CONTROLLI AUTOMATICI II modulo
Prova scritta del 5 aprile 2005

TRACCIA DI SOLUZIONE

Problema 1

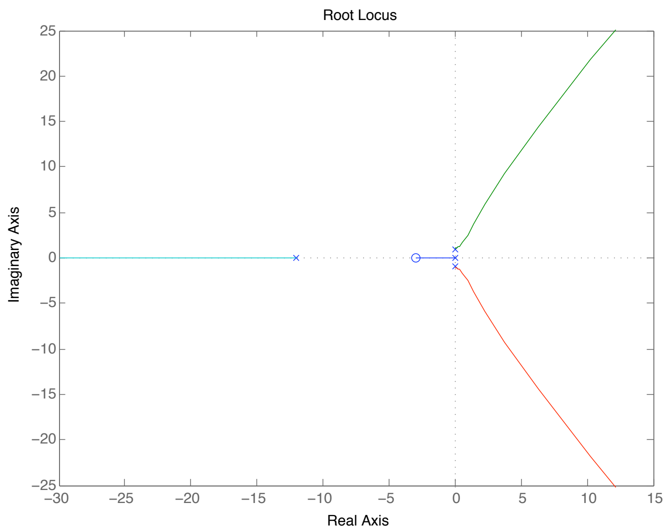
La funzione di trasferimento del processo è

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{s+3}{s+12}$$

Per soddisfare la prima specifica è necessario introdurre nel controllore un polo nell'origine e una coppia di poli immaginari in $\pm j$. La funzione di trasferimento del processo modificato è quindi

$$\hat{P}(s) = k\,\frac{s+3}{s(s^2+1)(s+12)}$$

Per stabilire se è possibile soddisfare la seconda specifica attraverso la scelta di k si traccia il luogo delle radici del sistema ad anello chiuso.



Il luogo indica che il problema non può essere risolto con un semplice guadagno. Per stabilire ciò con certezza, si osservi che il denominatore dell'anello chiuso vale

$$D_1(s) = s(s^2+1)(s+12) + k(s+3)$$

Sostituendo $s-2$ ad s si trova che ci sono sempre delle variazioni di segno tra i coefficienti. Di conseguenza non esiste alcun valore di k per cui tutti i poli hanno parte reale minore o uguale a -2.

Poichè il sistema è a fase minima, è possibile provare ad inserire nel controllore (che contiene già tre poli) uno zero in $-z$. In questo modo si ridurrà l'eccesso poli-zeri a 2; di conseguenza, se è possibile ottenere che *il centro degli asintoti si trovi a sinistra di* -2 con uno zero *anch'esso a sinistra di* -2 il problema sarà risolto con un k sufficientemente grande (si ricordi che per $k \to \infty$ due radici andranno agli asintoti e due convergeranno sugli zeri). Si ha

$$s_0 = \frac{-12+3+z}{2} < -2 \qquad \Rightarrow \qquad z < 5$$

e quindi è necessario prendere $2 < z < 5$.

Calcolando il denominatore del sistema ad anello chiuso in corrispondenza a

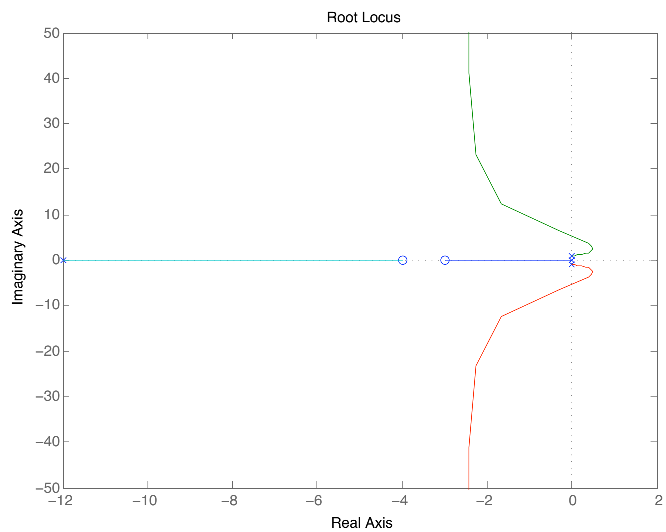
$$F(s) = k\,\frac{(s+3)(s+z)}{s(s^2+1)(s+12)}$$

e sostituendo $s-2$ ad s, si trova il seguente polinomio

$$D_2(s) = s^4 + 4s^3 + (k-47)s^2 + (k(z-1)+120)s + k(z-2) - 100$$

Costruendo la relativa tabella di Routh si trova il valore critico di k oltre il quale è garantito il soddisfacimento della specifica sugli autovalori. Ad esempio, per $z = 3$ si trova $k > 155.02$; per $z = 4$ si trova $k > 316.86$. Il luogo delle radici finale mostrato di seguito si riferisce appunto al caso $z = 4$. Il controllore risultante è

$$P(s) = k\,\frac{s+4}{s(s^2+1)}$$



Una soluzione ugualmente valida (ancorché meno elegante) consisteva nell'introdurre *due* zeri (entrambi a sinistra di -2) nel controllore, in modo da ridurre l'eccesso poli-zeri a 1. In questo caso, uno dei due zeri poteva essere collocato in -12 in modo da semplificare i calcoli successivi. L'applicazione del criterio di Routh forniva anche in questo caso il valore minimo richiesto per k.

Problema 2

a) La matrice di raggiungibilità del sistema ha rango 2. Di conseguenza, si effettua la decomposizione di Kalman per individuare l'autovalore non raggiungibile, che risulta essere collocato in -1. Quindi, per risolvere il problema, si determina K in modo che $A + BK$ abbia tre autovalori coincidenti in -1. Si trova

$$K = \begin{pmatrix} -\frac{16}{3} - \alpha & -\frac{2}{3} & \alpha \end{pmatrix}$$

con α arbitrario. Di conseguenza, le uniche due retroazioni valide che possono essere implementate con due misure sono

$$K_1 = \begin{pmatrix} -\frac{16}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{16}{3} \end{pmatrix}$$

b) Il sistema è già in forma canonica rispetto alla osservabilità, e l'autovalore inosservabile è collocato in -1. Si ottiene facilmente

$$G = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ \beta \end{pmatrix}$$

con β arbitrario. Le equazioni di stato del controllore sono

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (A + BK - GC)\xi + Gy \\ u &= K\xi \end{aligned}$$

con $K = K_1$ o $K = K_2$.

Problema 3

- Si consideri un sistema lineare $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, con

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  ○ Il sistema è stabilizzabile con reazione dallo stato solo se $a < 0$ e $c < 0$.
  FALSO: Il sistema è in forma canonica rispetto alla raggiungibilità. Quindi affinché sia stabilizzabile è necessario e sufficiente che sia $c < 0$.

  ● Il sistema è stabilizzabile con reazione dallo stato solo se $c < 0$.
  VERO: Vedi risposta precedente.

  ○ Se $c > 0$, l'evoluzione libera nello stato diverge per qualsiasi condizione iniziale.
  FALSO: Dipende dall'altro autovalore a. Se esso è negativo, tutte le condizioni iniziali allineate con il relativo autovettore ecciteranno solo il modo naturale e^{-at}, e quindi daranno luogo a evoluzioni convergenti.

  ○ Se $b = 0$, il sistema non è rilevabile.
  FALSO: Se $b = 0$, il sistema è in forma canonica rispetto alla osservabilità. La rilevabilità dipenderà dall'autovalore inosservabile c; se $c < 0$, il sistema sarà rilevabile.

  ○ Se $b = 0$ e $c < 0$, il sistema non è rilevabile.
  FALSO: Vedi risposta precedente.

- Si consideri un sistema a fase minima con eccesso poli-zeri $n - m = 3$.

  ○ Il relativo luogo delle radici presenta 2 punti singolari.
  FALSO: Tutto ciò che si può dire è che il luogo presenta *al più* $n + m - 1$ punti singolari.

  ○ Non è possibile stabilizzare il sistema ad anello chiuso con un semplice guadagno.
  FALSO: Non è detto. I rami del luogo positivo potrebbero essere tutti contenuti nel semipiano sinistro per un intervallo di valori di k (mentre certamente vanno nel semipiano destro per valori elevati di k).

  ○ E' possibile stabilizzare il sistema ad anello chiuso con un semplice guadagno se il centro degli asintoti è minore di zero.
  FALSO: Un controesempio è dato proprio dal primo problema di questa prova.

  ● Esiste un controllore stabilizzante di dimensione 2.
  VERO: Poiché il sistema ha fase minima, si può sempre procedere così: si aggiunge uno zero per ridurre l'eccesso poli-zeri a 2, poi con una coppia polo-zero si sposta il centro degli asintoti nel semipiano sinistro (se necessario) e infine si recupera la realizzabilità del controllore con un polo sufficientemente lontano. Il controllore risultante da questa procedura ha appunto dimensione 2.

  ○ Esiste un controllore di dimensione 2 che assegna arbitrariamente i poli ad anello chiuso.
  FALSO: Dipende da n, che è ignoto. Un controllore che assegni arbitrariamente i poli ad anello chiuso deve avere dimensione $n - 1$.