pi^-)$ aventi $x_2 = 0$; qual è il massimo insieme invariante M contenuto in P ?

la dinamica del sistema in P è

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 \\ \dot{x}_2 &= -g \sin x_1 \end{aligned}$$

se $x_1 \neq 0$, si ha $\dot{x}_2 \neq 0$ e quindi x_2 varia, facendo uscire la traiettoria $x(t)$ dall'insieme P

\Rightarrow l'insieme M consiste solo dell'origine, cui dunque converge qualsiasi traiettoria

dunque x_e^{down} è un pde **asintoticamente stabile** per il pendolo

nota: in effetti la $V(x)$ è DP in $S(0, 2\pi^-)$; abbiamo ristretto l'analisi a $S(0, 2\pi^-)$ perché altrimenti M avrebbe compreso oltre a x_e^{down} anche i punti $(0, \pm\pi)$, cioè x_e^{up} ! e non avremmo potuto concludere la AS di x_e^{down}

dominio di attrazione: si può stimare (per difetto) come l'insieme delimitato dalla più ampia linea di livello di V contenuta all'interno di $S(0, 2\pi^-)$ ■

il teorema dell'insieme invariante ammette ovviamente una versione globale

Teorema globale dell'insieme invariante [LaSalle]

per un sistema $\dot{x} = f(x)$, si assuma che esista una funzione $V(x) \in C^1$ tale che:

1. $V(x)$ sia radialmente illimitata
2. $\dot{V}(x) \leq 0$ in tutto \mathbb{R}^n

allora, ogni traiettoria del sistema tende asintoticamente all'insieme M , il **massimo insieme invariante** contenuto in P , l'insieme dei punti di \mathbb{R}^n dove $\dot{V} = 0$

nota: il fatto che $V(x)$ sia radialmente illimitata garantisce che qualsiasi regione $\Omega_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < \alpha\}$, con $\alpha > 0$, sia limitata

cui corrisponde il seguente

Corollario [LaSalle]

un pde x_e di un sistema $\dot{x} = f(x)$ è **globalmente asintoticamente stabile** se esiste una funzione $V(x) \in C^1$ tale che

1. $V(x)$ sia DP in qualsiasi intorno di x_e e radialmente illimitata
2. $\dot{V}(x)$ sia SDN in qualsiasi intorno di x_e
3. il massimo insieme invariante M contenuto in P (l'insieme dei punti di \mathbb{R}^n per cui $\dot{V} = 0$) contenga solo x_e

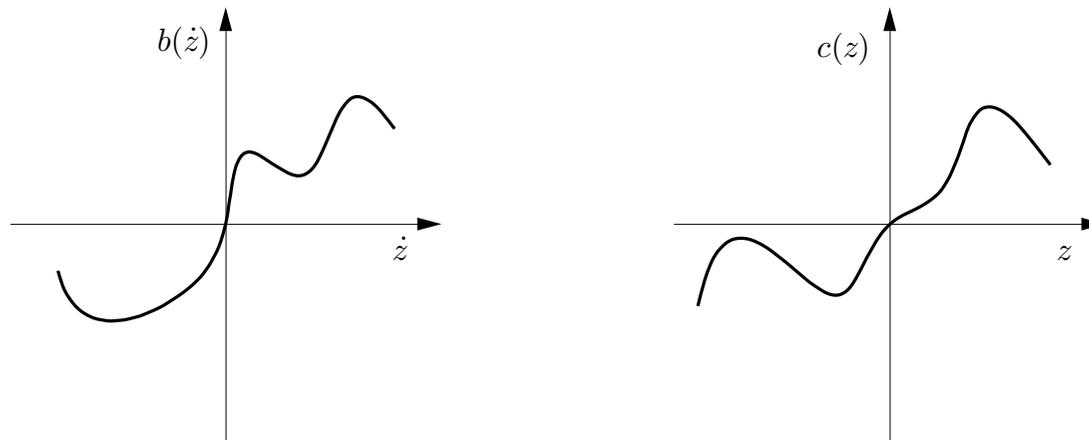
es: si consideri la famiglia di sistemi non lineari del secondo ordine descritta da

$$\ddot{z} + b(\dot{z}) + c(z) = 0$$

dove le funzioni generiche b e c sono continue e verificano le condizioni

$$\dot{z} b(\dot{z}) > 0, \forall \dot{z} \neq 0 \quad z c(z) > 0, \forall z \neq 0$$

si noti che queste condizioni, insieme alla continuità, implicano che $b(0) = 0$, $c(0) = 0$



fanno parte di questa famiglia i sistemi meccanici massa-molla-smorzatore (con molla e smorzatore non lineari, rappresentati rispettivamente dalla forza di richiamo elastica $c(z)$ e dalla forza di attrito $b(\dot{z})$) e i circuiti elettrici RLC (con resistenza $b(\dot{z})$ e capacità $c(z)$ non lineari)

si consideri il punto di equilibrio $x_e = (z_e, \dot{z}_e) = (0, 0)$; una candidata di Lyapunov è l'energia totale del sistema (ad esempio, cinetica + potenziale)

$$V(x) = \frac{1}{2} \dot{z}^2 + \int_0^z c(y) dy$$

che è DP in qualsiasi intorno di x_e

si ha

$$\dot{V}(z) = \dot{z}\ddot{z} + c(z)\dot{z} = -\dot{z}b(\dot{z}) - \dot{z}c(z) + c(z)\dot{z} = -\dot{z}b(\dot{z})$$

che nelle ipotesi del problema è SDN in qualsiasi intorno di $x_e = 0$

l'insieme P è costituito dagli stati per cui $\dot{V} = 0$, ovvero dai punti aventi $\dot{z} = 0$; qual è il massimo insieme invariante M contenuto in P ?

la dinamica del sistema in P è

$$\ddot{z} = -c(z)$$

se $z \neq 0$, si ha $\ddot{z} \neq 0$ e quindi \dot{z} varia, facendo uscire la traiettoria $x(t)$ dall'insieme $P \Rightarrow$ l'insieme M consiste solo dell'origine, cui dunque converge qualsiasi traiettoria

dunque l'origine è un pde **asintoticamente stabile** per il sistema

inoltre, se $\int_0^z c(y) dy$ è illimitato per $|z| \rightarrow \infty$, $V(x)$ risulta essere radialmente illimitata, e quindi x_e è un pde **globalmente asintoticamente stabile** ■

Criterio indiretto di Lyapunov

idea di base

analizzare la stabilità dell'**approssimazione lineare** del sistema intorno al punto di equilibrio x_e : in certe condizioni, è possibile trarre da ciò conclusioni sulla stabilità o meno di x_e **per il sistema originario**

si consideri il generico sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{con } x_e \text{ pde, cioè } f(x_e) = 0$$

nell'ipotesi che $f \in C^\infty$, la si può sviluppare in serie di Taylor nell'intorno di x_e

$$f(x) = f(x_e) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_e} (x - x_e) + h(x - x_e) = J(x_e)(x - x_e) + h(x - x_e)$$

dove $h(x - x_e)$ raccoglie gli (infiniti) termini di grado superiore al primo e $J(x_e)$ è la matrice Jacobiana di f rispetto a x , calcolata in x_e

effettuiamo una trasformazione di coordinate

$$\xi = x - x_e \quad \implies \quad \dot{\xi} = \dot{x} = f(x) = J(x_e)\xi + h(\xi)$$

nell'intorno di x_e , i termini di ordine superiore sono trascurabili rispetto a quello lineare \implies si può associare al sistema non lineare originario la seguente **approssimazione lineare**

$$\dot{\xi} = J(x_e)\xi$$

che è naturalmente tanto più accurata quanto più lo stato è prossimo a x_e

l'analisi dell'approssimazione lineare $\dot{\xi} = J(x_e)\xi$ conduce a risultati interessanti sul sistema non lineare originario $\dot{x} = f(x)$

Teorema

se la matrice $J(x_e)$ è **non singolare**, x_e è un pde **isolato** del sistema non lineare

dim per assurdo: se ciò non fosse vero, in qualsiasi intorno di x_e cadrebbe almeno un punto x'_e tale che $f(x'_e) = f(x_e) = 0$; si avrebbe allora

$$f(x'_e) = f(x_e) + J(x_e)(x'_e - x_e) + h(x'_e - x_e) = 0 \implies J(x_e)(x'_e - x_e) + h(x'_e - x_e) = 0$$

poiché x'_e varia, tale condizione richiede di fatto che siano nulli entrambi gli addendi, in particolare, deve essere $J(x_e)(x'_e - x_e) = 0$, che però contraddice il fatto che $J(x_e)$ sia non singolare ■

il viceversa non è vero; può accadere che x_e sia isolato e $J(x_e)$ risulti singolare

es: si consideri il sistema non lineare

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_2\end{aligned}$$

il cui unico pde è l'origine; tuttavia

$$J(x_e) = \left(\begin{array}{cc} 2x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \Big|_{x_e} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$$

che è singolare ■

il risultato più forte è il seguente

Teorema (criterio indiretto di stabilità di Lyapunov)

si consideri l'approssimazione lineare $\dot{\xi} = J(x_e)\xi$ di un sistema non lineare $\dot{x} = f(x)$ intorno a un suo punto di equilibrio x_e

1. se tutti gli autovalori di $J(x_e)$ hanno parte reale negativa (\Rightarrow l'approssimazione lineare è AS) x_e è un pde **asintoticamente stabile** per il sistema non lineare
2. se almeno uno degli autovalori di $J(x_e)$ ha parte reale positiva (\Rightarrow l'approssimazione lineare è I) x_e è un pde **instabile** per il sistema non lineare

dim basata sull'applicazione del criterio diretto di Lyapunov: in particolare, si dimostra che una funzione di Lyapunov per l'approssimazione lineare risulta essere tale anche per il sistema non lineare

comunque: la tesi è intuitiva per **continuità** ■

- la stabilità asintotica dell'origine dell'approssimazione lineare (che è sempre globale) consente di concludere solo la stabilità asintotica **locale** di x_e per il sistema non lineare
- in effetti il teorema contiene anche un criterio di **instabilità**
- se nessun autovalore di $J(x_e)$ ha parte reale positiva, ma qualcuno di essi ha parte reale nulla (\Rightarrow l'approssimazione lineare è SS o I, a seconda della relazione tra molteplicità geometrica e algebrica per questi autovalori) si è nel **caso critico**: non si può concludere **nulla** sulla natura del pde x_e per il sistema non lineare (sono decisivi i termini di ordine superiore al primo)

es: riprendiamo ancora in esame il pendolo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g \sin x_1 - x_2\end{aligned}$$

la matrice Jacobiana è

$$J(x) = \frac{df}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g \cos x_1 & -1 \end{pmatrix}$$

- nell'intorno del pde $x_e^{\text{down}} = (0, 0)$ si ha

$$J_e^{\text{down}}(x) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_e^{\text{down}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g & -1 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $\lambda^2 + \lambda + g$; quindi l'approssimazione lineare del pendolo nell'intorno di x_e^{down} è AS

$\implies x_e^{\text{down}}$ è un pde asintoticamente stabile per il pendolo

- nell'intorno del pde $x_e^{\text{up}} = (\pi, 0)$ si ha

$$J_e^{\text{up}}(x) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_e^{\text{up}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & -1 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $\lambda^2 + \lambda - g$; quindi l'approssimazione lineare del pendolo nell'intorno di x_e^{up} è I

$\implies x_e^{\text{up}}$ è un pde instabile per il pendolo

■

spesso, tuttavia, il criterio indiretto **non è risolutivo** perché ci si trova nel caso critico; in questi casi si deve ricorrere al criterio diretto, che è più potente (e, con l'aiuto del teorema dell'insieme invariante, consente anche di stabilire l'eventuale dominio di attrazione, che non è direttamente analizzabile con il metodo indiretto)

es: si consideri il sistema non lineare

$$\dot{x} = -x^3$$

avente come unico pde $x_e = 0$

la Jacobiana è in questo caso uno scalare

$$J(x_e) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_e} = -3x^2 \Big|_{x_e} = 0$$

e dunque l'approssimazione lineare del sistema intorno a x_e è $\dot{\xi} = 0 \Rightarrow$ siamo nel **caso critico**

si consideri allora la seguente candidata di Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2} x^2 \quad \text{DP in qualsiasi intorno dell'origine, e radialmente illimitata}$$

si ha

$$\dot{V}(x) = -x^4 \quad \text{DN in qualsiasi intorno dell'origine}$$

$\Rightarrow x_e = 0$ è dunque un pde GAS per il sistema (prevedibile, cfr. esempio slide 31) ■