Università di Roma Tre

Complementi di Controlli Automatici

Stabilizzazione via retroazione dallo stato

Prof. Giuseppe Oriolo
DIS, Università di Roma "La Sapienza"

Introduzione

consideriamo un generico sistema dinamico **non lineare** tempo-invariante

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u) \\ y &= g(x) \end{aligned}$$

con stato $x \in I\!R^n$, ingresso $u \in I\!R^p$, e uscita $y \in I\!R^q$

problema di stabilizzazione via retroazione dallo stato

progettare una legge di controllo $u = k(x)$ tale che il sistema ad anello chiuso

$$\dot{x} = f(x, k(x))$$

abbia uno stato assegnato x_d come punto di equilibrio **asintoticamente stabile**

- x_d è specificato del problema di controllo e rappresenta uno **stato operativo desiderato** per il sistema: ad esempio, un assetto per un satellite, una postura nello spazio per un manipolatore robotico, una temperatura per un sistema di climatizzazione
- non è detto che x_d sia un punto di equilibrio del sistema ad anello aperto; **deve** però diventarlo per il sistema ad anello chiuso
- nel seguito si assume che x_d sia l'**origine**; infatti, è sempre possibile ricondursi a questo caso effettuando la traslazione di coordinate $z = x - x_d$

- per un sistema **lineare** $\dot{x} = Ax + Bu$, una retroazione dallo stato è $u = Kx$; il sistema ad anello chiuso diventa

$$\dot{x} = Ax + BKx = (A + BK)x$$

  com'è noto, il problema di stabilizzazione via retroazione dallo stato è risolubile se la coppia (A, B) è **stabilizzabile**, cioè se essa è completamente raggiungibile oppure se eventuali autovalori non raggiungibili hanno parte reale negativa

- una retroazione del tipo $u = k(x)$ viene definita **statica** perché è priva di memoria; si parla di retroazione **dinamica** quando il controllo è a sua volta l'uscita di un sistema dinamico guidato dallo stato x:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \phi(\xi, x) \\ u &= k(\xi) \end{aligned}$$

- la retroazione dallo stato presuppone la misurabilità di tutte le componenti di x; quando ciò non è possibile, si ricorre alla **retroazione dall'uscita**, che può essere statica ($u = k(y)$) o, più spesso, dinamica:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \phi(\xi, y) \\ u &= k(\xi) \end{aligned}$$

  ad esempio, si pensi all'inclusione di un osservatore dello stato nel caso lineare

Stabilizzazione mediante approssimazione lineare

idea di base

calcolare l'**approssimazione lineare** del sistema intorno all'origine e stabilizzarla attraverso una retroazione **lineare**; per il criterio indiretto di Lyapunov, l'origine sarà **localmente** asintoticamente stabile per il sistema non lineare

es: si consideri il sistema scalare

$$\dot{x} = x^2 + u$$

la cui approssimazione lineare intorno all'origine è $\dot{x} = u$, che è ovviamente stabilizzata dalla retroazione lineare $u = -kx$, con $k > 0$

applicando questo controllo al sistema non lineare, esso diventa ad anello chiuso

$$\dot{x} = x^2 - kx \qquad (*)$$

che, per il criterio indiretto di Lyapunov, ha nell'origine un pde asintoticamente stabile

- la proprietà è **locale**: il sistema $(*)$ ha infatti un altro pde in $x = k$, e diverge per $x > k$ $\Rightarrow$ si dice che $u = -kx$ dà stabilità **regionale**, e la regione di attrazione è $\Omega = \{x : x < k\}$
- per ottenere convergenza da qualsiasi insieme $S = \{x : |x| > r\}$, basta porre $k > r$; la stabilità è **semiglobale**, nel senso che modificando i parametri del controllore (qui k) si può includere in Ω qualsiasi intorno dell'origine
- la stabilità ottenuta non è comunque globale, poiché una volta scelto k esistono stati (qui $\{x : x > k\}$) da cui non si ha convergenza ■

applichiamo il medesimo approccio al generico sistema non lineare tempo-invariante

$$\dot{x} = f(x, u)$$

l'approssimazione lineare del sistema intorno al punto di equilibrio $(x = 0, u = 0)$ è

$$\dot{x} = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{x=0,u=0} (x - 0) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{x=0,u=0} (u - 0) = Ax + Bu$$

se la coppia (A, B) risulta **stabilizzabile**, si può progettare una retroazione lineare dallo stato $u = Kx$ tale che gli autovalori di $(A + BK)$ hanno parte reale negativa, e l'approssimazione lineare risulta dunque (globalmente ed esponenzialmente) asintoticamente stabile

$\Rightarrow$ $u = Kx$ rende l'origine (localmente) **asintoticamente stabile** per il sistema non lineare

- se la coppia (A, B) risulta **non stabilizzabile**, non esiste una retroazione lineare che stabilizza l'approssimazione lineare; **non si può tuttavia escludere** che esista una retroazione in grado di stabilizzare il sistema non lineare, e neppure che questa possa essere lineare

  es: $\dot{x} = u^3$, la cui approssimazione lineare è $\dot{x} = 0$, viene stabilizzato da $u = -x$

- questo approccio fornisce anche una **stima del dominio di attrazione**, poiché è facile scrivere una funzione di Lyapunov per il sistema non lineare a partire dall'approssimazione lineare; a questo scopo, è utile il seguente risultato

Teorema

> un sistema lineare $\dot{x} = Ax$ è asintoticamente stabile se e solo se, fissata comunque una matrice Q simmetrica e definita positiva, la seguente **equazione di Lyapunov**
>
> $$PA + A^T P = -Q$$
>
> ammette nell'incognita P un'unica soluzione simmetrica e definita positiva

dim (sufficienza) è un'applicazione del criterio diretto di stabilità di Lyapunov; infatti, presa come candidata di Lyapunov la

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x$$

che è DP per ipotesi, si ha

$$\dot{V} = x^T P \dot{x} = x^T P A x = \frac{1}{2}(x^T P A x + x^T P A x) = \frac{1}{2}[x^T (PA + A^T P) x] = -\frac{1}{2} x^T Q x$$

che è DN per ipotesi (si è usata la $x^T PAx = (x^T PAx)^T = x^T A^T P x$) ■

nel caso in esame, essendo l'approssimazione lineare ad anello chiuso $\dot{x} = (A + BK)x$ asintoticamente stabile, essa ammette come funzione di Lyapunov la

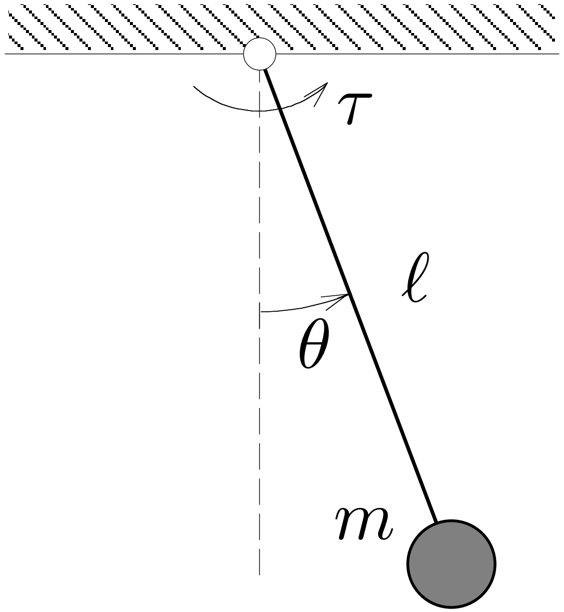
$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x$$

dove P è l'unica soluzione simmetrica e definita positiva della corrispondente equazione di Lyapunov

$$P(A + BK) + (A + BK)^T P = -Q$$

con Q arbitraria ma simmetrica e definita positiva (ad esempio, $Q = I$)

es: pendolo con attuatore alla base



$$m\ell^2\ddot{\theta} + k\ell\dot{\theta} + mg\ell \sin\theta = \tau$$

ponendo $x = (x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta})$ e $\tau = u$ l'equazione nello spazio di stato è

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin x_1 - bx_2 + cu \end{aligned}$$

dove $a = g/\ell$, $b = k/m\ell$, $c = 1/m\ell^2$ $(a, b, c > 0)$

supponiamo di voler stabilizzare il pendolo ad un angolo θ_d **generico**; il punto di equilibrio desiderato è dunque $x_d = (x_{1d}, x_{2d}) = (\theta_d, 0)$

effettuando la trasformazione di coordinate $z = x - x_d = (x_1 - \theta_d, x_2)$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -a \sin(z_1 + \theta_d) - b z_2 + c u \end{aligned}$$

affinché l'origine $z_1 = 0, z_2 = 0$ sia un punto di equilibrio, è necessario che l'ingresso u includa una **componente di regime** u_r che soddisfi la

$$-a \sin\theta_d + c u_r = 0 \qquad \text{cioè} \qquad u_r = \frac{a}{c} \sin\theta_d$$

u_r è la coppia che bilancia la forza di gravità quando il pendolo si trova in $\theta = \theta_d$

si ponga allora $u = u_t + u_r = u_t + \dfrac{a}{c} \sin\theta_d$; si ha

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -a[\sin(z_1 + \theta_d) - \sin\theta_d] - b z_2 + c u_t \end{aligned}$$

che ha finalmente $z = 0$, $u_t = 0$ come punto di equilibrio

l'approssimazione lineare del sistema è caratterizzata dunque dalle matrici

$$\begin{aligned} A &= \left.\frac{\partial f(z, u_t)}{\partial z}\right|_{z=0, u_t=0} = \left.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a\cos(z_1 + \theta_d) & -b \end{pmatrix}\right|_{z=0, u_t=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a\cos\theta_d & -b \end{pmatrix} \\ B &= \left.\frac{\partial f(z, u_t)}{\partial u_t}\right|_{z=0, u_t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

la matrice di raggiungibilità è

$$\begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & -bc \end{pmatrix}$$

la coppia (A, B) è quindi stabilizzabile, è anzi è possibile assegnare arbitrariamente gli autovalori ad anello chiuso dell'approssimazione lineare; è facile verificare che la retroazione lineare

$$u_t = Kz = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = k_1 z_1 + k_2 z_2$$

rende a parte reale negativa gli autovalori di $A + BK$ purché sia $k_1 < \frac{a}{c} \cos\theta_d$ e $k_2 < \frac{b}{c}$

$\Rightarrow$ in queste ipotesi, la coppia in retroazione

$$u = u_t + u_r = k_1 z_1 + k_2 z_2 + \frac{a}{c} \sin\theta_d = k_1(\theta - \theta_d) + k_2 \dot{\theta} + \frac{a}{c} \sin\theta_d$$

rende (localmente) asintoticamente stabile il punto $(\theta_d, 0)$ per il pendolo

- si noti l'**interpretazione fisica** del termine u_t, che 'simula' la presenza di una molla angolare che richiama il pendolo nella posizione θ_d e di uno smorzatore viscoso che dissipa energia

- è possibile stimare il dominio di attrazione dello stabilizzatore usando come candidata di Lyapunov del sistema non lineare una funzione di Lyapunov per l'approssimazione lineare, e utilizzando opportunamente il teorema dell'insieme invariante ponendo per esempio $a = c = 1$, $b = 0$, $\theta_d = \pi$ e $k_1 = k_2 = -1$ si trova

$$A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e la corrispondente equazione di Lyapunov (per $Q = I$)

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ammette la soluzione simmetrica e definita positiva

$$P = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi si può usare come funzione di Lyapunov per il sistema non lineare la

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} x$$

determinando il più grande intorno dove $\dot{V}(x)$ è DN, e individuando al suo interno più ampia regione limitata e connessa definita dalla $V(x) < \alpha$, $\alpha > 0$, si ottiene una stima del dominio di attrazione per il controllore lineare in esame (cfr. teorema dell'insieme invariante) ■

Stabilizzazione mediante linearizzazione esatta: cenni

la principale limitazione della tecnica di stabilizzazione mediante l'approssimazione lineare consiste nel fatto che la convergenza è garantita solo all'interno di un dominio di attrazione, che può essere più o meno grande; qualche volta ciò non è accettabile in pratica

es: per il sistema scalare

$$\dot{x} = x^2 + u$$

abbiamo visto che la retroazione lineare $u = -kx$, con $k > 0$, rende l'origine asintoticamente stabile, con regione di attrazione $\Omega = \{x : x < k\}$

si consideri però la seguente legge di controllo **non lineare**

$$u = -x^2 - kx$$

che **cancella** il termine non lineare x^2 e conduce al seguente sistema ad anello chiuso

$$\dot{x} = -kx$$

il sistema è **esattamente** lineare, e l'origine è dunque un punto di equilibrio **globalmente** asintoticamente stabile

la legge di controllo ha due componenti: una $(-x^2)$ ha il compito di **linearizzare** esattamente la dinamica ad anello chiuso, e l'altra $(-kx)$ quello di **stabilizzare** tale dinamica ■

es: riprendiamo in esame il pendolo con attuatore alla base

$$\begin{aligned}\dot z_1 &= z_2\\ \dot z_2 &= -a[\sin(z_1+\theta_d)-\sin\theta_d]-bz_2+cu_t\end{aligned}$$

avendo già effettuato la traslazione necessaria a spostare il punto di equilibrio desiderato $(\theta_d, 0)$ nell'origine, ed evidenziato la coppia di regime

l'ispezione della seconda equazione differenziale, che è l'unica a contenere termini non lineari, suggerisce la seguente scelta per u_t

$$u_t = \frac{a}{c}\,[\sin(z_1+\theta_d)-\sin\theta_d]+\frac{v}{c}$$

la dinamica ad anello chiuso diventa lineare e controllabile

$$\begin{aligned}\dot z_1 &= z_2\\ \dot z_2 &= -bz_2+v\end{aligned}$$

è dunque possibile stabilizzarla **globalmente** all'origine attraverso il 'nuovo' ingresso v

$$v = k_1 z_1 + k_2 z_2$$

con k_1 e k_2 scelti in modo da assegnare autovalori arbitrari al sistema ad anello chiuso

riassumendo, il controllore risultante è

$$u = u_t + u_r = \frac{a}{c}\sin\theta + \frac{1}{c}[k_1(\theta-\theta_d)+k_2\dot\theta] \qquad \blacksquare$$

allora, è naturale chiedersi

quanto è generale l'idea di cancellare le non linearità attraverso la retroazione? esiste una **proprietà strutturale** dei sistemi che garantisce tale possibilità?

siamo **certamente** in grado di farlo se l'equazione di stato ha la seguente struttura

$$\dot{x} = Ax + B\beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)]$$

con $\beta^{-1}(x)$ matrice non singolare in un dominio che contiene l'origine (si noti che i due esempi visti in precedenza hanno esattamente tale struttura)

infatti basta porre

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

per ottenere il sistema lineare

$$\dot{x} = Ax + Bv$$

che può essere stabilizzato ponendo $v = Kx$ (se la coppia (A, B) è stabilizzabile); la retroazione complessiva è

$$u = \alpha(x) + \beta(x)Kx$$

si noti che essa è **non lineare**!

se il modello del sistema **non** ha la struttura suddetta, può darsi che possa essere portato in tale forma mediante una **trasformazione di coordinate**

es: per il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a \sin x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 + u \end{aligned}$$

è evidente che non è possibile cancellare la non linearità $a \sin x_2$ attraverso u

si consideri però la seguente trasformazione di coordinate

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= a \sin x_2 = \dot{x}_1 \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= a \cos x_2 (-x_1^2 + u) \end{aligned}$$

ora, è possibile cancellare le non linearità con la retroazione

$$u = x_1^2 + \frac{1}{a \cos x_2} v$$

che è ben definita per $-\pi/2 < x_2 < \pi/2$

si osservi che la trasformazione di coordinate $z = T(x)$ è ben posta, poiché può essere invertita come segue

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 \\ x_2 &= \arcsin\left(\frac{z_2}{a}\right) \end{aligned}$$

nell'insieme $-a < z_2 < a$

inoltre, sia la trasformazione $T(\cdot)$ che la sua inversa $T^{-1}(\cdot)$ sono derivabili con derivata continua $\Rightarrow$ si dice che $T(\cdot)$ è un **diffeomorfismo** ■

le proprietà dell'esempio appena visto possono essere estrapolate nella seguente definizione

un sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x, u)$$

si dice **linearizzabile ingresso-stato** se esiste un diffeomorfismo $z = T(x)$, definito su un dominio D_x che contenga l'origine, che mette il sistema nella forma

$$\dot{z} = Az + B\beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)]$$

con la matrice $\beta^{-1}(x)$ non singolare in D_x

i sistemi linearizzabili ingresso-stato possono essere dunque efficacemente controllati (ad esempio, stabilizzati in modo globale) attraverso una **trasformazione di coordinate** e una **retroazione statica dallo stato** che ha una funzione duplice: (1) cancellare le non linearità (2) controllare il sistema linearizzato

- esiste anche la possibilità di linearizzare ingresso-stato un sistema attraverso una trasformazione di coordinate e una retroazione **dinamica** dallo stato; la classe dei sistemi che possono essere linearizzati con tale procedura è **più ampia** di quelli dei sistemi linearizzabili con retroazione statica

- nel caso in cui il problema di controllo sia formulato a livello delle **uscite** del sistema (ad esempio, nei problemi di inseguimento di uscite di riferimento), si può cercare di ottenere una **linearizzazione ingresso-uscita**, utilizzando anche in questo caso una trasformazione di coordinate e una retroazione statica o dinamica dallo stato

- uno svantaggio di questo approccio è che la cancellazione delle non linearità richiede la conoscenza **esatta** dei parametri del modello; ad esempio, nel caso del pendolo la coppia 'transitoria' u_t era data da

$$u_t = \frac{a}{c}(\sin\theta - \sin\theta_d) + \frac{1}{c}[k_1(\theta - \theta_d) + k_2\dot{\theta}]$$

  che contiene le costanti a, c, dipendenti dai parametri meccanici del pendolo; invece, per il controllore basato sull'approssimazione lineare si aveva

$$u_t = k_1(\theta - \theta_d) + k_2\dot{\theta}$$

  $\Rightarrow$ per i controllori progettati attraverso il metodo della linearizzazione esatta esiste un potenziale problema di **robustezza** rispetto a variazioni dei parametri, che deve essere analizzato con cura

- un altro svantaggio del metodo basato sulla linearizzazione esatta è che può condurre alla cancellazione di termini **non lineari** ma **benefici** per la stabilizzazione

  es: si consideri il sistema scalare non lineare

  $$\dot{x} = ax - bx^3 + u \qquad a, b > 0$$

  un controllore basato sulla filosofia della linearizzazione esatta è il seguente

  $$u = -kx + bx^3 \qquad k > a$$

  in realtà, il termine $-bx^3$ è interpretabile come una **forza di richiamo non lineare**, che spinge lo stato verso l'origine; infatti, il semplice controllore lineare

  $$u = -kx \qquad k > a$$

  conduce al sistema ad anello chiuso

  $$\dot{x} = -(k - a)x - bx^3$$

  l'origine è GAS, e le traiettorie convergono più rapidamente che per $\dot{x} = -(k - a)x$ ■

  una conseguenza di questa cancellazione inutile, legata alla natura matematica (e non fisica) della filosofia di sintesi basata sulla linearizzazione esatta, è tipicamente uno **sforzo di controllo più elevato** (nell'esempio, il controllore $u = -kx + bx^3$ assume valori assoluti molto più grandi di $u = -kx$ quando si è lontani dall'origine)

  $\Rightarrow$ spesso conviene progettare il controllore mediante il **criterio diretto di Lyapunov** (che si presta meglio ad una interpretazione fisica), senza alcun tipo di linearizzazione: vedremo successivamente l'applicazione di questo approccio ai manipolatori robotici