

# Progetto in frequenza: esercizio riassuntivo

Sia dato il sistema di controllo a retroazione unitaria di Fig. 1

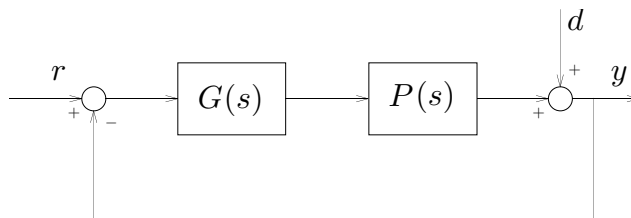


Figura 1: Il sistema di controllo assegnato

in cui il processo ha funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{10}{(1 + 0.1s)(1 + 0.01s)}.$$

Si determini la funzione di trasferimento del controllore  $G(s)$  in modo che:

- l'errore a regime permanente per un qualunque riferimento  $r$  costante sia nullo, in presenza di un disturbo  $d$  pari a una costante non nota;*
- l'errore a regime permanente per un riferimento  $r$  a rampa unitaria sia non superiore a 0.01;*
- il sistema ad anello chiuso abbia banda passante circa pari a 50 rad/sec e modulo alla risonanza non superiore a 9 dB.*

In seguito, modificare il progetto per i casi in cui alla specifica **c)** venga sostituita la

**c')** banda passante circa pari a 10 rad/sec e modulo alla risonanza non superiore a 4 dB  
oppure la

**c'')** banda passante circa pari a 50 rad/sec e modulo alla risonanza non superiore a 1 dB.

---

Poiché la  $P(s)$  non contiene poli a parte reale positiva, si può adottare il procedimento di sintesi in frequenza basato sulle funzioni compensatrici elementari; in particolare, l'esistenza di un margine di fase positivo e univocamente definito per il sistema ad anello aperto garantirà la stabilità asintotica del sistema ad anello chiuso (*criterio di Bode*).

La funzione di trasferimento del controllore va ricercata in generale nella forma

$$G(s) = \frac{K_G}{s^h} R(s).$$

I parametri  $K_G$  e  $h$  vanno scelti in modo tale da soddisfare le specifiche sul regime permanente, mentre con  $R(s)$  si impongono le restanti specifiche.  $R(s)$  viene normalmente presa a guadagno unitario in modo tale che il guadagno di  $G(s)$  sia proprio  $K_G$ .

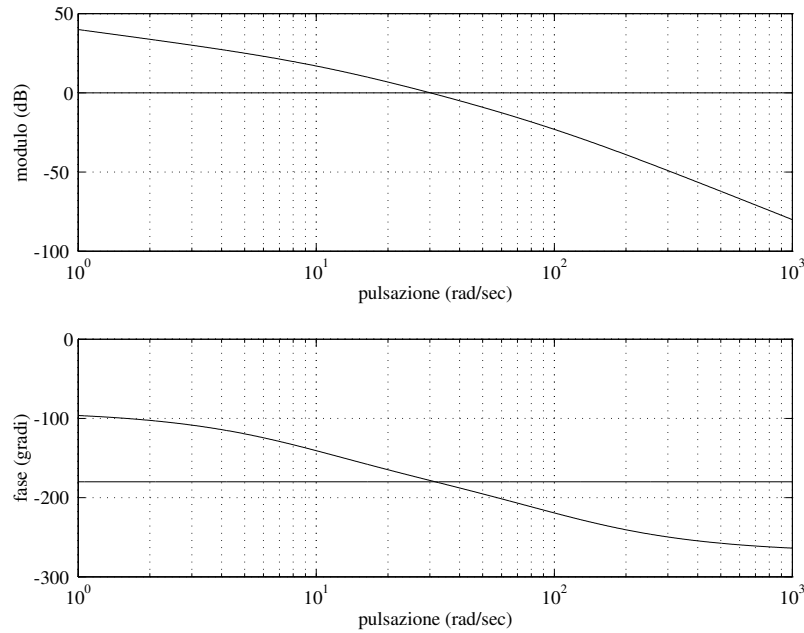


Figura 2: Diagrammi di Bode di  $\hat{F}(j\omega)$

La specifica **a)** richiede contemporaneamente che il sistema sia almeno di tipo 1 e astatico rispetto al disturbo  $d$  (oltre che asintoticamente stabile). Poiché la  $P(s)$  non ha poli nell'origine, per ottenere tipo 1 se ne deve introdurre uno ( $h = 1$ ) nella  $G(s)$ . Essendo tale polo a monte del disturbo, esso garantirà anche astaticismo rispetto a  $d$ .

Per un sistema di tipo 1, l'errore a regime per un ingresso a rampa è costante e diverso da zero. Essendo lo schema di controllo a retroazione negativa unitaria ( $K_d = 1$ ), la specifica **b)** impone

$$|\tilde{e}_1| = \frac{K_d^2}{|K_F|} = \frac{K_d^2}{|K_G K_P|} = \frac{1}{10|K_G|} \leq 0.01 \quad \implies \quad |K_G| \geq 10.$$

Per mantenere positivo il guadagno  $K_F = K_G K_P$  si pone  $K_G = 10$ .

Venendo alla specifica **c)**, il passo preliminare consiste nel tradurre le specifiche sulla risposta armonica ad anello chiuso  $W(j\omega)$  in specifiche sulla risposta armonica ad anello aperto  $F(j\omega)$ . Per quanto riguarda la banda passante  $B_3$ , si ricordi che per sistemi con margine di fase minore di  $90^\circ$  si ha sempre  $B_3 \geq \omega_t$ , dove  $\omega_t$  è la pulsazione di attraversamento della risposta armonica ad anello aperto. In particolare, spesso si verifica che  $B_3 \approx 1.5 \div 1.7 \omega_t$ . Nel caso in esame, ci si può porre come obiettivo una pulsazione di attraversamento desiderata  $\omega_t^* \approx 30$  rad/sec. La specifica sul modulo alla risonanza  $M_r$ , invece, dà luogo a un limite inferiore per il margine di fase  $m_\varphi^*$  del sistema ad anello aperto. Nel caso in esame, si deduce in particolare la condizione  $m_\varphi^* \geq 20^\circ$  (attraverso la carta di Nichols).

A questo punto, si tracciano i diagrammi di Bode della funzione di trasferimento del processo modificato

$$\hat{F}(s) = \frac{K_G}{s^h} P(s) = \frac{100}{s(1 + 0.1s)(1 + 0.01s)},$$

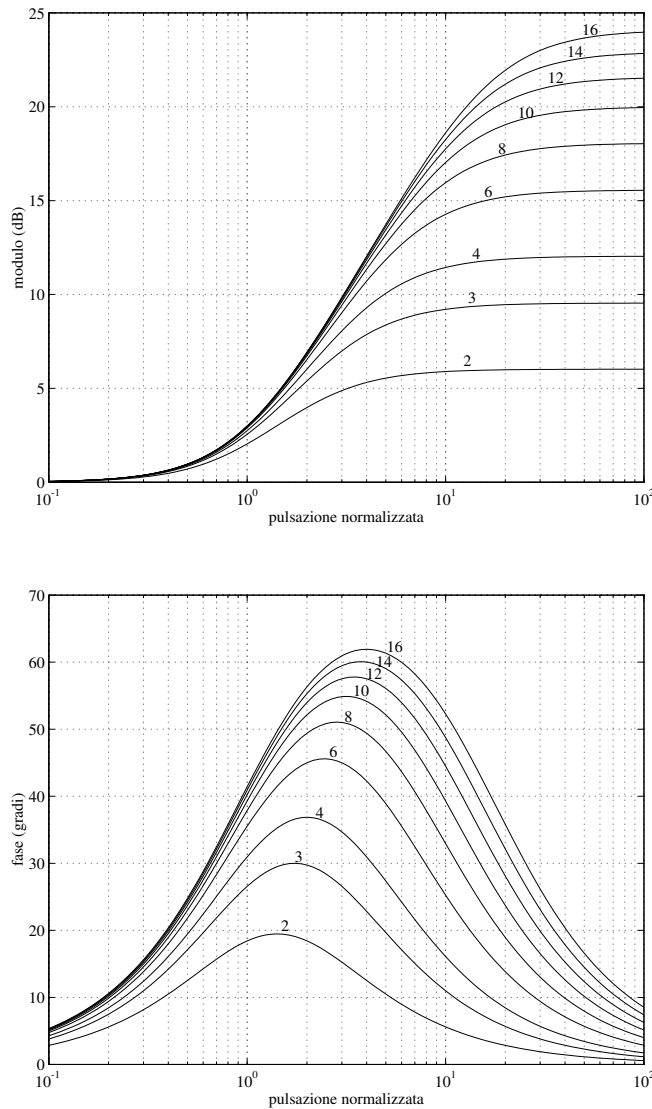


Figura 3: Diagrammi di Bode universali per una funzione anticipatrice. Ogni diagramma corrisponde al valore indicato di  $m_a$ . Gli stessi diagrammi sono validi per una funzione attenuatrice, purché si attribuisca segno negativo alle ordinate.

cioè il processo con l'aggiunta delle componenti del controllore necessarie per soddisfare le specifiche sul regime permanente **a)** e **b)**. Dall'esame della Fig. 2 si deducono<sup>1</sup> la pulsazione di attraversamento e il margine di fase in assenza di compensazione (cioè ponendo  $R(s) = 1$ ):

$$\hat{\omega}_t \approx 30 \text{ rad/sec} \quad \text{e} \quad \hat{m}_\varphi \approx 1.6^\circ.$$

Ciò indica che il sistema ad anello chiuso si troverebbe molto vicino all'instabilità.

Per soddisfare le specifiche del problema è necessario determinare  $R(s)$  in modo tale da aumentare il margine di fase di almeno  $m_\varphi^* - \hat{m}_\varphi = 18.4^\circ$ , mantenendo pressoché inalterata

<sup>1</sup>La precisione di questo genere di misurazioni dipende ovviamente dall'accuratezza con cui sono tracciati i diagrammi. Se la soluzione viene sviluppata con l'ausilio del Control System Toolbox di MATLAB, ci si può anche avvalere dell'istruzione `margin`, che fornisce il valore numerico di  $\omega_t$  e  $m_\varphi$ , o dell'istruzione `bode` con l'argomento opzionale `omega`, che fornisce appunto il valore del modulo (non in dB) e della fase della risposta armonica alla pulsazione  $\omega$ .

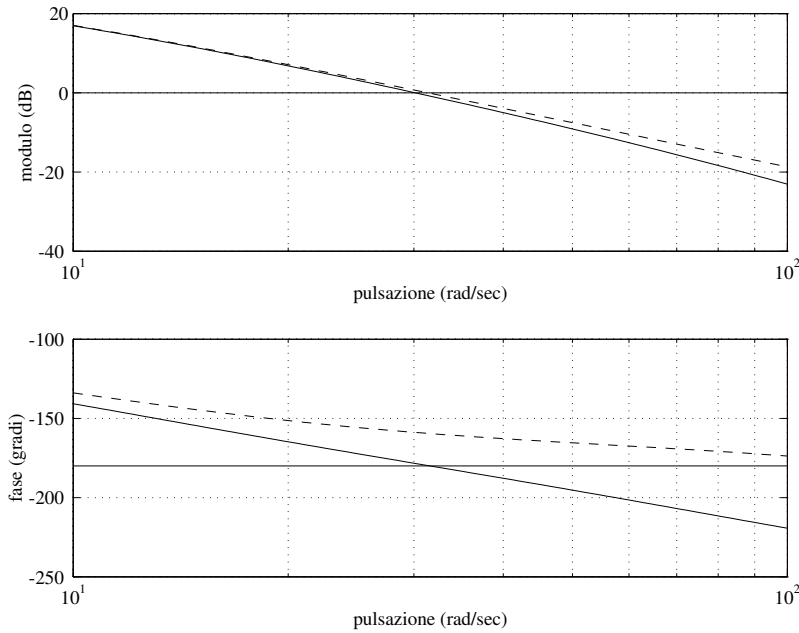


Figura 4: Diagrammi di Bode di  $\hat{F}(j\omega)$  (—) e di  $F(j\omega)$  (---)

la pulsazione di attraversamento. A tale scopo si può usare una funzione *anticipatrice*

$$R_a(s) = \frac{1 + \tau_a s}{1 + \frac{\tau_a}{m_a} s}, \quad \tau_a > 0, m_a > 1,$$

i cui diagrammi di Bode sono mostrati in Fig. 3 in corrispondenza a diversi valori di  $m_a$ . In tali diagrammi, detti *universali*, viene riportata in ascissa la pulsazione normalizzata  $\omega\tau_a$ . Si osservi che il fattore binomio corrispondente allo zero di  $R_a(s)$  ha pulsazione di rottura  $1/\tau_a$ , mentre quello corrispondente al polo ha pulsazione di rottura  $m_a/\tau_a$ . Di conseguenza, nei diagrammi di Fig. 3 alla pulsazione normalizzata  $10^0 = 1$  corrisponde proprio la pulsazione di rottura dello zero.

La scelta dei parametri  $m_a$  e  $\tau_a$  è guidata in questo caso dalle seguenti considerazioni. L'azione anticipatrice deve essere tale da aumentare la fase di  $18.4^\circ$  in corrispondenza alla pulsazione  $\omega_t^* = \hat{\omega}_t = 30$  rad/sec. I diagrammi universali di Fig. 3 mostrano che questo anticipo può essere ottenuto per varie coppie  $(m_a, \omega\tau_a)$ , cui però corrispondono amplificazioni di modulo assai diverse. Poiché si vuole lasciare inalterata la pulsazione di attraversamento, tale amplificazione (effetto collaterale) va limitata il più possibile. È quindi opportuno scegliere la più piccola pulsazione normalizzata  $\omega\tau_a$  che garantisce — per un opportuno valore di  $m_a$  — l'anticipo richiesto. Nel caso in esame, è facile vedere che questa strategia conduce a scegliere  $\omega\tau_a = 0.4$  e  $m_a = 10$ . In corrispondenza a  $\omega\tau_a = 0.4$ , la curva dei moduli per  $m_a = 10$  indica un'amplificazione assai limitata (meno di 1 dB). È dunque prevedibile che il conseguente aumento della pulsazione di attraversamento  $\omega_t$  sia molto contenuto.

L'ultimo passo consiste nel collocare l'anticipo di fase proprio in corrispondenza a  $\omega_t^*$ , ponendo

$$\omega_t^* \tau_a = 30 \tau_a = 0.4 \quad \implies \quad \tau_a = \frac{0.4}{30} = \frac{1}{75}.$$

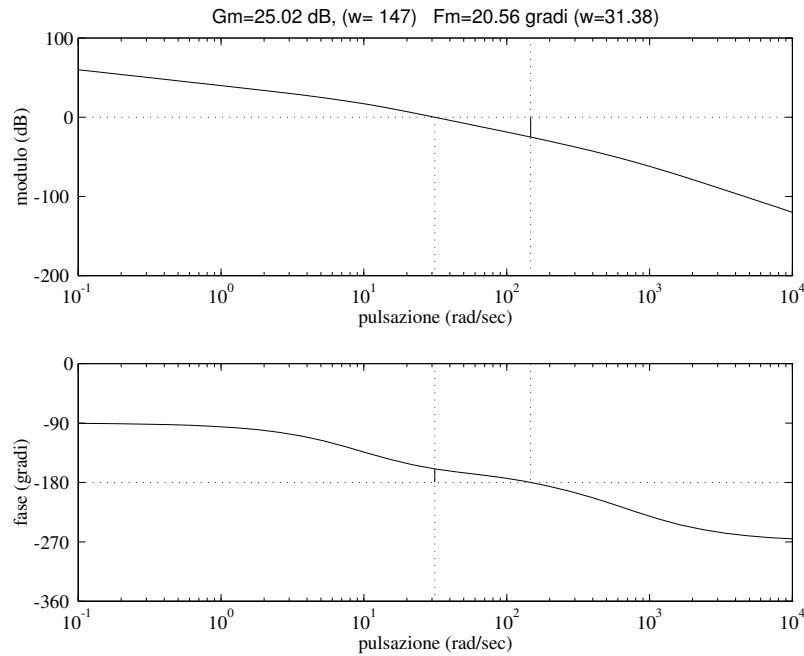


Figura 5: Diagrammi di Bode di  $F(j\omega)$ . Si noti nella parte superiore della figura l'indicazione del valore del margine di guadagno (Gm) e del margine di fase (Fm), con le rispettive pulsazioni.

La funzione anticipatrice risultante è quindi

$$R_a(s) = \frac{1 + \frac{1}{75}s}{1 + \frac{1}{750}s},$$

mentre la funzione di trasferimento del controllore è

$$G(s) = \frac{K_G}{s} R_a(s) = \frac{10}{s} \frac{1 + \frac{1}{75}s}{1 + \frac{1}{750}s}.$$

I diagrammi di Bode della risposta armonica ad anello aperto  $F(j\omega) = \hat{F}(j\omega)R_a(j\omega)$  sono riportati in Fig. 4 e, per uno spettro di frequenze più ampio, in Fig. 5 (quest'ultima è stata ottenuta in MATLAB con l'istruzione `margin`). Si noti che, come previsto, l'introduzione della funzione anticipatrice ha lievemente spostato la pulsazione di attraversamento da 30 rad/sec a circa 31 rad/sec, mentre il margine di fase è aumentato da  $1.6^\circ$  a oltre  $20^\circ$ .

Per verificare il soddisfacimento delle specifiche originarie **c)**, che riguardavano la funzione di trasferimento ad anello chiuso, è opportuno esaminare il diagramma di Bode del modulo della risposta armonica ad anello chiuso

$$W(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{1 + F(j\omega)},$$

riportato in Fig. 6. Il modulo alla risonanza  $M_r$  è inferiore a 9 dB, mentre la banda passante  $B_3$  è all'incirca 50 rad/sec, come richiesto.

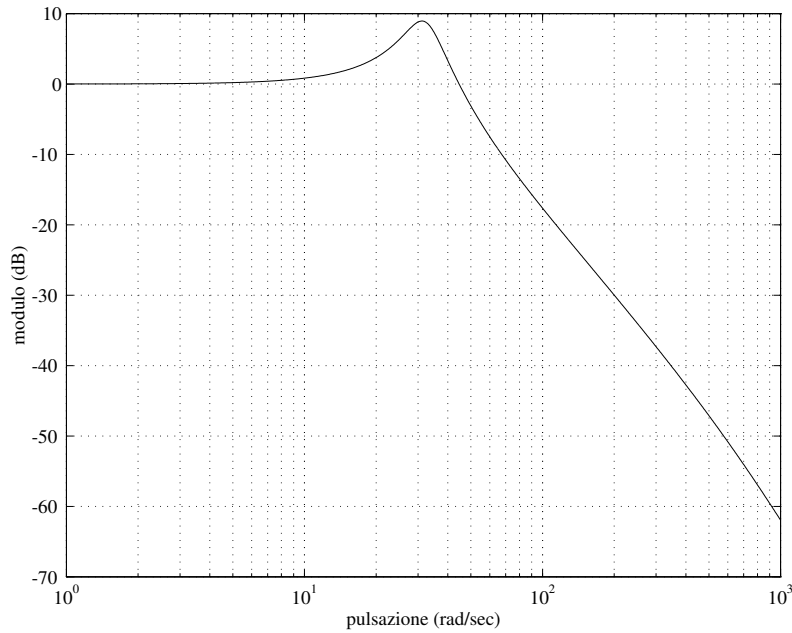


Figura 6: Diagramma dei moduli di  $W(j\omega)$

Si consideri ora la specifica **c'**), che rispetto alla **c)** richiede un valore più basso sia per la banda passante che per il modulo alla risonanza. Per imporre la specifica su  $B_3$ , si può provare a scegliere  $\omega_t^* = 7$  rad/sec. Per quanto riguarda  $M_r$ , si trova (attraverso la carta di Nichols) che il margine di fase  $m_\varphi^*$  deve essere maggiore o uguale a  $35^\circ$ .

Confrontando i valori desiderati con quelli del processo modificato  $\hat{F}(j\omega)$ , si deduce che la funzione compensatrice deve aumentare il margine di fase e ridurre la pulsazione di attraversamento. In particolare, l'esame dei diagrammi di Bode di  $\hat{F}(j\omega)$  (vedi Fig. 2) mostra che

$$|\hat{F}(j\omega_t^*)| = 21 \text{ dB}, \quad \angle \hat{F}(j\omega_t^*) = -129^\circ.$$

Si noti che la fase in  $\omega_t^*$  è già più che sufficiente. Pertanto, è necessario 'abbassare' il diagramma del modulo, così da spostare la pulsazione di attraversamento in  $\omega_t^*$ , modificando il meno possibile il diagramma delle fasi nella zona di interesse. Naturalmente, per ottenere tale effetto non si può ricorrere a un semplice guadagno minore di 1 (e quindi minore di zero in dB), poiché ciò diminuirebbe il guadagno del ramo diretto e comporterebbe la violazione della specifica **b)** sul regime permanente.

È invece possibile utilizzare una funzione *attenuatrice*

$$R_i(s) = \frac{1 + \frac{\tau_i}{m_i}s}{1 + \tau_i s}, \quad \tau_i > 0, \quad m_i > 1,$$

i cui diagrammi di Bode, in corrispondenza a diversi valori di  $m_i$ , sono ottenibili da quelli della Fig. 3, in cui le ascisse rappresentino la pulsazione normalizzata  $\omega\tau_i$  e si attribuisca segno negativo ai valori riportati sulle ordinate. Si osservi che il fattore binomio corrispondente al polo di  $R_i(s)$  ha pulsazione di rottura  $1/\tau_i$ , mentre quello corrispondente allo zero ha pulsazione di rottura  $m_i/\tau_i$ . Di conseguenza, nei diagrammi di Fig. 3 alla pulsazione normalizzata  $10^0 = 1$  corrisponde proprio la pulsazione di rottura del polo.

La scelta dei parametri  $m_i$  e  $\tau_i$  può essere effettuata sulla base delle seguenti considerazioni. L'azione attenuatrice deve essere tale da ridurre il modulo di 21 dB in cor-

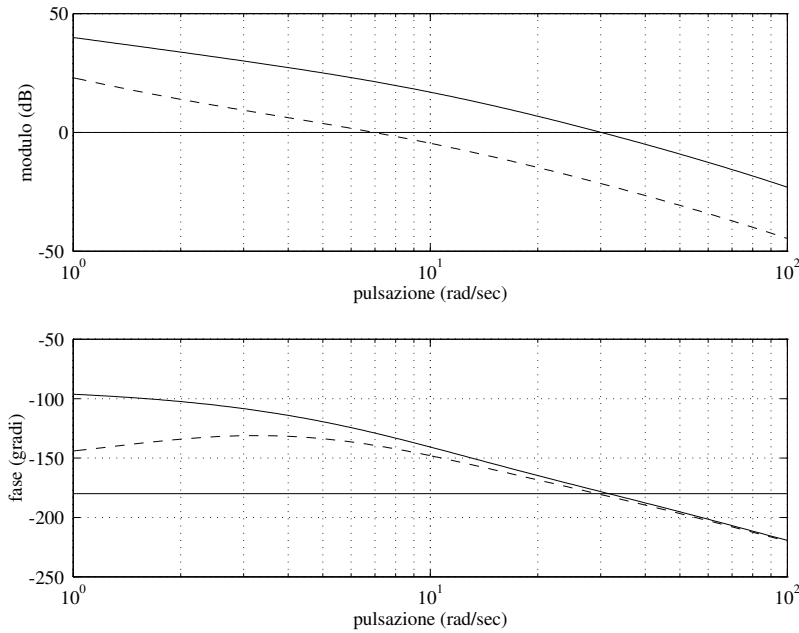


Figura 7: Diagrammi di Bode di  $\hat{F}(j\omega)$  (—) e di  $F'(j\omega)$  (---)

rispondenza alla pulsazione  $\omega_t^* = 7$  rad/sec. I diagrammi universali di Fig. 3 mostrano che questa attenuazione può essere ottenuta per varie coppie  $(m_i, \omega\tau_i)$ , cui corrispondono ritardi di fase diversi. Per limitare tale ritardo e preservare il margine di fase richiesto in  $\omega_t^*$ , è opportuno scegliere una pulsazione normalizzata  $\omega\tau_i$  sufficientemente grande.

La Fig. 3 mostra che per ottenere un'attenuazione di 21 dB si può scegliere  $m_i = 12$ . Inoltre, essendo  $\angle \hat{F}(j\omega_t^*) = -129^\circ$ , è ammissibile un massimo ritardo di fase di  $16^\circ$ ; una scelta ampiamente nei limiti è  $\omega\tau_i = 60$ , cui corrisponde un ritardo di circa  $11^\circ$ . Infine, si colloca l'attenuazione di modulo in corrispondenza a  $\omega_t^*$ , cioè

$$7\tau_i = 60 \quad \implies \quad \tau_i = \frac{60}{7}.$$

La funzione attenuatrice risultante è quindi

$$R_i(s) = \frac{1 + \frac{5}{7}s}{1 + \frac{60}{7}s},$$

mentre la funzione di trasferimento del controllore è

$$G'(s) = \frac{K_G}{s} R_i(s) = \frac{10}{s} \frac{1 + \frac{5}{7}s}{1 + \frac{60}{7}s}.$$

L'effetto della procedura di sintesi adottata può essere analizzato sui diagrammi di Bode della risposta armonica ad anello aperto  $F'(j\omega) = \hat{F}(j\omega)R_i(j\omega)$ , riportati in Fig. 7 e, per uno spettro di frequenze più ampio, in Fig. 8. In particolare, si vede che l'introduzione della funzione attenuatrice ha prodotto un margine di fase effettivo  $m_\varphi \approx 40^\circ$  e una pulsazione di attraversamento  $\omega_t$  praticamente uguale a 7 rad/sec.

Il soddisfacimento delle specifiche originarie può essere verificato tracciando il diagramma del modulo della risposta armonica ad anello chiuso  $W'(j\omega)$ , riportato in Fig. 9. Il modulo alla risonanza  $M_r$  è di poco superiore a 3 dB, mentre la banda passante  $B_3$  è di circa 11 rad/sec.

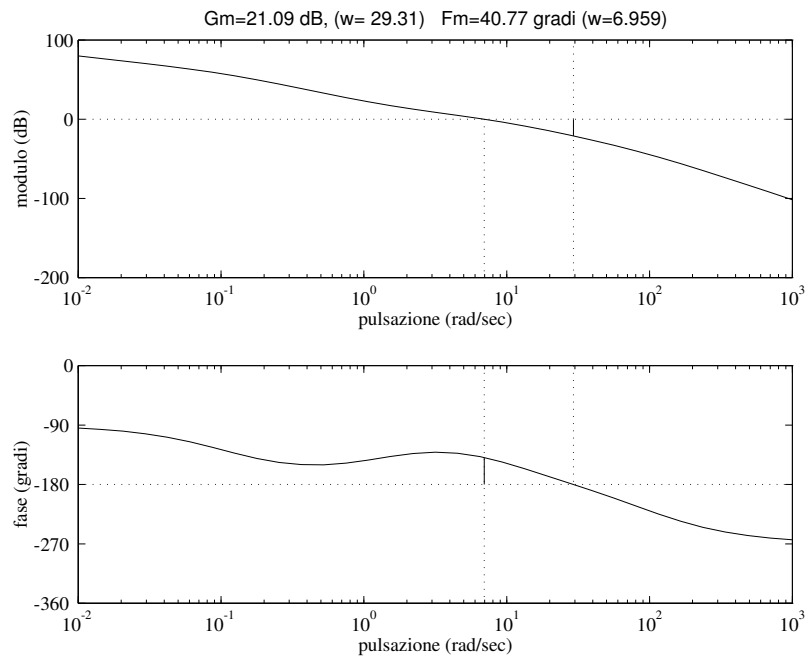


Figura 8: Diagrammi di Bode di  $F'(j\omega)$

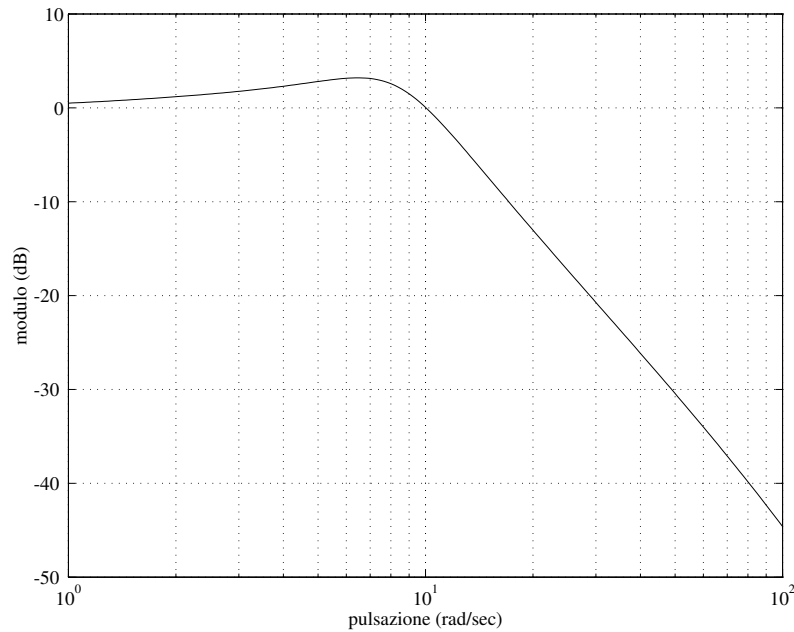


Figura 9: Diagramma dei moduli di  $W'(j\omega)$

Venendo alla specifica  $\mathbf{c''}$ ), si osservi che la specifica sulla banda passante è la stessa del caso  $\mathbf{c}$ ); di conseguenza, si porrà nuovamente  $\omega_t^* = \hat{\omega}_t = 30$  rad/sec. Per quanto riguarda la specifica sul modulo alla risonanza, essa viene convertita (attraverso la carta di Nichols) nella richiesta di un margine di fase  $m_\varphi^* = 55^\circ$ . È quindi necessario conseguire un anticipo di fase pari a circa  $53^\circ$  in corrispondenza a  $\hat{\omega}_t$ . Dai diagrammi universali di Fig. 3 si comprende facilmente che qualsiasi funzione anticipatrice in grado di introdurre un tale anticipo di fase comporterà anche una notevole amplificazione nell'intorno della pulsazione



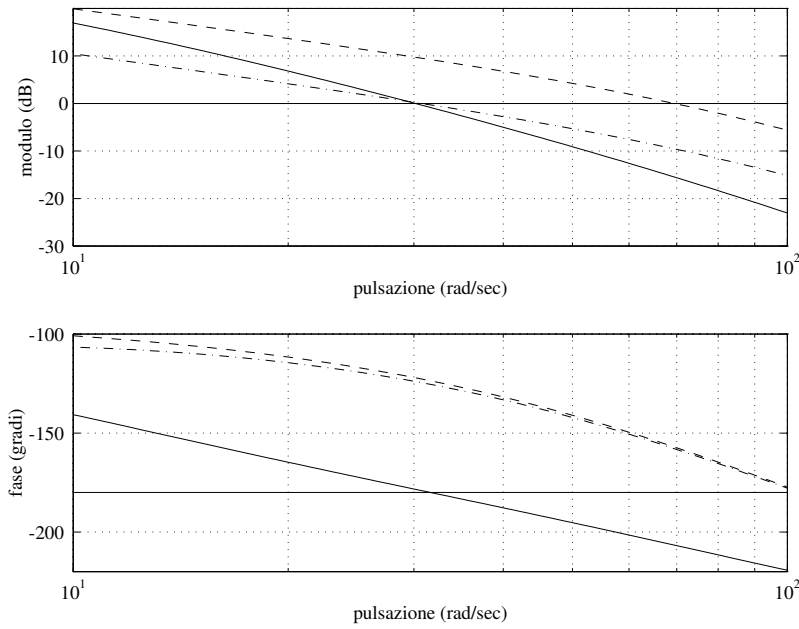


Figura 10: Diagrammi di Bode di  $\hat{F}(j\omega)$  (—), di  $\hat{F}(j\omega)R_a''(j\omega)$  (---) e di  $F''(j\omega) = \hat{F}(j\omega)R_a''(j\omega)R_i''(j\omega)$  (-·)

di interesse. Per completare la sintesi, si dovrà dunque successivamente utilizzare una funzione attenuatrice che riporti la pulsazione di attraversamento in  $\omega_t^*$ .

Dalla Fig. 3 si deduce che una funzione anticipatrice con  $m_a = 11$  assicura<sup>2</sup> un anticipo di fase superiore a  $56^\circ$  in corrispondenza alla pulsazione normalizzata  $\omega\tau_a = 3$ . Si noti che la scelta della funzione anticipatrice è stata effettuata in modo da assicurare un anticipo di fase lievemente maggiore del necessario, in modo da compensare il ritardo di fase che verrà successivamente introdotto dalla funzione attenuatrice. Dovendo collocare l'anticipo di fase in  $\omega_t^* = 30$  rad/sec, si porrà  $\tau_a = 3/30$  e quindi

$$R_a''(s) = \frac{1 + \frac{1}{10}s}{1 + \frac{1}{110}s}.$$

L'effetto dell'introduzione dell'azione anticipatrice è illustrato in Fig. 10. Si noti che in corrispondenza a  $\omega_t^*$  la funzione  $\hat{F}(j\omega)R_a''(j\omega)$  ha approssimativamente modulo pari a 9 dB e fase pari a  $58^\circ$ .

Il passo successivo consiste nell'ottenere un'attenuazione di 9 dB in  $\omega_t^*$ . Di conseguenza, si sceglie una funzione attenuatrice con  $m_i = 3$  e  $\omega\tau_i = 60$ , da cui risulta  $\tau_i = 60/30$ . Si ha perciò

$$R_i''(s) = \frac{1 + \frac{2}{3}s}{1 + 2s}.$$

La funzione di trasferimento del controllore è quindi pari a

$$G''(s) = \frac{10}{s} \frac{1 + \frac{1}{10}s}{1 + \frac{1}{110}s} \frac{1 + \frac{2}{3}s}{1 + 2s}.$$

<sup>2</sup>Benché la funzione anticipatrice per  $m_a = 11$  non compaia in Fig. 3, una semplice interpolazione visiva consente di valutarne l'anticipo.

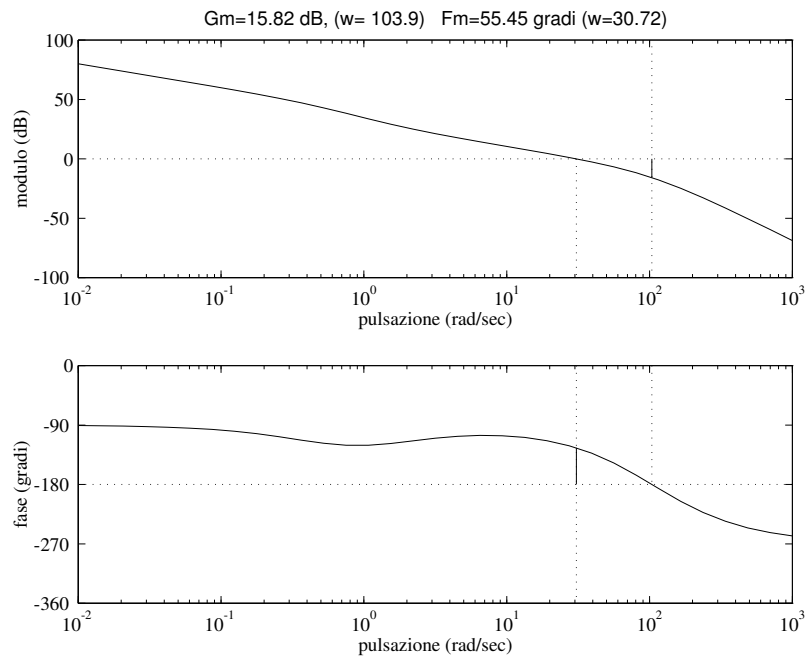


Figura 11: Diagrammi di Bode di  $F''(j\omega)$

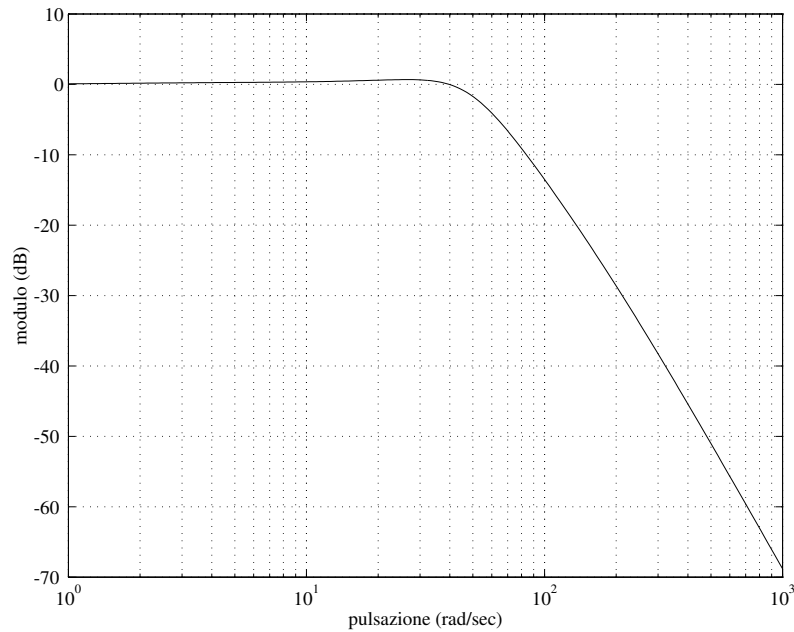


Figura 12: Diagramma dei moduli di  $W''(j\omega)$

I diagrammi finali della risposta armonica ad anello aperto  $F''(j\omega) = \hat{F}(j\omega)R_a''(j\omega)R_i''(j\omega)$  sono riportati in Fig. 10 e, per uno spettro di frequenze più ampio, in Fig. 11. In effetti, si è ottenuto un margine di fase superiore a  $55^\circ$  e una pulsazione di attraversamento di poco inferiore a 31 rad/sec.

Il diagramma di Bode del modulo della risposta armonica ad anello chiuso  $W''(j\omega)$  è mostrato in Fig. 12. Come richiesto, il modulo alla risonanza è inferiore a 1 dB, mentre la banda passante è di poco superiore a 50 rad/sec.