Università di Roma Tre – A.A. 2005/06

Complementi di Controlli Automatici

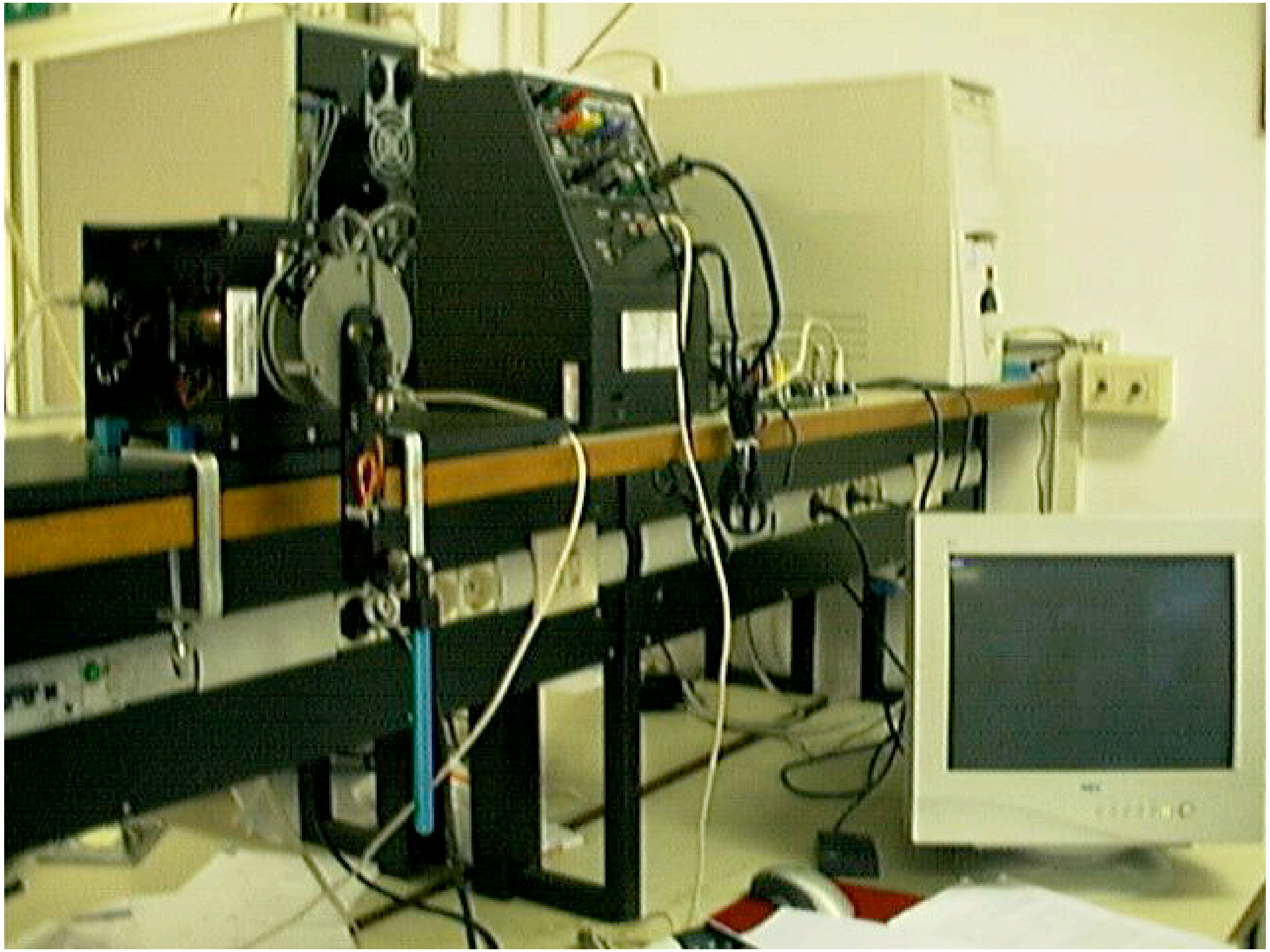
Controllo del Robot Pendubot

Marilena Vendittelli
DIS, Università di Roma "La Sapienza"

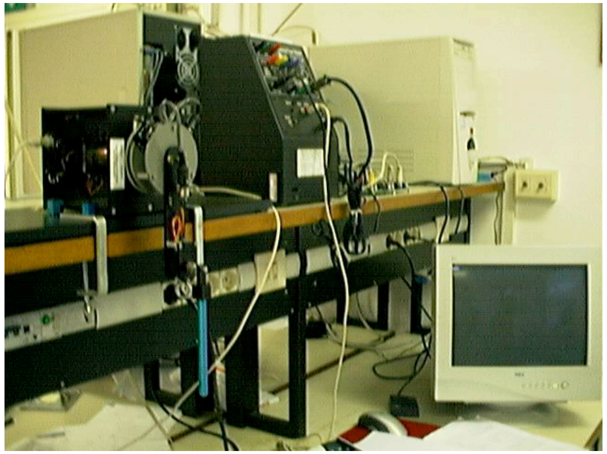
Sommario

- Il sistema Quanser Pendubot
- Obiettivi del controllo
- Modellistica dinamica
- Linearizzazione e analisi
- Progetto del controllore

Il sistema Quanser Pendubot

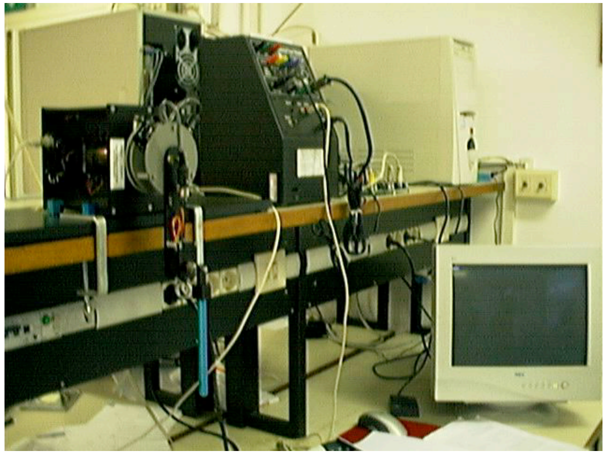


Componenti del sistema - 1



- robot: a 2 gradi di libertà rotanti sottoattuato (un solo motore sul primo giunto) in moto nel piano xy verticale (asse x verticale in basso)
- sensori: due encoder ottici incrementali ai giunti (risoluzioni 1/8192 e 1/4096 su angolo giro)
- attuatore: motore in c.c. a magneti permanenti pilotato in corrente da uno stadio di potenza (UPM) con onda quadra modulata in ampiezza (PWM a 40 KHz) come segnale applicato al motore

Componenti del sistema - 2



- interfaccia: scheda acquisizione dati e conversione A/D e D/A (MultiQ-PCI) con filtri passa-basso + scheda con connettori per canali ingresso-uscita
- PC: Pentium III con MS Windows NT
- software: Matlab/Simulink (progetto/simulazione/realizzazione del sistema di controllo), Real-Time Workshop (generatore automatico di codice C++ da modelli Simulink), Quanser WinCon (ambiente Simulink esteso per operazioni in tempo reale [download file .wcl, lettura encoder, timer setup, . . .] basato su architettura client-server)

Obiettivi del controllo

- Regolazione di posizione
  - configurazioni di equilibrio libero o forzato
  - interesse per quelle instabili ad anello aperto
  - manovre globali di swing-up
  - stabilizzazione locale tramite feedback lineare dallo stato

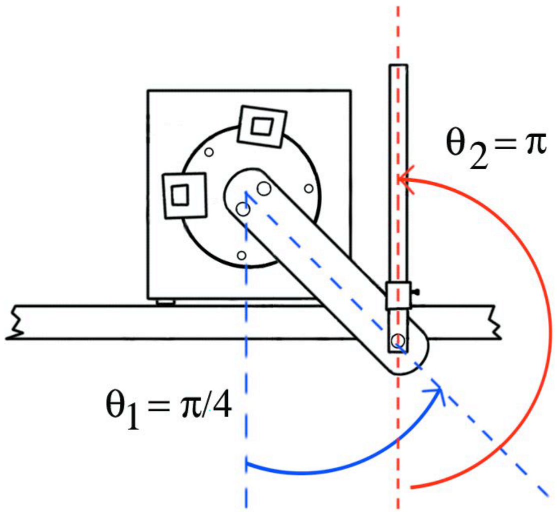
- Inseguimento di traiettorie
  - dinamicamente ammissibili

Modello dinamico

- sistema elettro-meccanico a più gradi di libertà
- equazioni di bilanciamento elettrico del motore
  - motore c.c. comandato in corrente i_a d'armatura: coppia $\tau = k_i i_a$
  - amplificatore tensione–corrente: $i_a = k_{\mathsf{UPM}} v_c$, con v_c tensione di controllo
- equazioni di Eulero-Lagrange (formulazione energetica) del braccio meccanico
- accoppiamento diretto motore–braccio 1 (direct-drive), senza riduttori del moto o trasmissioni
- fenomeni di attrito (viscoso, statico) ai giunti (connessioni elettriche striscianti) rilevanti, ma trascurati qui in fase di analisi

Equazioni di Eulero-Lagrange

1. scelta di coordinate generalizzate che descrivono la configurazione del robot



$\theta = (\theta_1, \theta_2)$: posizioni angolari assolute dei bracci rispetto alla verticale

2. calcolo di energia cinetica $T = T(\theta, \dot{\theta})$ ed energia potenziale (gravitazionale) $U = U(\theta)$ dei corpi (bracci)

3. il Lagrangiano $L = T - U$ soddisfa le equazioni vettoriali

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)^T = u$$

dove $u = (u_1, u_2)$ sono le coppie non conservative (coppia fornita dal primo motore, attrito dissipativo sui due giunti)

in forma scalare

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = u_i, \qquad\qquad i = 1, 2$$

4. modello dinamico risultante

$$M(\theta)\ddot{\theta} + c(\theta, \dot{\theta}) + g(\theta) = u$$

con $M(\theta)$ = matrice di inerzia, $c(\theta, \dot{\theta})$ = vettore di coppie dovute alle velocità centrifughe (e di Coriolis), $g(\theta)$ = vettore di coppie dovute alla gravità

Passaggi

- energia cinetica $T = T_1 + T_2$ dei due bracci

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2} m_1 (d_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} I_1 \, \dot{\theta}_1^2 \\
T_2 &= \frac{1}{2} m_2 v_{c2}^T v_{c2} + \frac{1}{2} I_2 \, \dot{\theta}_2^2 = \dots
\end{aligned}
$$

con

$$
\begin{aligned}
m_i &= \text{massa del braccio } i \\
d_i &= \text{distanza del baricentro del braccio } i \text{ dall'asse di rotazione} \\
I_i &= \text{momento di inerzia del braccio } i \text{ intorno al suo baricentro} \\
v_{c2} &= \dot{p}_{c2} = \text{velocità planare del baricentro del braccio 2} \\
\ell_1 &= \text{lunghezza del braccio 1}
\end{aligned}
$$

$$p_{c2} = \begin{bmatrix} \ell_1 c_1 + d_2 c_2 \\ \ell_1 s_1 + d_2 s_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_{c2} = \begin{bmatrix} -\ell_1 s_1 \dot{\theta}_1 - d_2 s_2 \dot{\theta}_2 \\ \ell_1 c_1 \dot{\theta}_1 + d_2 c_2 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

con $c_i = \cos\theta_i$, $s_i = \sin\theta_i$ $(i = 1, 2)$, da cui

$$T_2 = \ldots = \frac{1}{2} m_2 \left[\ell_1 \dot{\theta}_1^2 + d_2 \dot{\theta}_2^2 + 2\ell_1 d_2 c_{2-1} \right] + \frac{1}{2} I_2 \, \dot{\theta}_2^2$$

con $c_{2-1} = \cos(\theta_2 - \theta_1)$

- energia potenziale $U = U_1 + U_2$ dei due bracci (a meno di una costante)

$$\begin{aligned} U_1 &= -m_1 g_0 d_1 c_1 \\ U_2 &= -m_2 g_0 \left(\ell_1 c_1 + d_2 c_2 \right) \end{aligned}$$

con $g_0 = 9.81$ m/sec^2. U_i è legata alla quota del baricentro del braccio i

- le coppie non conservative (a destra nelle equazioni di Eulero-Lagrange) sono

$$u = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{v1}\dot{\theta}_1 \\ F_{v2}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{s1}\,\mathsf{sign}(\dot{\theta}_1) \\ F_{s2}\,\mathsf{sign}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \end{bmatrix}$$

  dove τ = coppia fornita dal motore alla base, F_{vi} = coefficiente di attrito viscoso al giunto i, F_{si} = coefficiente di attrito statico al giunto i $(i = 1, 2)$

  Nota: da ora in poi, attriti trascurati per semplicità

- dal Lagrangiano $L = T - U$, eseguendo le derivazioni indicate nelle equazioni di Eulero-Lagrange, si ottengono 2 equazioni differenziali (non-lineari) del 2° ordine

$$\begin{aligned} \left(I_1 + m_1 d_1^2 + m_2 \ell_1^2\right)\ddot{\theta}_1 + m_2\ell_1 d_2 c_{2-1}\ddot{\theta}_2 - m_2\ell_1 d_2 s_{2-1}\dot{\theta}_2^2 & \\ + g_0\,(m_1 d_1 + m_2\ \ell_1)\,s_1 &= \tau \\ m_2\ell_1 d_2 c_{2-1}\ddot{\theta}_1 + \left(I_2 + m_2 d_2^2\right)\ddot{\theta}_2 + m_2\ell_1 d_2 s_{2-1}\dot{\theta}_1^2 + g_0 m_2 d_2 &= 0 \end{aligned}$$

- in forma compatta (matriciale) si ha

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 c_{2-1} \\ \alpha_3 c_{2-1} & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_3 s_{2-1} \dot{\theta}_2^2 \\ \alpha_3 s_{2-1} \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_4 s_1 \\ \alpha_5 s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M(\theta) > 0 \qquad\qquad c(\theta, \dot{\theta}) \qquad\qquad g(\theta)$$

avendo definito i coefficienti dinamici

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= I_1 + m_1 d_1^2 + m_2 \ell_1^2 > 0 \\
\alpha_2 &= I_2 + m_2 d_2^2 > 0 \\
\alpha_3 &= m_2 \ell_1 d_2 > 0 & (\iff d_2 > 0, \text{ qui supposto}) \\
\alpha_4 &= g_0 (m_1 d_1 + m_2\ \ell_1) > 0 & (\Leftarrow d_1 > 0) \\
\alpha_5 &= g_0 m_2 d_2 > 0 & (\iff d_2 > 0)
\end{aligned}$$

Linearizzazione e analisi

- matrice di inerzia simmetrica e definita positiva ($T = \frac{1}{2}\dot{\theta}^T M(\theta)\dot{\theta} \geq 0$)

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \det M(\theta) = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2 c_{2-1}^2 > 0 \ (\forall\theta)$$

- configurazioni di equilibrio θ_e del sistema meccanico: si pone $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$

$$g(\theta_e) = \begin{bmatrix} \tau_e \\ 0 \end{bmatrix}$$

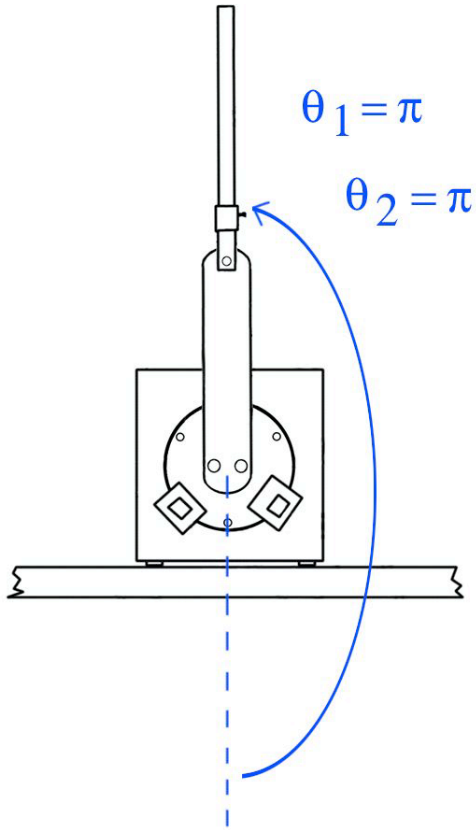
  – equilibrio libero (con $\tau_e = 0$)

$$g(\theta_e) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin\theta_{1e} = \sin\theta_{2e} = 0 \qquad \text{(4 soluzioni)}$$

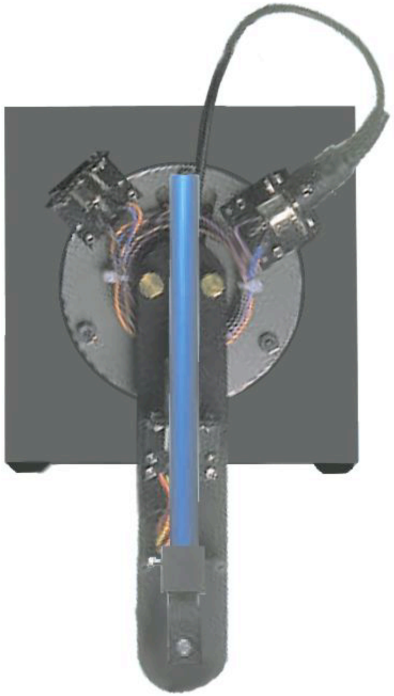
  – equilibrio forzato (con $\tau_e \neq 0$)

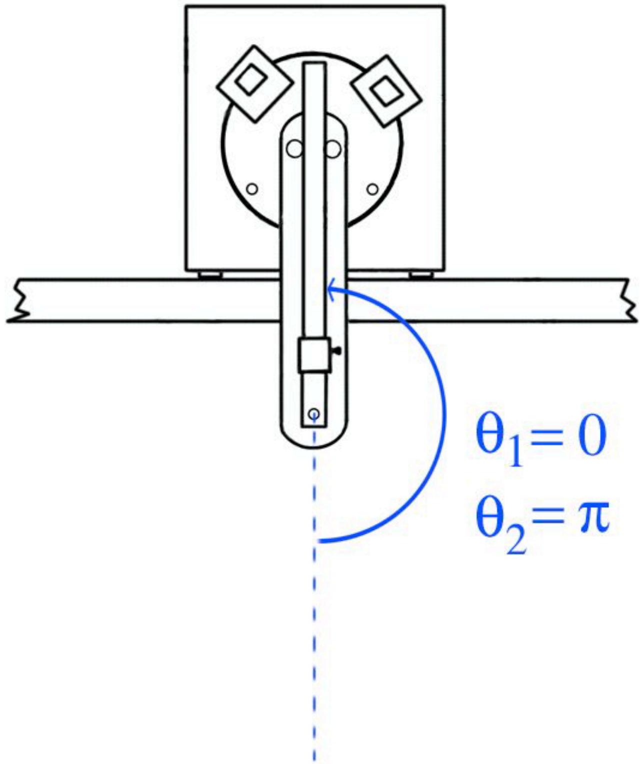
$$\sin\theta_{1e} = \frac{\tau_e}{\alpha_4} \qquad \sin\theta_{2e} = 0 \qquad (\infty \text{ soluzioni})$$

Configurazione di equilibrio libero: UP-UP

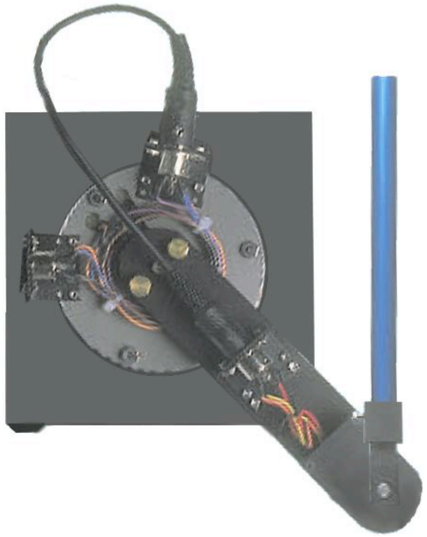


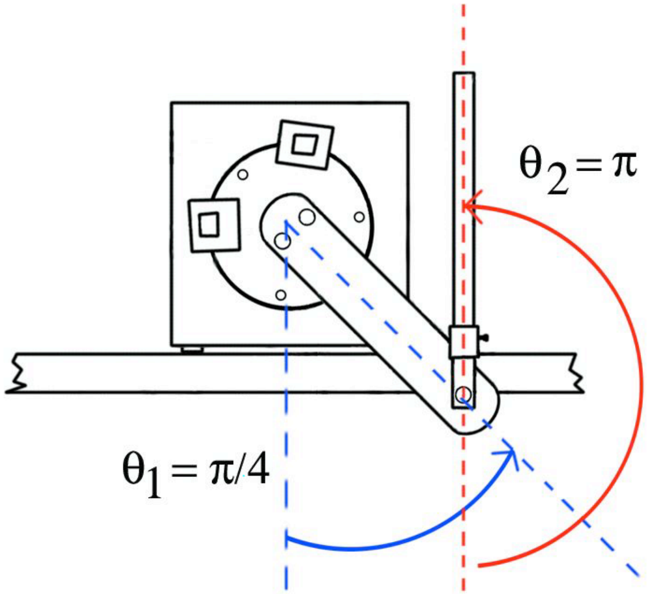
Configurazione di equilibrio libero: DOWN-UP





Configurazione di equilibrio forzato: 45°-UP





$$\tau_e = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \alpha_4 \neq 0$$

Linearizzazione intorno ad un equilibrio

- si pone (con $\dot\theta_e = \ddot\theta_e = 0$ —sempre— e con $\tau_e = 0$ per equilibrio libero)

$$\theta = \theta_e + \delta\theta \qquad \dot\theta = \dot\theta_e + \dot{\delta\theta} = \dot{\delta\theta} \qquad \ddot\theta = \ddot\theta_e + \ddot{\delta\theta} = \ddot{\delta\theta} \qquad \tau = \tau_e + \delta\tau$$

  e si sviluppano in serie di Taylor nelle (piccole) variazioni $(\delta\theta, \dot{\delta\theta}, \ddot{\delta\theta}, \delta\tau)$ tutti i termini (nonlineari) del modello dinamico

- eliminando i termini con prodotti di variazioni (quindi di ordine infinitesimo superiore al primo), si ottiene

$$M(\theta_e)\ddot{\delta\theta} + G(\theta_e)\delta\theta = \begin{bmatrix} \delta\tau \\ 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad G(\theta_e) = \left.\frac{\partial g}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_e}$$

  con i termini centrifughi/di Coriolis mai presenti (quadratici nelle velocità!)

Equazioni di stato lineari intorno all'equilibrio UP-UP

- per $\theta_e = (\pi, \pi)$ (e quindi $\tau_e = 0$) si ha

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_2 \end{bmatrix}}_{M(\theta_e)} \begin{bmatrix} \delta\ddot{\theta}_1 \\ \delta\ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha_4 & 0 \\ 0 & -\alpha_5 \end{bmatrix}}_{G(\theta_e)} \begin{bmatrix} \delta\theta_1 \\ \delta\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

- posto $\Delta = \det M(\theta_e) = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2 > 0$, una conveniente scelta delle (quattro) variabili di stato e della (singola) variabile di ingresso è

$$x = \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \frac{1}{\Delta} M(\theta_e)\delta\dot{\theta} \end{bmatrix} \in I\!R^4 \qquad\qquad u = \frac{1}{\Delta}\delta\tau \in I\!R$$

- le equazioni di stato sono della forma usuale

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0_{2\times 2} & M^{-1}(\theta_e)\cdot\Delta \\ & \\ -G(\theta_e)/\Delta & 0_{2\times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_2 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & -\alpha_3 & \alpha_1 \\ \alpha_4/\Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_5/\Delta & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Autovalori della matrice A

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -\alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \lambda & \alpha_3 & -\alpha_1 \\ -\alpha_4/\Delta & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\alpha_5/\Delta & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\
&= \lambda^4 - \frac{\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_4}{\Delta}\lambda^2 + \frac{\alpha_4\alpha_5}{\Delta} = 0
\end{aligned}
$$

- Posto $\mu = \lambda^2$, l'equazione caratteristica si può riscrivere

  $$\Delta\mu^2 - (\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_4)\mu + \alpha_4\alpha_5 = 0$$

  ed ha **due** cambi di segno nei coefficienti $\Rightarrow$ 2 radici reali $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$
  $\Rightarrow$ 2 coppie di autovalori reali opposti $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\mu_1}$, $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\mu_2}$

- Sistema instabile intorno all'equilibrio UP-UP (ad anello aperto)

Progetto del Controllore

- raggiungibilità della coppia (A, B)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 & 0 & (\alpha_2^2\alpha^4 + \alpha_3^2\alpha_5)/\Delta \\ 0 & -\alpha_3 & 0 & -(\alpha_2\alpha^4 + \alpha_1\alpha_5)\alpha_3/\Delta \\ 1 & 0 & \alpha_2\alpha_4/\Delta & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_3\alpha_5/\Delta & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- test di Kalman di raggiungibilità: rango $\mathcal{R} = 4\,(= \dim x)$, infatti

$$
\det \mathcal{R} = -\frac{(\alpha_3\alpha_5)^2}{\Delta} \neq 0 \quad !!
$$

Stabilizzazione

- essendo il sistema raggiungibile, si procede per assegnazione degli autovalori della dinamica ad anello chiuso, scegliendo K nel feedback dallo stato

$$u = Kx = [\, k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \,]\, x \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x} = (A + BK)x$$

in modo che lo spettro $\sigma(A+BK)$ sia dato da quattro autovalori desiderati $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, tutti a parte reale negativa

- per imporre il polinomio caratteristico desiderato

$$p_{\text{des}}(\lambda) = \prod_{i=1}^{4} (\lambda - \lambda_i) = \lambda^4 + a_{3d}\lambda^3 + a_{2d}\lambda^2 + a_{1d}\lambda + a_{0d}$$

si può procedere in più modi (tutti equivalenti, danno la stessa K finale!!): analitico diretto, mediante la forma canonica di controllo, numerico

- analitico diretto sul polinomio caratteristico $\det\,[\lambda I-(A+BK)]$ (con le incognite k_i, $i=1,\dots 4$)

$$\det\begin{bmatrix}\lambda & 0 & -\alpha_2 & \alpha_3\\ 0 & \lambda & \alpha_3 & -\alpha_1\\ -\alpha_4/\Delta-k_1 & -k_2 & \lambda-k_3 & -k_4\\ 0 & -\alpha_5/\Delta & 0 & \lambda\end{bmatrix}=p_{\text{des}}(\lambda)$$

- mediante trasformazione in forma canonica di controllo (formula di Ackermann)

$$\tilde{x}=Tx\ \Rightarrow\ \tilde{A}=TAT^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3\end{bmatrix},\ \tilde{B}=TB=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

con

$$p(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det(\lambda I-\tilde{A})=\lambda^4+a_3\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0$$

con l'espressione del controllo

$$u = \tilde{K}\tilde{x} = [\, a_0 - a_{0d} \quad a_1 - a_{1d} \quad a_2 - a_{2d} \quad a_3 - a_{3d} \,]\, \tilde{x} = (\tilde{K}T)x = Kx$$

dove

$$T = \begin{bmatrix} \gamma^T \\ \gamma^T A \\ \gamma^T A^2 \\ \gamma^T A^3 \end{bmatrix} \qquad \gamma^T = \text{ultima riga della matrice } \mathcal{R}^{-1}$$

- numerico (in Matlab) con i dati del problema

$$
\begin{aligned}
g_0 &= 9.81 \\
\ell_1 &= 0.1492 \qquad \ell_2 = 0.1905 \\
m_1 &= 0.193 \qquad m_2 = 0.073 \\
d_1 &= 0.1032 \qquad d_2 = 0.1065 \\
I_1 &= \frac{1}{12} m_1 \ell_1^2 \qquad I_2 = \frac{1}{12} m_2 \ell_2^2
\end{aligned}
$$

da cui si ha

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= 0.0040 \\
\alpha_2 &= 0.0010 \\
\alpha_3 &= 0.0012 \\
\alpha_4 &= 0.3893 \\
\alpha_5 &= 0.0763
\end{aligned}
$$

con le matrici di stato e ingresso

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0010 & -0.0012 \\ 0 & 0 & -0.0012 & 0.0040 \\ 134719.9851 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 26390.8899 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con $\sigma(A) = (\pm 13.9729, \pm 7.2544)$

utilizzando le istruzioni Matlab

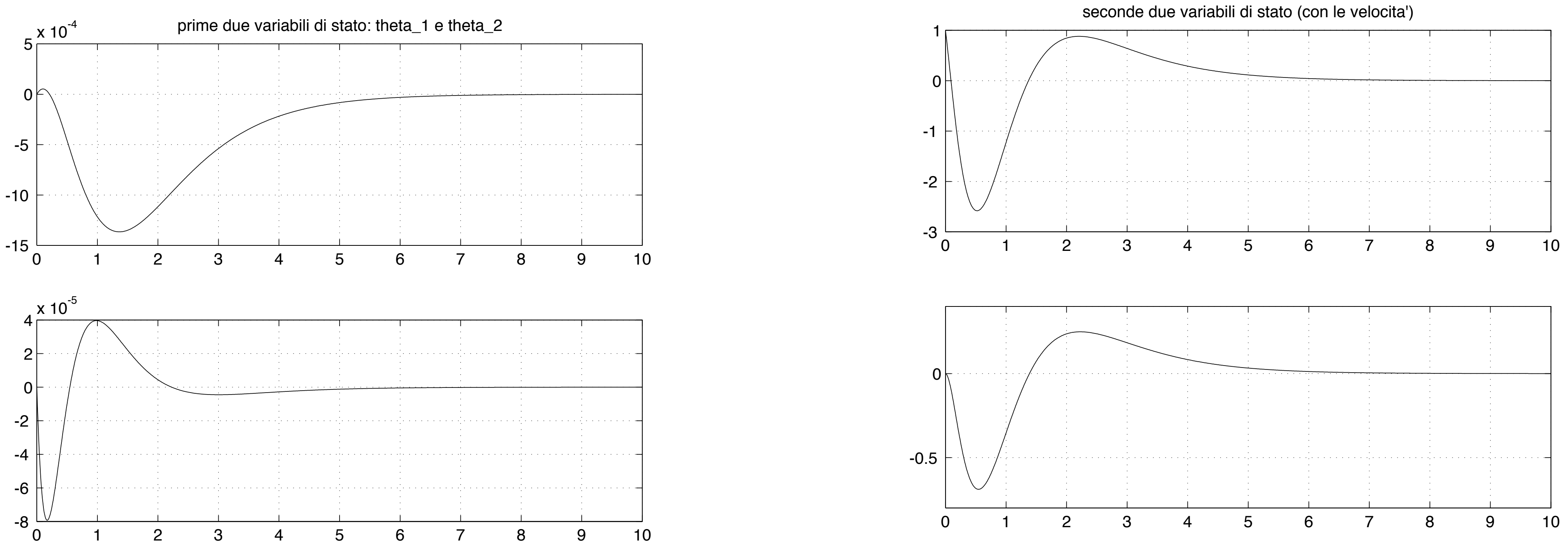
$$\begin{aligned} \mathtt{p} &= [-1 - 2 - 3 - 4]; \quad \text{(insieme degli autovalori desiderati)} \\ \mathtt{K} &= -\mathtt{acker}(\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{p}); \\ \mathtt{sigma} &= \mathtt{eig}(\mathtt{A} + \mathtt{B} * \mathtt{K}); \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} K &= [-1.3441 \quad 1.2234 \quad -0.0001 \quad 0.0004] \\ \sigma(A + BK) &= (-1.000, -1.999, -3.000, -4.000) \quad \text{(arrotondamenti)} \end{aligned}$$

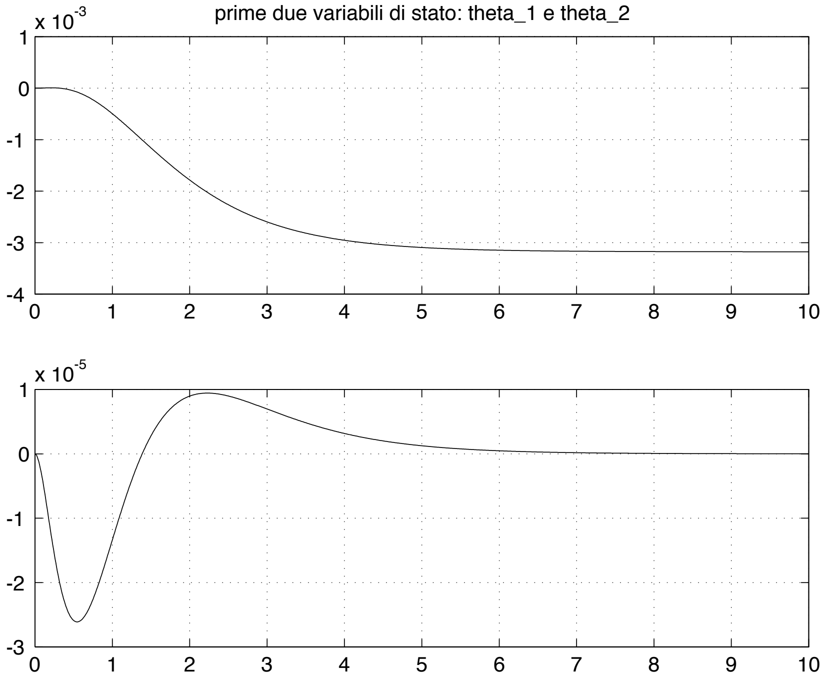
Simulazioni - 1

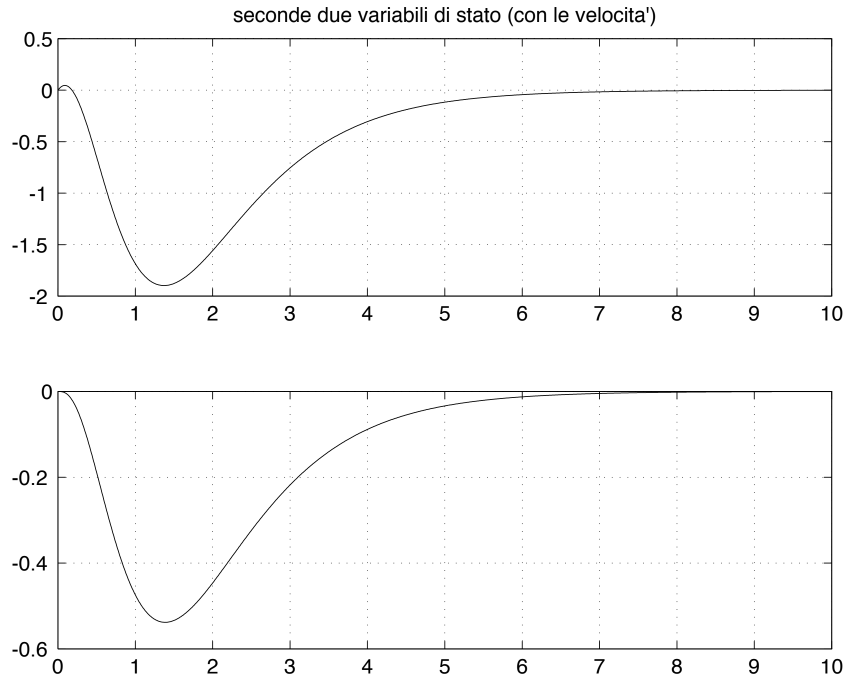
- a partire dall'equilibrio UP-UP (a riposo), si applica un impulso unitario (`impulse` di Matlab) come ingresso di disturbo



Simulazioni - 2

- a partire dall'equilibrio UP-UP (a riposo), si applica un gradino unitario (`step` di Matlab) come ingresso di disturbo





Commenti conclusivi - 1

- il problema di regolazione (ad es., UP-UP) è risolto con una tecnica ibrida:
  - inizialmente si porta il primo braccio in posizione, fornendo energia sufficiente in modo che il secondo sia messo in oscillazione ampia (swing-up)
  - quando entrambi i bracci sono all'interno di un dominio di attrazione per il controllore lineare, si commuta sulla stabilizzazione locale
  - per il Pendubot, il dominio è circa $[-15°, +15°]$ di errore in posizione (rispetto a θ_e) e di $[-4, +4]$ rad/s in velocità (rispetto a $\dot{\theta}_e = 0$); il dominio di attrazione dipende da θ_e e dalla matrice K dei guadagni del controllore
  - capacità di contrastare piccoli disturbi non persistenti (reiezione dei disturbi)

Commenti conclusivi - 2

- altri aspetti da considerare in pratica:
  - attrito ai giunti (quello viscoso è un fenomeno lineare, quello statico è una nonlinearità ‘hard’)
  - inerzia del motore (si aggiunge I_m ad α_1)
  - indisponibilità della misura di velocità (differenziazione numerica filtrata delle misure degli encoder)
  - discretizzazione e quantizzazione delle grandezze
  - saturazione dell’attuatore (coppia di picco e di regime)
- validità limitata del modello linearizzato: le strategie di controllo (anche con feedback nonlineare dallo stato) vanno validate con una simulazione dell’intera dinamica del sistema