

Esercizi proposti di Fondamenti di Automatica - Parte 4

20 Aprile 2006

Sia dato il sistema di controllo a controreazione di Fig. 1, in cui il processo ha funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{10}{(1 + 0.1s)(1 + 0.01s)}.$$

Si determini la funzione compensatrice $G(s)$ in modo che siano soddisfatte le seguenti specifiche:

- l'errore a regime in risposta a un ingresso $r(t)$ a gradino sia nullo;
- l'errore a regime in risposta a un ingresso $r(t)$ a rampa unitaria sia minore o uguale a 0.01 in valore assoluto;
- la risposta a regime a un disturbo $d(t)$ a gradino sia nulla;
- la risposta armonica ad anello chiuso $W(j\omega)$ tra $r(t)$ e $y(t)$ abbia banda passante pari a 50 rad/sec e modulo alla risonanza non superiore a 9 dB (o equivalentemente la funzione d'anello abbia una pulsazione critica o di attraversamento $\omega_t^* \approx 30$ rad/sec e un margine di fase $m_\varphi^* \geq 20^\circ$).

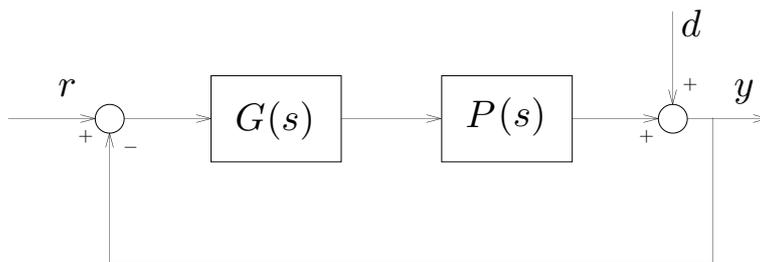


Figure 1: Il sistema di controllo assegnato

Come si può effettuare la sintesi se la specifica **d)** viene modificata richiedendo:

- banda passante pari a 10 rad/sec e modulo alla risonanza non superiore a 4 dB (o equivalentemente la funzione d'anello abbia una pulsazione critica o di attraversamento $\omega_t^* \approx 7$ rad/sec e un margine di fase $m_\varphi^* \geq 40^\circ$)?
- banda passante pari a 50 rad/sec e modulo alla risonanza non superiore a 2 dB (o equivalentemente la funzione d'anello abbia una pulsazione critica o di attraversamento $\omega_t^* \approx 30$ rad/sec e un margine di fase $m_\varphi^* \geq 55^\circ$)?

La funzione compensatrice va ricercata in generale nella forma

$$G(s) = \frac{K_G}{s^h} R(s).$$

I parametri K_G e h vanno scelti in modo tale da soddisfare le specifiche sul regime permanente, mentre con $R(s)$ si impongono le specifiche sulla risposta armonica. $R(s)$ viene normalmente presa a guadagno unitario in modo tale che il guadagno di $G(s)$ coincida con K_G .

In primo luogo, si osservi che il processo $P(s)$ non ha poli nell'origine. Pertanto, per ottenere un errore a regime nullo in corrispondenza a un ingresso a gradino, si deve introdurre un polo nell'origine ($h = 1$) nella funzione di trasferimento ad anello aperto (pari alla funzione d'anello per un sistema a controreazione unitaria), in modo tale da rendere il sistema ad anello chiuso di tipo 1.

L'errore a regime \tilde{e}_1 per un ingresso a rampa sarà costante e diverso da zero. In particolare, dalla formula generale si ricava

$$|\tilde{e}_1| = \frac{1}{|K_P K_G|} = \frac{1}{10|K_G|} \leq 0.01 \quad \implies \quad K_G \geq 10,$$

essendo lo schema di controllo a retroazione unitaria e il processo con guadagno $K_p = 10$. La scelta $K_G \leq -10$ avrebbe condotto certamente a un sistema ad anello chiuso instabile (ciò può essere verificato tracciando il corrispondente diagramma di Nyquist per K_G negativo). Si ponga $K_G = 10$.

Per quanto riguarda la risposta permanente a un disturbo costante, l'introduzione del polo nell'origine tramite la funzione compensatrice rende il sistema astatico, e quindi la specifica è automaticamente soddisfatta.

Venendo alla specifica **d)**, si definisce il sistema ad anello aperto caratterizzato dalla funzione d'anello $F(j\omega)$

$$F(j\omega) = P(j\omega)G(j\omega) = \frac{K_G}{(j\omega)^h} P(j\omega)R(j\omega) = \hat{F}(j\omega)R(j\omega),$$

ove con $\hat{F}(j\omega)$ si è indicata la risposta armonica del *processo modificato* per soddisfare le specifiche sul regime permanente (cioè **a)**, **b)**, **c)**):

$$\hat{F}(s) = \frac{10}{s} \frac{10}{(1 + 0.1s)(1 + 0.01s)}.$$

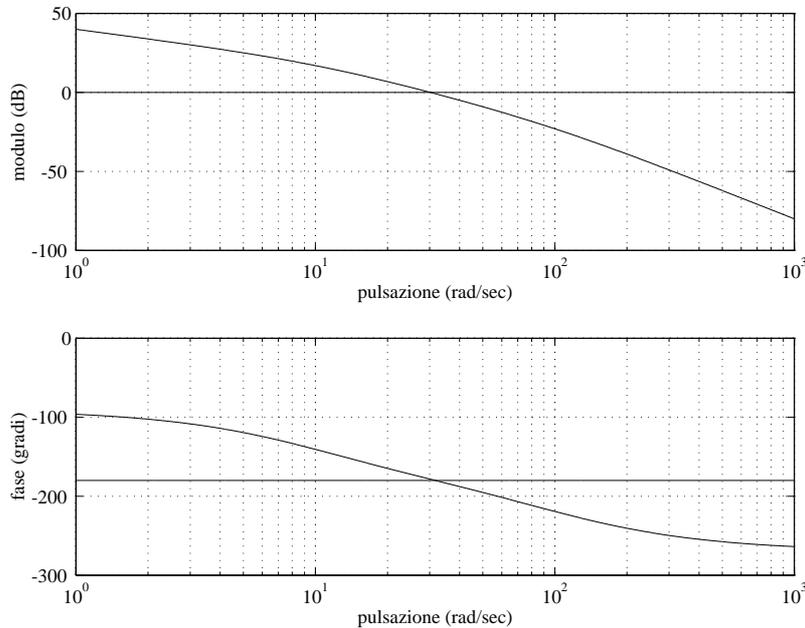


Figure 2: Diagrammi di Bode di $\hat{F}(j\omega)$

Dall'esame dei diagrammi di Bode riportati in Fig. 2 si deducono la pulsazione di attraversamento $\hat{\omega}_t$ e il margine di fase \hat{m}_φ di $\hat{F}(j\omega)$

$$\hat{\omega}_t \approx 30 \text{ rad/sec} \quad \text{e} \quad \hat{m}_\varphi \approx 1.6^\circ.$$

Si noti che, in assenza di un'ulteriore azione correttiva espletata da $R(s)$, il sistema ad anello chiuso si troverebbe molto vicino al limite di stabilità. Per soddisfare le specifiche del problema è necessario determinare $R(s)$ in modo tale da aumentare il margine di fase di almeno $m_\varphi^* - \hat{m}_\varphi = 18.4^\circ$ in $\hat{\omega}_t = \omega_t^*$, mantenendo pressoché inalterata la pulsazione di attraversamento. A tale scopo si può usare una funzione o rete *anticipatrice*

$$R_a(s) = \frac{1 + \tau_a s}{1 + \frac{\tau_a}{m_a} s}, \quad \tau_a > 0, \quad m_a > 1,$$

i cui diagrammi di Bode sono mostrati in Fig. 3 in corrispondenza a diversi valori di m_a . In tali diagrammi, detti *universali*, viene riportata in ascissa la pulsazione normalizzata $\omega\tau_a$. Si osservi che il fattore binomio corrispondente allo zero di $R_a(s)$ ha pulsazione di rottura $1/\tau_a$, mentre quello corrispondente al polo ha pulsazione di rottura m_a/τ_a . Di conseguenza, nei diagrammi di Fig. 3 alla pulsazione normalizzata $10^0 = 1$ corrisponde proprio la pulsazione di rottura dello zero.

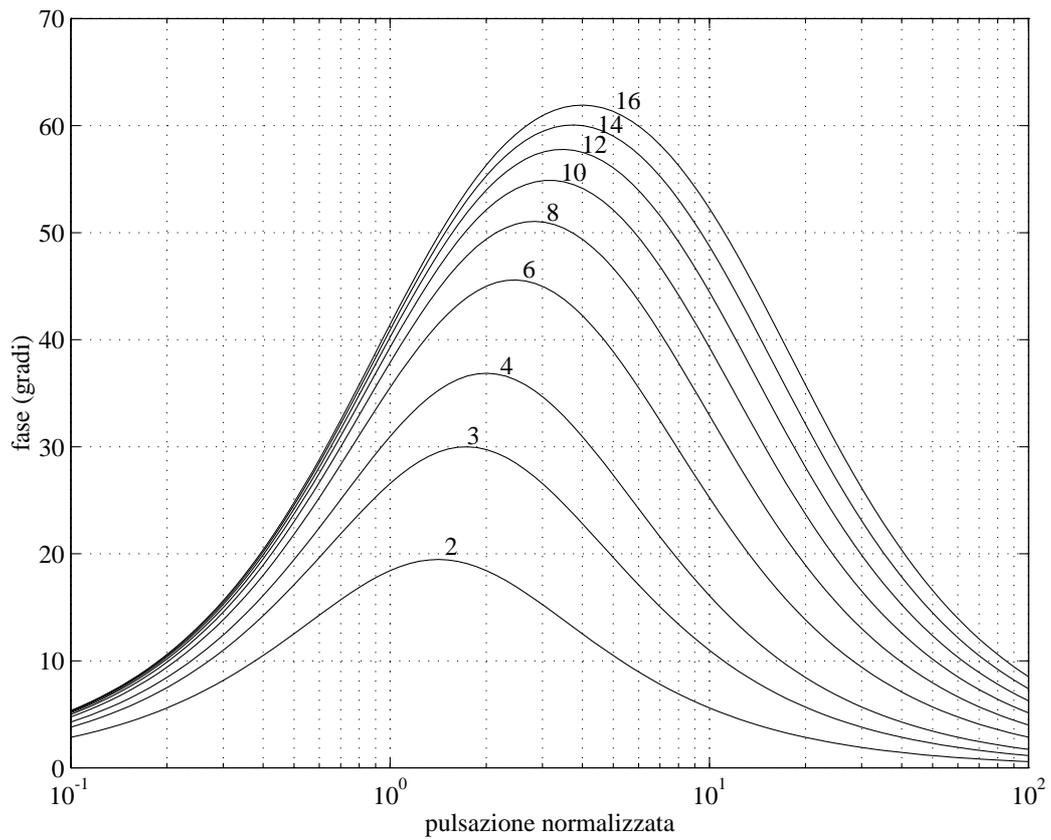
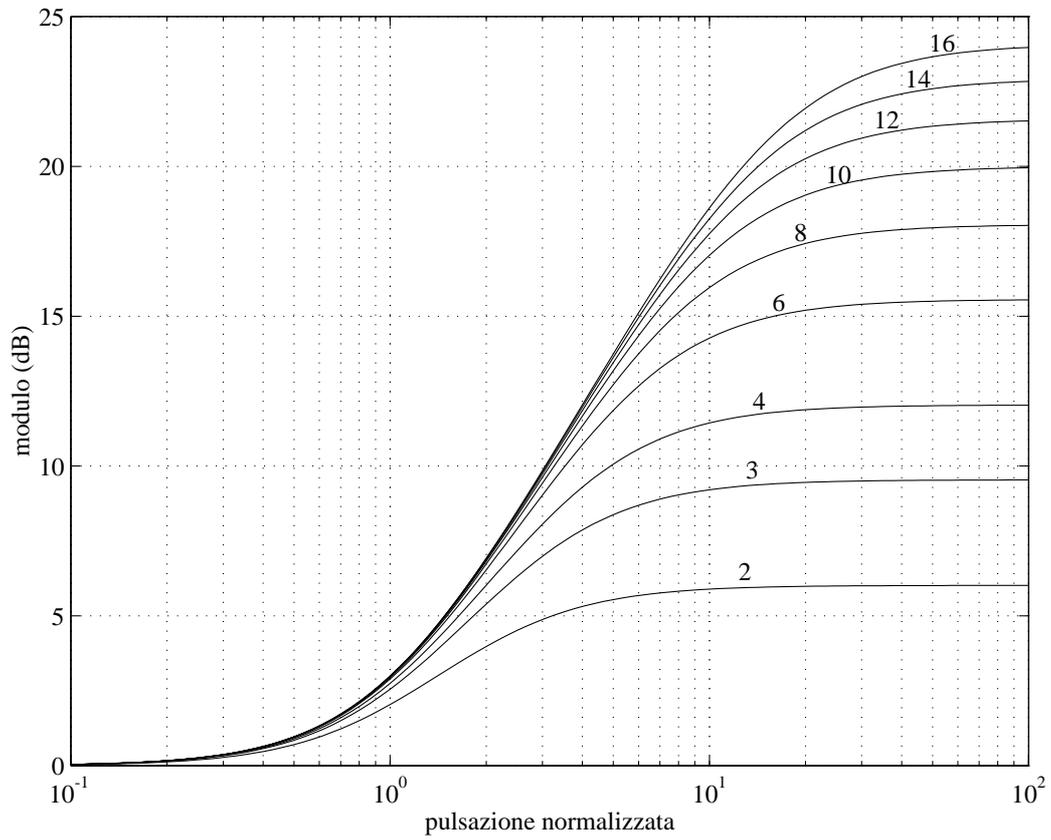


Figure 3: Diagrammi di Bode universali per una rete anticipatrice. Ogni diagramma corrisponde al valore indicato di m_a . Gli stessi diagrammi sono validi per una rete attenuatrice, purché si attribuisca segno negativo alle ordinate.

La scelta dei parametri m_a e τ_a è guidata in questo caso dalle seguenti considerazioni. L'azione anticipatrice deve essere tale da aumentare la fase di 18.4° in corrispondenza alla pulsazione $\omega_t^* = \hat{\omega}_t = 30$ rad/sec. I diagrammi universali di Fig. 3 mostrano che questo anticipo può essere ottenuto per varie coppie $(m_a, \omega\tau_a)$, cui però corrispondono amplificazioni di modulo assai diverse. Poiché si vuole lasciare inalterata la pulsazione di attraversamento, tale amplificazione va limitata il più possibile. Ciò equivale a scegliere la più piccola pulsazione normalizzata $\omega\tau_a$ che garantisce — per un opportuno valore di m_a — l'anticipo richiesto. Nel caso in esame, è facile vedere che questa strategia conduce a scegliere $\omega\tau_a = 0.4$ e $m_a = 10$. In corrispondenza a $\omega\tau_a = 0.4$, la curva dei moduli per $m_a = 10$ indica un'amplificazione assai limitata della $F(j\omega)$. È quindi prevedibile che il conseguente aumento della pulsazione di attraversamento ω_t sia molto contenuto.

L'ultimo passo consiste nel collocare l'anticipo di fase proprio in corrispondenza a ω_t^* , cioè

$$\omega_t^* \tau_a = 30 \tau_a = 0.4 \quad \implies \quad \tau_a = \frac{0.4}{30} = \frac{1}{75}.$$

La funzione anticipatrice risultante è quindi

$$R_a(s) = \frac{1 + \frac{1}{75}s}{1 + \frac{1}{750}s},$$

mentre la funzione compensatrice complessiva è

$$G(s) = \frac{K_G}{s} R_a(s) = \frac{10}{s} \frac{1 + \frac{1}{75}s}{1 + \frac{1}{750}s}.$$

I diagrammi di Bode della risposta armonica ad anello aperto (funzione d'anello) $F(j\omega) = \hat{F}(j\omega)R_a(j\omega)$ sono riportati in Fig. 4 e, per uno spettro di frequenze più ampio, in Fig. 5. Si noti che, come previsto, l'introduzione della funzione anticipatrice ha lievemente spostato la pulsazione di attraversamento da 30 rad/sec a circa 31 rad/sec, mentre il margine di fase (individuato in 31 rad/sec) è aumentato da 0° a oltre 20° .

Si noti che, in presenza di un unico attraversamento dell'asse a 0 dB da parte del diagramma dei moduli, un guadagno positivo di $F(j\omega)$ e un margine di fase positivo (criterio di Bode) garantisce la stabilità asintotica del sistema ad anello chiuso, dato che la funzione di trasferimento ad anello aperto non ha poli con parte reale positiva (infatti, la funzione compensatrice $G(s)$ introduce al più poli con parte reale nulla). È inoltre opportuno sottolineare che, sebbene la specifica sulla stabilità ad anello chiuso non sia esplicita nell'enunciato del problema, essa costituisce un requisito irrinunciabile nella sintesi dei sistemi di controllo. D'altra parte, la stabilità asintotica è implicitamente richiesta dalle prime tre specifiche, in quanto essa è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del regime permanente.

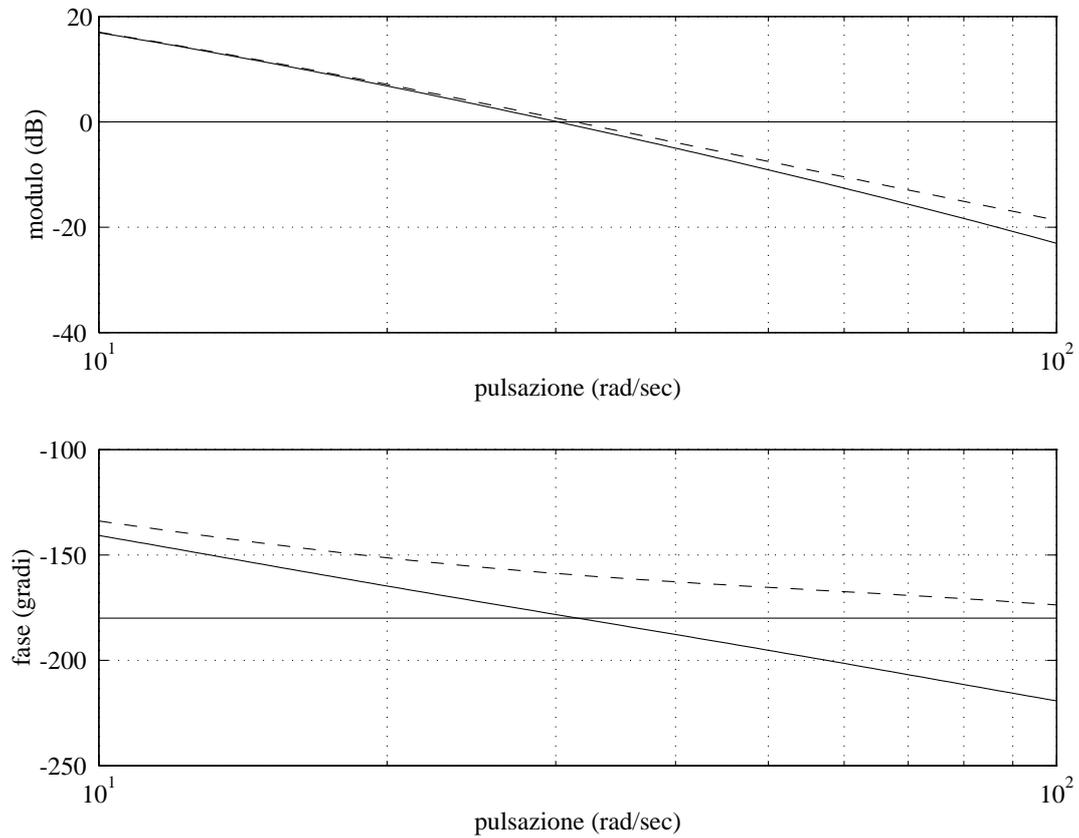


Figure 4: Diagrammi di Bode di $F(j\omega)$ (---) e di $\hat{F}(j\omega)$ (—)

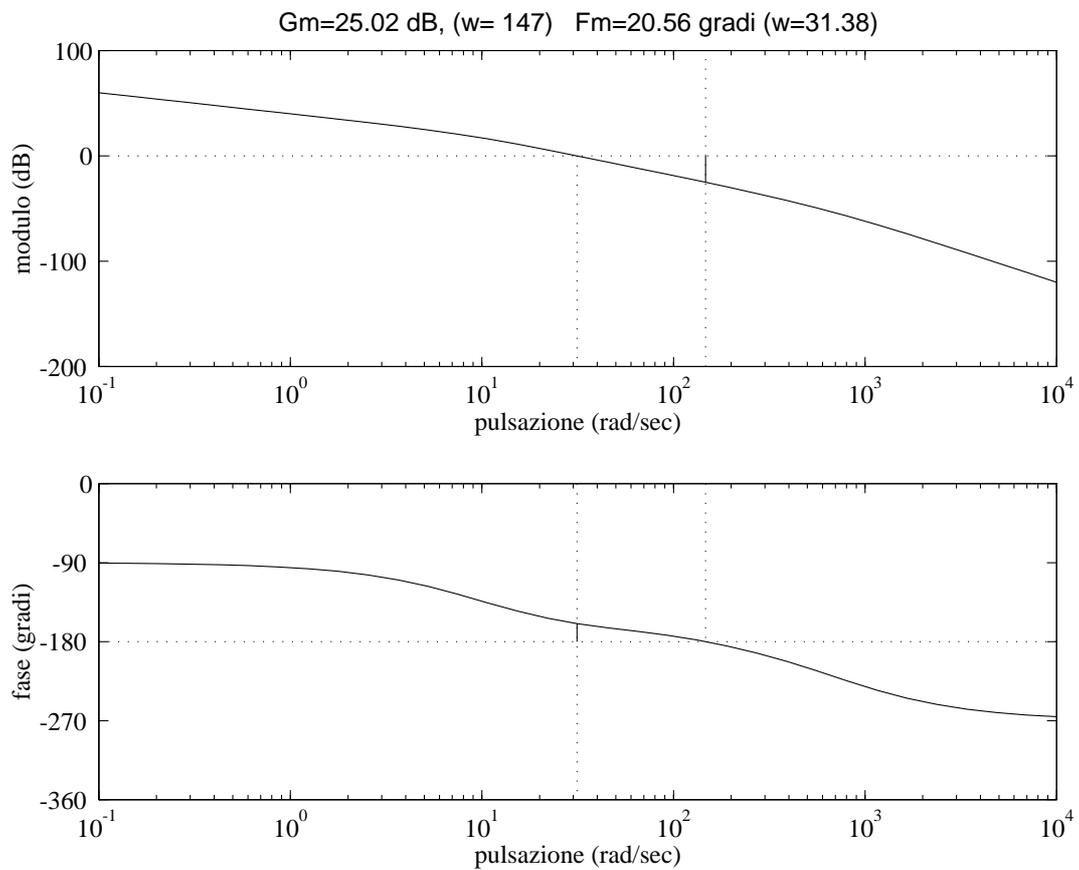


Figure 5: Diagrammi di Bode di $F(j\omega)$. Si noti nella parte superiore della figura l'indicazione del valore del margine di guadagno (G_m) e del margine di fase (F_m), con le rispettive pulsazioni.

Per verificare il soddisfacimento delle specifiche originarie \mathbf{d}), che riguardavano la funzione di trasferimento ad anello chiuso, è opportuno esaminare il diagramma del modulo della risposta armonica del sistema ad anello chiuso

$$W(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{1 + F(j\omega)} = \frac{R_a(j\omega)\hat{F}(j\omega)}{1 + R_a(j\omega)\hat{F}(j\omega)},$$

riportato in Fig. 6. Il modulo alla risonanza M_r (o picco di risonanza) è inferiore a 9 dB, mentre la banda passante B_3 è all'incirca 50 rad/sec, come richiesto. Per completezza, in Fig. 7 è mostrato il modulo della risposta armonica della funzione di sensitività

$$S(s) = \frac{1}{1 + F(s)},$$

che esprime l'influenza del disturbo in uscita $d(t)$ sulla variabile controllata $y(t)$. Come previsto, la presenza di un polo nell'origine nel ramo diretto si riflette nella presenza di uno zero nell'origine per la $W_d(s)$.

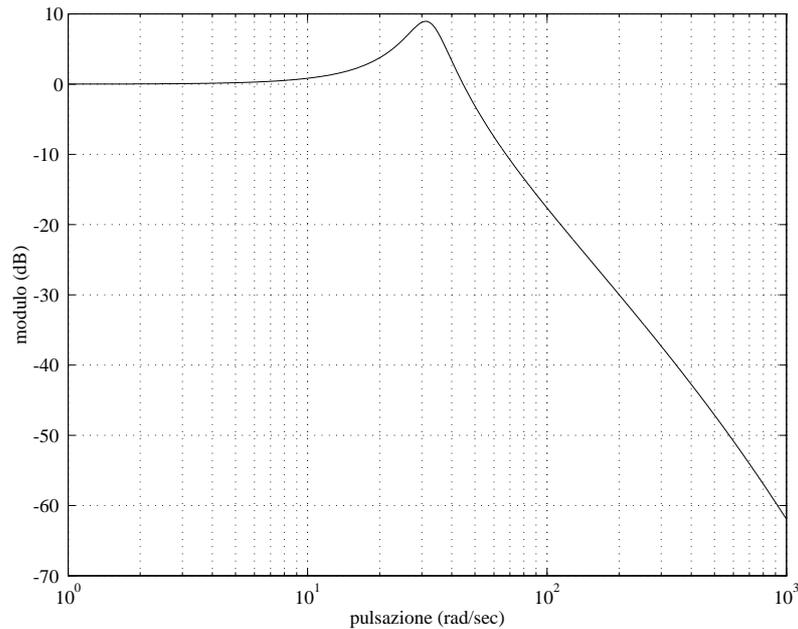


Figure 6: Diagramma dei moduli di $W(j\omega)$

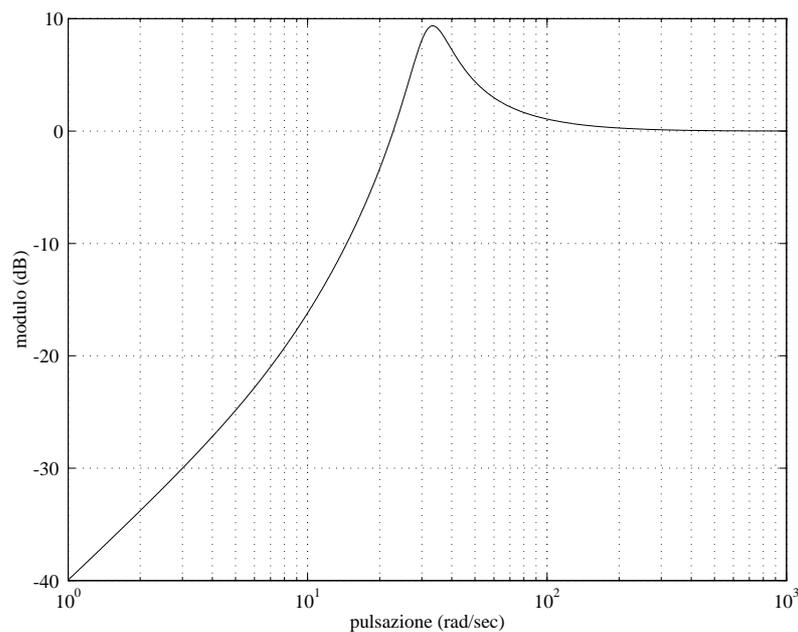


Figure 7: Diagramma dei moduli di $S(j\omega)$

Al punto **d**) si richiede un valore più basso sia per la banda passante che per il modulo alla risonanza (e quindi un maggior tempo di salita e una minore sovraelongazione). La specifica su B_3 implica una pulsazione di attraversamento desiderata per la funzione d'anello $F(j\omega)$ pari a $\omega_t^* = 7$ rad/sec. Per quanto riguarda la specifica sul modulo alla risonanza (o picco alla risonanza), essa corrisponde ad una richiesta di margine di fase desiderato m_φ^* maggiore o uguale a 40° .

Confrontando i valori desiderati con quelli del processo modificato $\hat{F}(j\omega)$, si deduce che la rete correttiva deve ridurre la pulsazione di attraversamento. Un esame dei diagrammi di Bode di $\hat{F}(j\omega)$ (vedi Fig. 2) mostra che

$$|\hat{F}(j\omega_t^*)| = 21 \text{ dB}, \quad \angle \hat{F}(j\omega_t^*) = -128^\circ.$$

Si noti che la fase in ω_t^* è già sufficiente. Pertanto, è necessario 'abbassare' il diagramma del modulo, così da spostare la pulsazione di attraversamento in ω_t^* , modificando il meno possibile il diagramma delle fasi nella zona di interesse. Naturalmente, per ottenere tale effetto non si può ricorrere a un semplice guadagno minore di uno (e quindi minore di zero in dB), poiché ciò comporterebbe la violazione delle specifiche sul regime permanente (in particolare, la **b**)).

È invece possibile utilizzare una rete *attenuatrice*

$$R_i(s) = \frac{1 + \frac{\tau_i}{m_i} s}{1 + \tau_i s}, \quad \tau_i > 0, \quad m_i > 1,$$

i cui diagrammi di Bode, in corrispondenza a diversi valori di m_i , sono ottenibili da quelli della Fig. 3, in cui le ascisse rappresentino la pulsazione normalizzata $\omega\tau_i$ e si attribuisca segno negativo ai valori riportati sulle ordinate. Si osservi che il fattore binomio corrispondente al polo di $R_i(s)$ ha pulsazione di rottura $1/\tau_i$, mentre quello corrispondente allo zero ha pulsazione di rottura m_i/τ_i . Di conseguenza, nei diagrammi di Fig. 3 alla pulsazione normalizzata $10^0 = 1$ corrisponde proprio la pulsazione di rottura del polo.

La scelta dei parametri m_i e τ_i può essere effettuata sulla scorta delle seguenti considerazioni. L'azione attenuatrice deve essere tale da ridurre il modulo di 21 dB in corrispondenza alla pulsazione $\omega_t^* = 7$ rad/sec. I diagrammi universali di Fig. 3 mostrano che questa attenuazione può essere ottenuta per varie coppie $(m_i, \omega\tau_i)$, cui corrispondono ritardi di fase diversi. Per limitare tale ritardo e preservare il margine di fase richiesto in ω_t^* , è opportuno scegliere la pulsazione normalizzata $\omega\tau_i$ sufficientemente a destra nel diagramma. Ad esempio, valori di $\omega\tau_i$ prossimi a 10^2 sono ragionevoli. Una volta scelta la pulsazione normalizzata, è facile dedurre dai diagrammi universali il valore di m_i che assicura l'attenuazione richiesta in corrispondenza a $\omega\tau_i$.

Si deve tuttavia sottolineare che non è consigliabile scegliere valori di $\omega\tau_i$ troppo elevati. Infatti, ciò corrisponde a collocare la rete attenuatrice in bassa frequenza, e di conseguenza ad attenuare il valore del modulo di $F(j\omega)$ in tale banda, con i noti effetti negativi sulla funzione di sensitività e sulla reiezione dei disturbi. Per lo stesso motivo, nel caso in cui sia ammissibile l'introduzione di un lieve ritardo di fase, è opportuno scegliere un valore di $\omega\tau_i$ inferiore a 10^2 , compatibilmente con la realizzazione dell'attenuazione richiesta.

Nel caso in esame si verifica proprio quest'ultima situazione, essendo $\angle \hat{F}(j\omega_t^*) = -128^\circ$ sensibilmente maggiore di $m_\varphi^* - 180^\circ = -140^\circ$. La Fig. 3 mostra che per ottenere un'attenuazione di 21 dB si può scegliere $m_i = 12$. Inoltre, essendo ammissibile un ritardo di fase di 12° , si sceglie la pulsazione normalizzata $\omega\tau_i$ pari a 60. Infine, si colloca l'attenuazione di modulo proprio in corrispondenza a ω_t^* , cioè

$$7\tau_i = 60 \quad \implies \quad \tau_i = \frac{60}{7}.$$

La funzione attenuatrice risultante è quindi

$$R_i(s) = \frac{1 + \frac{5}{7}s}{1 + \frac{60}{7}s},$$

mentre la funzione compensatrice complessiva è

$$G'(s) = \frac{K_G}{s} R_i(s) = \frac{10}{s} \frac{1 + \frac{5}{7}s}{1 + \frac{60}{7}s}.$$

L'effetto della procedura di sintesi adottata può essere analizzato sui diagrammi di Bode della risposta armonica ad anello aperto (funzione d'anello)

$$F'(j\omega) = \hat{F}(j\omega)R_i(j\omega),$$

riportati in Fig. 8 e, per uno spettro di frequenze più ampio, in Fig. 9. In particolare, si vede che l'introduzione della funzione attenuatrice ha prodotto un margine di fase effettivo $m_\varphi > 40^\circ$ e una pulsazione di attraversamento ω_t praticamente uguale a 7 rad/sec, così come richiesto.

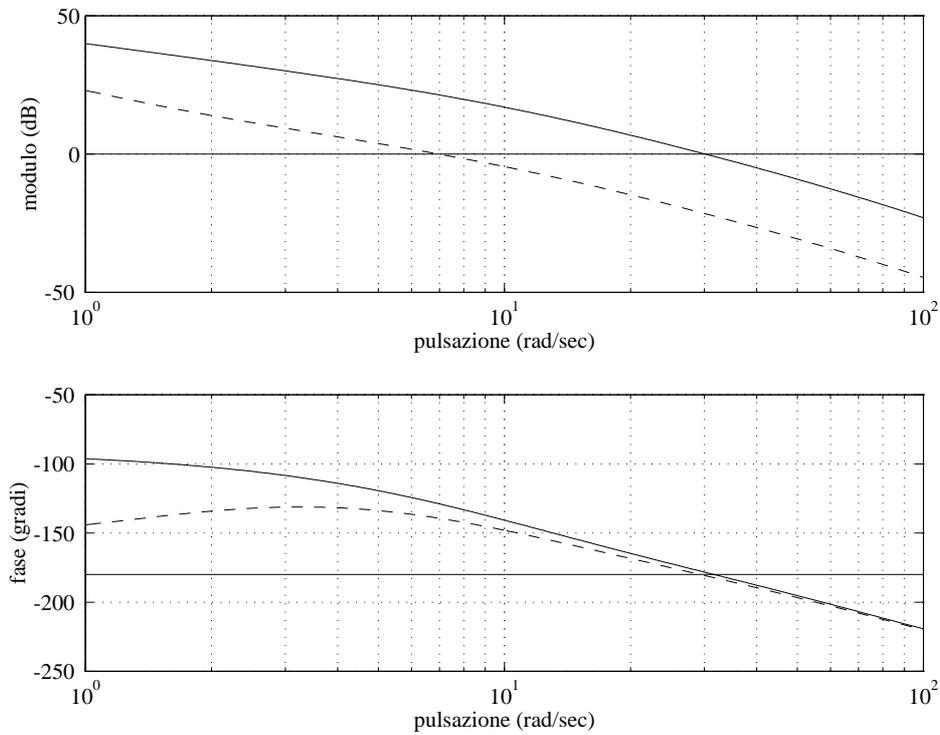


Figure 8: Diagrammi di Bode di $F'(j\omega)$ (---) e di $\hat{F}(j\omega)$ (—)

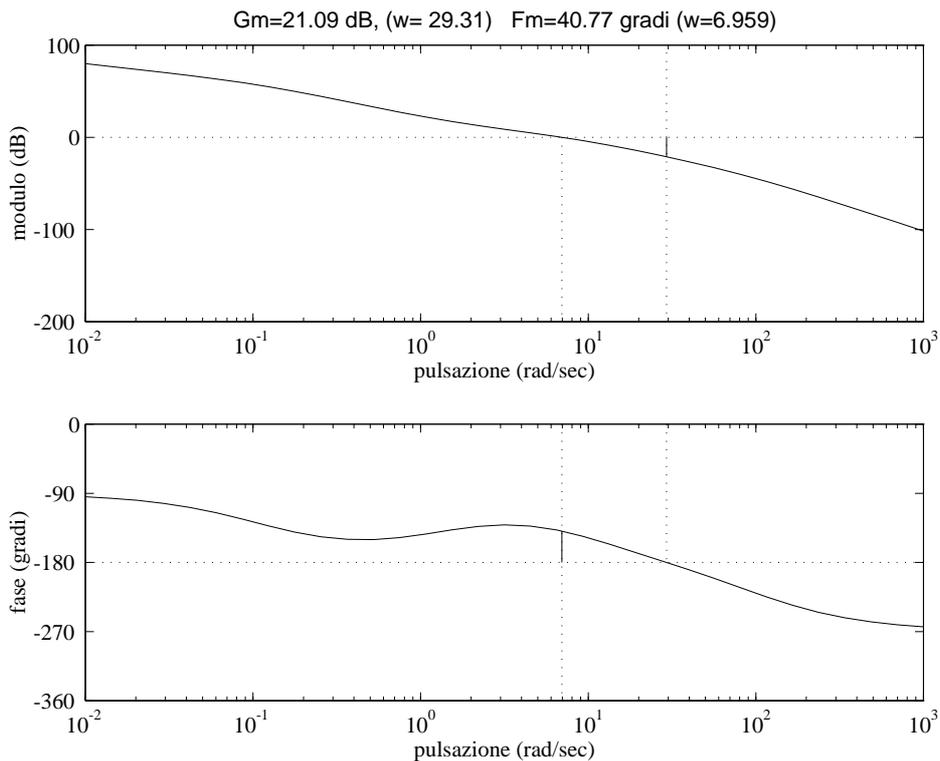


Figure 9: Diagrammi di Bode di $F'(j\omega)$

Il soddisfacimento delle specifiche originarie può essere verificato tracciando il diagramma del modulo della risposta armonica ad anello chiuso $W'(j\omega)$, riportato in Fig. 10. Il modulo alla risonanza M_r è inferiore a 4 dB, mentre la banda passante B_3 è di circa 11 rad/sec. In Fig. 11 è mostrato il modulo della risposta armonica della funzione di sensibilità $S'(s)$. Il confronto con la Fig. 7 mostra che, a seguito dell'introduzione di una rete attenuatrice, la risposta armonica della funzione di sensibilità è peggiorata alle basse frequenze.

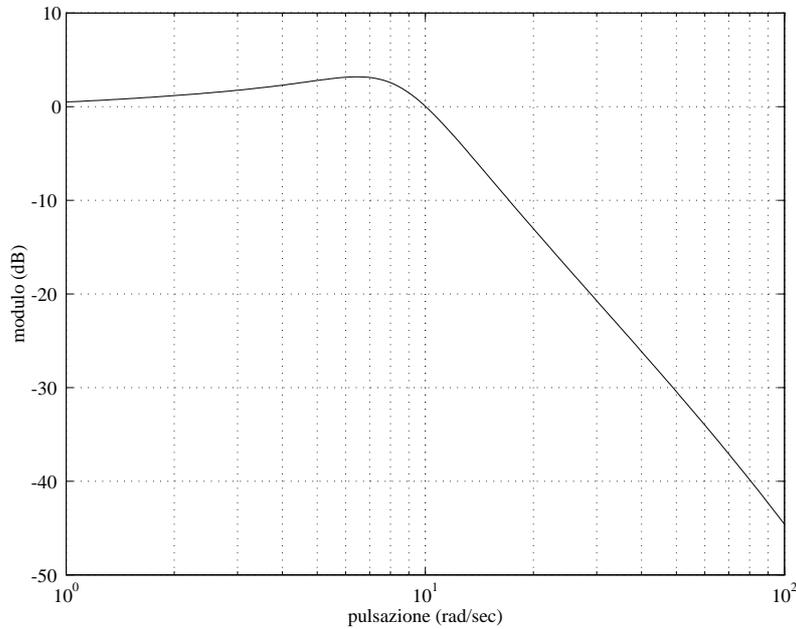


Figure 10: Diagramma dei moduli di $W'(j\omega)$

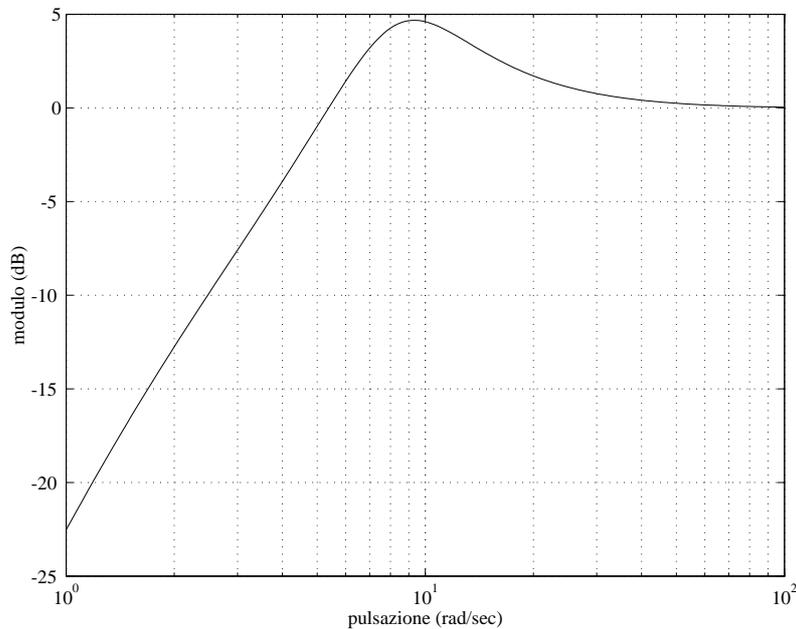


Figure 11: Diagramma dei moduli di $S'(j\omega)$

Venendo al punto **d**''), si osservi che la specifica sulla banda passante è la stessa del caso **d**); di conseguenza, si porrà nuovamente $\omega_t^* = \hat{\omega}_t = 30$ rad/sec. Per quanto riguarda la specifica sul modulo alla risonanza, essa viene convertita nella richiesta di un margine di fase di almeno $m_\varphi^* = 55^\circ$. È quindi necessario conseguire un anticipo di fase pari a circa 53.4° in corrispondenza a $\hat{\omega}_t$. Dai diagrammi universali di Fig. 3 si comprende facilmente che qualsiasi funzione anticipatrice in grado di introdurre un tale anticipo di fase comporta anche una notevole amplificazione nell'intorno della pulsazione di interesse. Per completare la sintesi, si dovrà dunque individuare una funzione attenuatrice che riporti la pulsazione di attraversamento del processo compensato in ω_t^* .

Dalla Fig. 3 si deduce che una rete anticipatrice con $m_a = 11$ assicura un anticipo di fase superiore a 56° in corrispondenza alla pulsazione normalizzata $\omega\tau_a = 3$. Dovendo collocare l'anticipo di fase in $\omega_t^* = 30$ rad/sec, si porrà $\tau_a = 3/30$ e quindi

$$R_a''(s) = \frac{1 + \frac{1}{10}s}{1 + \frac{1}{110}s}$$

L'effetto dell'introduzione dell'azione anticipatrice è illustrato in Fig. 12. Si noti che in corrispondenza a

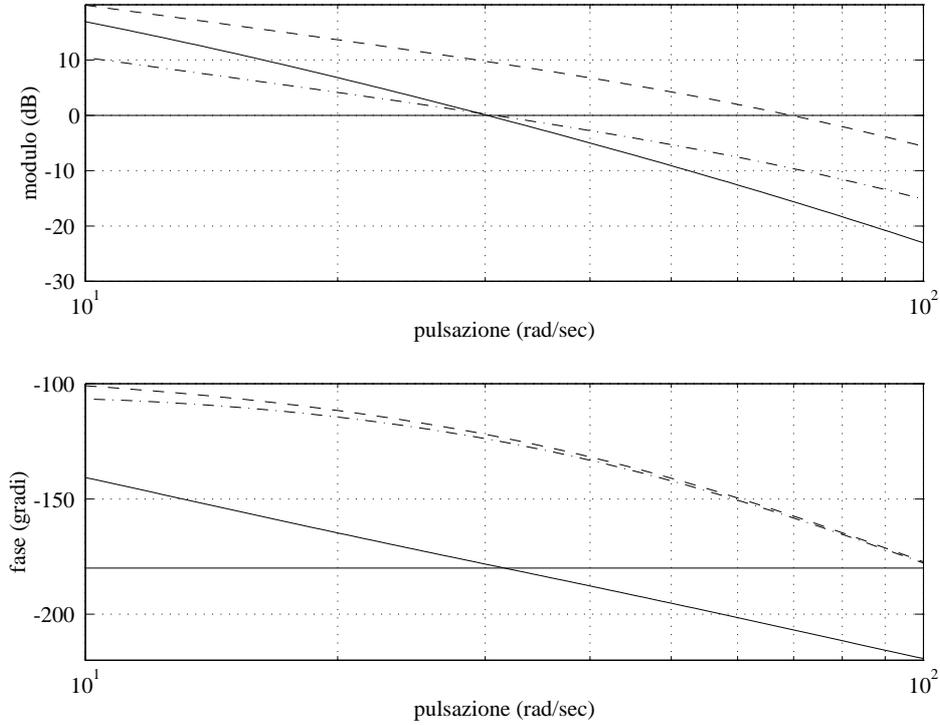


Figure 12: Diagrammi di Bode di $\hat{F}(j\omega)$ (—), di $\hat{F}(j\omega)R_a''(j\omega)$ (---) e di $F''(j\omega) = \hat{F}(j\omega)R_a''(j\omega)R_i''(j\omega)$ (-·)

ω_t^* la funzione $\hat{F}(j\omega)R_a''(j\omega)$ ha approssimativamente modulo pari a 9 dB e fase pari a 58° . Si noti che la scelta della funzione anticipatrice è stata effettuata in modo da assicurare un anticipo di fase alquanto maggiore del necessario, in modo da compensare il ritardo di fase che verrà successivamente introdotto dalla rete attenuatrice.

Il secondo passo consiste nell'ottenere un'attenuazione di 9 dB in ω_t^* . Di conseguenza, si sceglie una rete attenuatrice con $m_i = 3$ e $\omega\tau_i = 60$, da cui risulta $\tau_i = 60/30$. Si ha perciò

$$R_i''(s) = \frac{1 + \frac{2}{3}s}{1 + 2s}.$$

La funzione compensatrice complessiva è quindi pari a

$$G''(s) = \frac{10}{s} \frac{1 + \frac{1}{10}s}{1 + \frac{1}{110}s} \frac{1 + \frac{2}{3}s}{1 + 2s}.$$

I diagrammi finali di Bode del processo compensato

$$F''(j\omega) = \hat{F}(j\omega)R_a''(j\omega)R_i''(j\omega)$$

sono riportati in Fig. 12 e, per uno spettro di frequenze più ampio, in Fig. 13. In effetti, si è ottenuto un margine di fase superiore a 55° e una pulsazione di attraversamento di poco inferiore a 31 rad/sec.

Il diagramma di Bode del modulo della risposta armonica ad anello chiuso $W''(j\omega)$ è mostrato in Fig. 14. Come richiesto, il modulo alla risonanza è minore di 2 dB, mentre la banda passante è di poco superiore a 50 rad/sec.

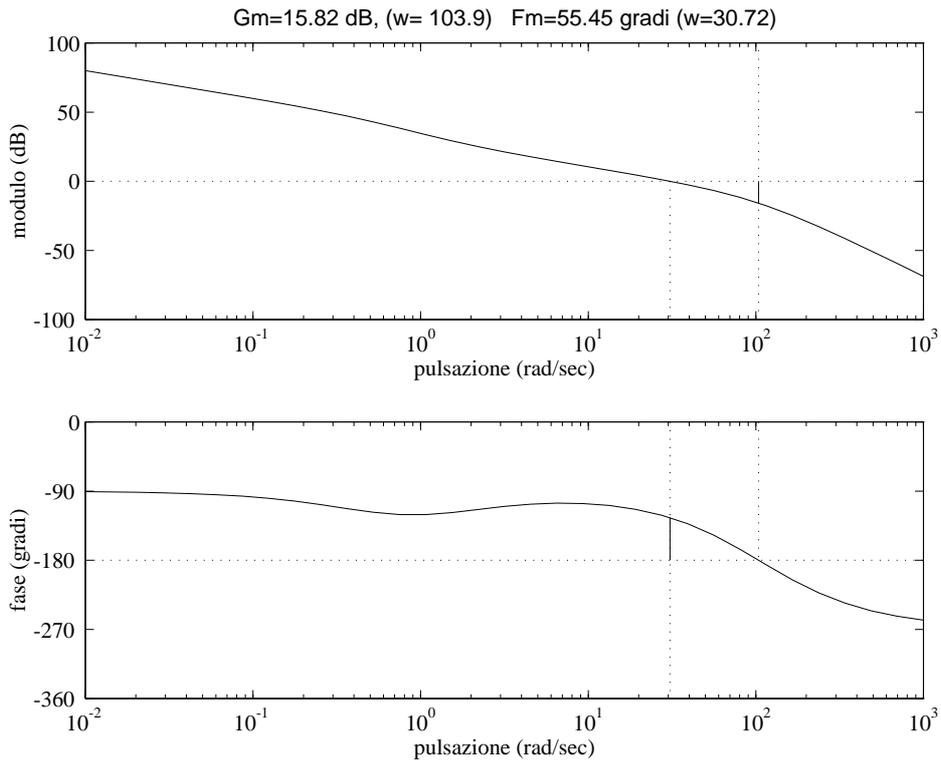


Figure 13: Diagrammi di Bode di $F''(j\omega)$

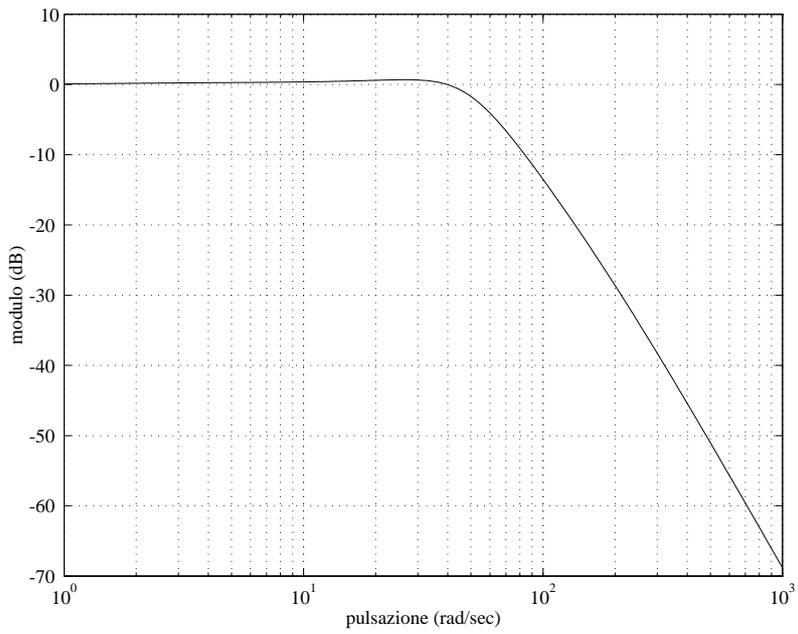


Figure 14: Diagramma dei moduli di $W''(j\omega)$