

# Fondamenti di Automatica

## Soluzione della Prova Intermedia di Autovalutazione

### Problema 1

Gli autovalori del sistema sono  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$  e  $\lambda_3 = 2$ , con i corrispondenti autovettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Posto  $x_0 = \sum_{i=1}^3 c_i v_i$ , ed essendo  $Cv_1 = 0$ , l'uscita in evoluzione libera è data da

$$y(t) = Ce^{At}x_0 = \sum_{i=1}^3 Ce^{\lambda_i t} c_i v_i = e^{-t} c_2 C v_2 + e^{2t} c_3 C v_3$$

In conclusione,  $y$  si mantiene limitata se e solo se  $c_3 = 0$ , cioè a partire da stati iniziali

$$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 = \begin{pmatrix} c_1 - c_2 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } c_1, c_2 \text{ arbitrari}$$

### Problema 2

L'uscita è

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(y(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+a+jb} + \frac{B^*}{s+a-jb}\right)$$

in cui si trova  $a = 1.5$ ,  $b = \sqrt{27}/2$  e, attraverso le formule dei residui,  $A = 1/9$  e  $B = c + jd = -1/18 - j7\sqrt{3}/54$ . Si ha quindi

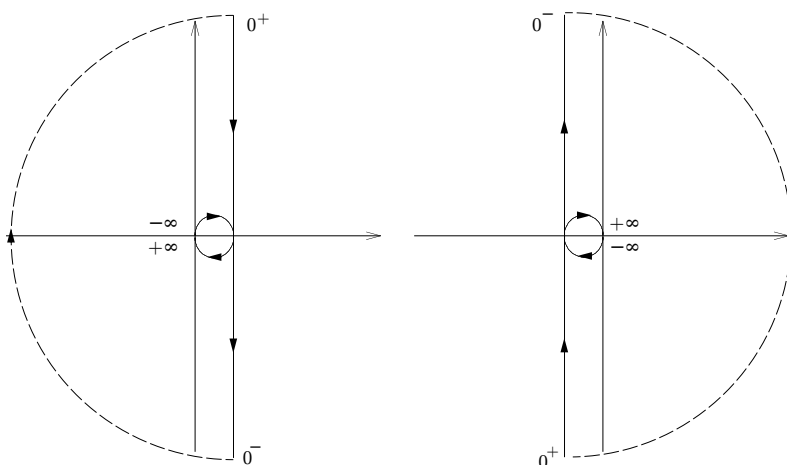
$$y(t) = A\delta_{-1}(t) + e^{-at} (Be^{-jbt} + B^*e^{jbt}) \delta_{-1}(t) = A\delta_{-1}(t) + 2e^{-at}(c \cos bt + d \sin bt)\delta_{-1}(t)$$

in cui si è utilizzata la formula di Eulero. Il valore dell'uscita per  $t = 0$  e  $t \rightarrow \infty$  si può ricavare da quest'ultima espressione oppure utilizzando i teoremi del valore iniziale e finale. Si trova

$$y(0) = 0 \quad y(\infty) = 1/9.$$

### Problema 3

Si hanno i seguenti diagrammi qualitativi di Nyquist.



Se ne deduce che il sistema retroazionato è instabile per  $k > 0$ , è stabile asintoticamente per  $k^* < k < 0$ , ed è ancora instabile per  $k < k^*$ . Essendo inoltre il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso pari a

$$D_W(s) = N_P(s) + D_P(s) = s^2 + (a + k)s - ak$$

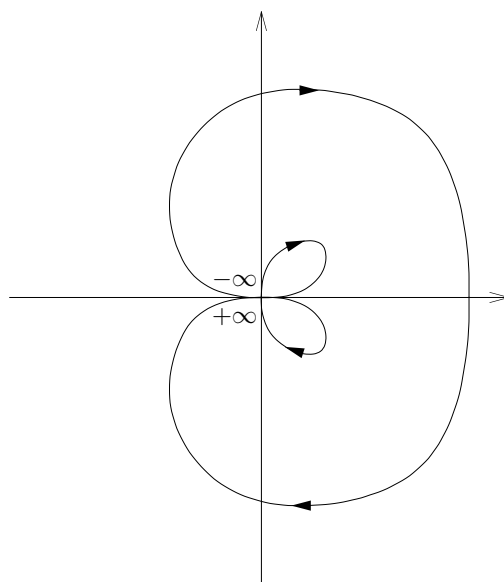
si trova immediatamente  $k^* = -a$ . Per  $k = 0$  e  $k = -a$ , il sistema retroazionato è semplicemente stabile.

#### Problema 4

L'ispezione del diagramma di Bode ricavato sperimentalmente suggerisce

$$P(s) = \frac{s^2 + 100}{(s + 1)^2(s + 100)}$$

Il diagramma di Nyquist qualitativo è il seguente.



Infine, la risposta a regime richiesta vale

$$y_r(t) = 2P(0) = 2$$