Esercizi proposti di Fondamenti di Automatica - Parte 2

21 Febbraio 2005

Es. 1) Dimostrare che le matrici A_R, a elementi reali, e A_D, a elementi complessi, sono simili.

$$A_R = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}, \qquad A_D = \begin{pmatrix} \alpha + j\omega & 0 \\ 0 & \alpha - j\omega \end{pmatrix} \tag{1}$$

Es. 2) Calcolare $e^{A_R t}$ e $e^{A_D t}$.

Es. 3) Data una generica matrice A (2×2) caratterizzata dalla coppia di autovalori $\lambda_1 = \alpha + j\omega$ e λ_1^* a cui corrispondono rispettivamente gli autovettori complessi u_1 e u_1^*

$$u_1 = u_a + j\, u_b, \qquad \text{con} \qquad u_a = \mathrm{Re}\,\{u_1\}\,, \quad u_b = \mathrm{Im}\,\{u_1\}$$

(u_a e u_b vettori a elementi reali), la matrice T_R, a elementi reali, definita in modo tale che

$$T_R^{-1} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \tag{2}$$

dimostrare che T_R è tale da trasformare A in A_R

$$A_R = T_R\, A\, T_R^{-1} \tag{3}$$

Es. 4) Data una generica matrice A (2×2) caratterizzata dalla coppia di autovalori $\lambda_1 = \alpha + j\omega$ e λ_1^* a cui corrispondono rispettivamente gli autovettori complessi u_1 e u_1^*

$$u_1 = u_a + j u_b, \qquad \text{con} \qquad u_a = \mathrm{Re}\,\{u_1\}\,, \quad u_b = \mathrm{Im}\,\{u_1\} \tag{4}$$

u_a e u_b entrambi vettori a elementi reali, dal risultato dell'Es. 3 e dalla diagonalizzazione di una matrice con autovalori distinti si ha

$$\begin{array}{llcl} \exists\, T_R \text{ non singolare : } & T_R^{-1} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} & \longrightarrow & A_R = T_R\, A\, T_R^{-1} \\ \exists\, T_D \text{ non singolare : } & T_D^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_1^* \end{pmatrix} & \longrightarrow & A_D = T_D\, A\, T_D^{-1} \end{array}$$

Calcolare l'evoluzione libera nello stato secondo le due alternative

$$e^{At}x(0) = T_R^{-1}\, e^{A_R t}\, T_R\, x(0) \tag{5}$$

$$e^{At}x(0) = T_D^{-1}\, e^{A_D t}\, T_D\, x(0) \tag{6}$$

N.B. Dalle relazioni (5) e (6) si possono definire i seguenti vettori

$$\begin{pmatrix} c_a \\ c_b \end{pmatrix} = T_R\, x(0) \quad \longrightarrow \quad x(0) = T_R^{-1} \begin{pmatrix} c_a \\ c_b \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad x(0) = c_a\, u_a + c_b\, u_b \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_1^* \end{pmatrix} = T_D\, x(0) \quad \longrightarrow \quad x(0) = T_D^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1^* \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad x(0) = c_1\, u_1 + c_1^*\, u_1^* \tag{8}$$

con c_a e c_b coefficienti reali, mentre c_1 e c_1^* sono complessi; si pone

$$c_1 = c_{1a} + jc_{1b}, \qquad \text{con} \qquad c_{1a} = \mathrm{Re}\{c_1\}, \quad c_{1b} = \mathrm{Im}\{c_1\} \tag{9}$$

Le relazioni (7) e (8) illustrano come sia possibile esprimere il generico stato iniziale $x(0)$ sia nella base (u_a, u_b) (vettori reali) che nella base (u_1, u_1^*) (vettori complessi). Si pone

$$m_R, \varphi_R \quad \text{t.c.} \quad m_R = \sqrt{c_a^2 + c_b^2}, \quad c_a = m_R \sin\varphi_R, \quad c_b = m_R \cos\varphi_R \tag{10}$$

$$m_D, \varphi_D \quad \text{t.c.} \quad m_D = \sqrt{c_{1a}^2 + c_{1b}^2}, \quad c_{1a} = m_D \cos\varphi_D, \quad c_{1b} = m_D \sin\varphi_D \tag{11}$$

Es. 5) Calcolare l'evoluzione libera nello stato e in uscita del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

a partire da

$$x(0) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Es. 6) Calcolare l'evoluzione libera nello stato e in uscita del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

a partire da

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(per aiutare la risoluzione dell'esercizio, si fornisce uno degli autovalori $\lambda_1 = 3$)

Bozze di soluzione di
“Esercizi proposti di Fondamenti di Automatica - Parte 2”

Sol. 1) Si calcolano i polinomi caratteristici e gli autovalori

$$\begin{aligned} p_{A_R}(\lambda) &= \det(\lambda I - A_R) = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \omega^2 \\ p_{A_D}(\lambda) &= \det(\lambda I - A_D) = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \omega^2 \end{aligned}$$

A_R e A_D hanno gli stessi autovalori complessi e coniugati

$$\lambda_1 = \alpha + j\omega, \quad \lambda_2 = \lambda_1^* = \alpha - j\omega$$

Il cambiamento di coordinate che trasforma A_R nella matrice diagonale A_D è un caso particolare di diagonalizzazione (autovalori distinti $\Rightarrow$ matrice diagonalizzabile, caso di autovalori complessi e coniugati). Pertanto le due matrici sono simili.

Sol. 2) Siano u_{r1} e $u_{r2} = u_{r1}^*$ gli autovettori associati rispettivamente a λ_1 e λ_1^* della matrice A_R, definendo (diagonalizzazione)

$$T_d^{-1} = \begin{pmatrix} u_{r1} & u_{r2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{r1} & u_{r1}^* \end{pmatrix}$$

si ha

$$A_D = T_d A_R T_d^{-1} \qquad \rightarrow \qquad A_R = T_d^{-1} A_D T_d \qquad \rightarrow \qquad e^{A_R t} = T_d^{-1} e^{A_D t} T_d$$

Si calcola prima $e^{A_D t}$ sfruttando la formula di Eulero $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$

$$\begin{aligned} e^{A_D t} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha + j\omega t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha - j\omega t} \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} e^{j\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-j\omega t} \end{pmatrix} \\ &= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\omega t + j\sin\omega t & 0 \\ 0 & \cos\omega t - j\sin\omega t \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{12}$$

Gli autovettori u_{r1} e $u_{r2} = u_{r1}^*$ (associati a λ_1 e λ_1^*) di A_R sono dati da

$$u_{r1} = \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}, \qquad u_{r1}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T_d^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}, \quad T_d = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{pmatrix}$$

ed è facile verificare che $A_D = T_d A_R T_d^{-1}$. Continuando nel calcolo dell'esponenziale di matrice, si ottiene

$$\begin{aligned} e^{A_R t} &= T_d^{-1} e^{A_D t} T_d \\ &= \frac{1}{2} e^{\alpha t} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega t + j\sin\omega t & 0 \\ 0 & \cos\omega t - j\sin\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{pmatrix} \\ &= \vdots \\ &= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{13}$$

Ovviamente si ottiene lo stesso risultato dalla forma spettrale

$$\begin{aligned} e^{A_R t} &= e^{\lambda_1 t} u_{r1} v_{r1}^T + e^{\lambda_1^* t} u_{r1}^* v_{r1}^{*\,T} \\ &= e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2j \end{pmatrix} + e^{\lambda_1^* t} \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2j \end{pmatrix} \\ &= e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2j \\ 1/2j & 1/2 \end{pmatrix} + e^{\lambda_1^* t} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2j \\ -1/2j & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= e^{\alpha t} \left\{ e^{j\omega t} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2j \\ 1/2j & 1/2 \end{pmatrix} + e^{-j\omega t} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2j \\ -1/2j & 1/2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

e sfruttando le relazioni

$$\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = \cos\omega t, \qquad \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = \frac{-j\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)}{2} = \sin\omega t$$

si ha

$$e^{A_R t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \tag{14}$$

Sol. 3) Per definizione di autovalore e autovettore si ha

$$\begin{aligned} Au_1 = \lambda_1 u_1 &= (\alpha + j\omega)(u_a + ju_b) \\ &= (\alpha u_a - \omega u_b) + j(\omega u_a + \alpha u_b) \end{aligned}$$

e

$$Au_1 = A(u_a + ju_b) = Au_a + jAu_b$$

da cui, essendo A, u_a e u_b a elementi reali,

$$\begin{aligned} Au_a &= \alpha u_a - \omega u_b = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\omega \end{pmatrix} \\ Au_b &= \omega u_a + \alpha u_b = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

le quali si possono riscrivere

$$A \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

e cioè

$$A\,T_R^{-1} = T_R^{-1}\,A_R \qquad \Rightarrow \quad A_R = T_R\,A\,T_R^{-1}$$

Si noti che il calcolo dell'esponenziale di matrice può essere effettuato sfruttando sia la relazione precedente sia il calcolo di $e^{A_R t}$ riportato in (14)

$$e^{At} = T_R^{-1}\,e^{A_R t}\,T_R$$

Sol. 4) Incominciando da (5) e sfruttando la (13)

$$\begin{aligned} e^{At}x(0) &= T_R^{-1}\,e^{A_R t}\,T_R\,x(0) \\ &= \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_a \\ c_b \end{pmatrix} \qquad \text{da (7)} \\ &= m_R\,e^{\alpha t} \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\varphi_R \\ \cos\varphi_R \end{pmatrix} \quad \text{da (10)} \\ &= m_R\,e^{\alpha t} \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega t\ \sin\varphi_R + \sin\omega t\ \cos\varphi_R \\ -\sin\omega t\ \sin\varphi_R + \cos\omega t\ \cos\varphi_R \end{pmatrix} \\ &= m_R\,e^{\alpha t} \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\omega t + \varphi_R) \\ \cos(\omega t + \varphi_R) \end{pmatrix} \\ e^{At}x(0) &= m_R\,e^{\alpha t} \left\{ \sin(\omega t + \varphi_R)\,u_a + \cos(\omega t + \varphi_R)\,u_b \right\} \end{aligned} \tag{15}$$

Calcolando l'evoluzione libera nello stato dalla (6), sfruttando la (12), la (8) la (9) e la (11)

$$\begin{aligned} e^{At}x(0) &= e^{A_D t}\,T_D\,x(0) \\ &= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} u_1 & u_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega t + j\sin\omega t & 0 \\ 0 & \cos\omega t - j\sin\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1a} + jc_{1b} \\ c_{1a} - jc_{1b} \end{pmatrix} \\ &= m_D\,e^{\alpha t} \begin{pmatrix} u_1 & u_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega t + j\sin\omega t & 0 \\ 0 & \cos\omega t - j\sin\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi_D + j\sin\varphi_D \\ \cos\varphi_D - j\sin\varphi_D \end{pmatrix} \\ &= m_D\,e^{\alpha t} \begin{pmatrix} u_a + ju_b & u_a - ju_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\cos\omega t + j\sin\omega t)(\cos\varphi_D + j\sin\varphi_D) \\ (\cos\omega t - j\sin\omega t)(\cos\varphi_D - j\sin\varphi_D) \end{pmatrix} \\ &= 2m_D\,e^{\alpha t} \left\{ (\cos\omega t\cos\varphi_D - \sin\omega t\sin\varphi_D)\,u_a - (\sin\omega t\cos\varphi_D + \cos\omega t\sin\varphi_D)\,u_b \right\} \\ e^{At}x(0) &= 2m_D\,e^{\alpha t} \left\{ \cos(\omega t + \varphi_D)\,u_a - \sin(\omega t + \varphi_D)\,u_b \right\} \end{aligned} \tag{16}$$

nella quale sono state usate le note formule

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

Si noti che si arriva alla stessa espressione (16) esplicitando la forma spettrale (ricordando la (8) e che $v_1^T u_1^* = v_1^{*T} u_1 = 0$)

$$
\begin{aligned}
e^{At}x(0) &= \left\{e^{\lambda_1 t}u_1 v_1^T + e^{\lambda_1^* t}u_1^* v_1^{*T}\right\} x(0) \\
&= \left\{e^{\lambda_1 t}u_1 v_1^T + e^{\lambda_1^* t}u_1^* v_1^{*T}\right\} (c_1\, u_1 + c_1^*\, u_1^*) \\
&= c_1 e^{\lambda_1 t}u_1 + c_1^* e^{\lambda_1^* t}u_1^*
\end{aligned}
$$

sfruttando le relazioni (4), (9), e le posizioni (11)

$$
\begin{aligned}
u_1 &= u_a + j u_b \\
c_1 &= c_{1a} + j c_{1b} \\
m_D &= \sqrt{c_{1a}^2 + c_{1b}^2}, \quad c_{1a} = m_D\cos\varphi_D, \quad c_{1b} = m_D \sin\varphi_D
\end{aligned}
$$

Confrontando le espressioni di (15) e (16), si potrebbe pensare di aver ottenuto due risultati diversi. A tal proposito si noti che, essendo

$$
\frac{u_1 + u_1^*}{2} = u_a, \qquad \frac{u_1 - u_1^*}{2j} = u_b
$$

lo stato iniziale generico $x(0)$ si può riscrivere come

$$
\begin{aligned}
x(0) &= c_a\, u_a + c_b\, u_b \\
&= c_a\, \frac{u_1 + u_1^*}{2} + c_b\, \frac{u_1 - u_1^*}{2j} \\
&= \frac{c_a - j c_b}{2}\, u_1 + \frac{c_a + j c_b}{2}\, u_1^*
\end{aligned}
$$

la quale, confrontandola con la (8) e la (9), implica

$$
c_1 = \frac{c_a - j c_b}{2} = \frac{c_a}{2} + j\frac{-c_b}{2} \quad \longrightarrow \quad c_{1a} = \frac{c_a}{2}, \quad c_{1b} = \frac{-c_b}{2}
$$

Sostituendo tali espressioni nelle posizioni (11) e sfruttando le (10) si ha

$$
\begin{aligned}
m_D &= \sqrt{c_{1a}^2 + c_{1b}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{c_a^2 + c_b^2} = \frac{m_R}{2} \\
c_{1a} = \frac{c_a}{2} \quad &\Rightarrow \quad m_D\cos\varphi_D = \frac{m_R}{2}\sin\varphi_R \\
c_{1b} = \frac{-c_b}{2} \quad &\Rightarrow \quad m_D\sin\varphi_D = -\frac{m_R}{2}\cos\varphi_R
\end{aligned}
$$

e pertanto

$$
\begin{aligned}
m_D &= \frac{m_R}{2} \\
\sin\varphi_R &= \cos\varphi_D \\
\cos\varphi_R &= -\sin\varphi_D
\end{aligned}
$$

In conclusione, le due espressioni dell'evoluzione libera (15) e (16) sono equivalenti in quanto valgono le relazioni

$$
m_D = \frac{m_R}{2} \tag{17}
$$

$$
\varphi_D = \varphi_R - \frac{\pi}{2} \tag{18}
$$

Sol. 5) Autovalori e autovettori

$$\lambda_1 = 1 + 2j \quad \rightarrow \quad u_1 = \begin{pmatrix} j \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = \lambda_1^* = 1 - 2j \quad \rightarrow \quad u_2 = u_1^* = \begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix}$$

pertanto

$$u_a = \mathrm{Re}\{u_1\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_b = \mathrm{Im}\{u_1\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e quindi c_a e c_b devono essere tali che (in alternativa si usa la formula (7))

$$x(0) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = c_1\, u_a + c_b\, u_b = c_a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè

$$c_a = \frac{1}{2}, \qquad c_b = -\frac{1}{2}$$

Si ottengono le quantità (10)

$$\begin{aligned} m_R &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi_R &= \frac{c_a}{m_R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\varphi_R &= \frac{c_b}{m_R} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

da cui

$$\varphi_R = \frac{3\pi}{4}$$

Dalla formula generale (15) si ha

$$\begin{aligned} x_\ell(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \left[\sin\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \begin{pmatrix} \cos\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) \\ \sin\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mentre l'evoluzione libera in uscita è data da

$$y_\ell(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \left[\cos\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) \right]$$

In alternativa, volendo utilizzare la formula (16), si ha

$$T_D^{-1} = \begin{pmatrix} j & -j \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1^* \end{pmatrix} = T_D x(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -j & 1 \\ j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+j \\ 1-j \end{pmatrix}$$

e quindi $c_1 = 1/4 + 1/4j$ da cui $c_{1a} = 1/4$ e $c_{1b} = 1/4$. Utilizzando le posizioni (11) si ottiene

$$\begin{aligned} m_D &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \cos\varphi_D &= \frac{c_{1a}}{m_D} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi_D &= \frac{c_{1b}}{m_D} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

e cioè

$$\varphi_D = \frac{\pi}{4}$$

Le relazioni (17) e (18) sono ovviamente verificate; si ottiene

$$\begin{aligned} x_\ell(t) &= 2\frac{1}{2\sqrt{2}} e^t \left[\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \begin{pmatrix} \cos\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) \\ \sin\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sol. 6) Dal polinomio caratteristico e conoscendo uno degli autovalori

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 11\lambda - 15 = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 5)$$

autovalori e autovettori

$$\lambda_1 = 3 \quad \rightarrow \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 1 + 2j \quad u_1 = \begin{pmatrix} j \\ 1+j \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \lambda_2^* \quad \rightarrow \quad u_3 = u_2^*$$

Per il calcolo dell'evoluzione libera nello stato, si può sfruttare sia la forma spettrale dell'esponenziale (3 autovalori distinti) sia il cambiamento di coordinate (2)

Per diagonalizzare la matrice A si sceglie

$$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & j & -j \\ 2 & 1+j & 1-j \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow T_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -(1+3j) & 1+j & 1-j \\ -(1-3j) & 1-j & 1+j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{pmatrix}$$

Dall'espressione dell'esponenziale di matrice (6), si generalizza facilmente la (8) che esprime lo stato iniziale in funzione della base prescelta

$$\begin{pmatrix} c_\alpha \\ c_1 \\ c_1^* \end{pmatrix} = T_1 x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -j \\ j \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad x(0) = -u_1 - ju_2 + ju_3$$

Da $c_1 = c_{1a} + jc_{1b} = -j$ si definiscono le quantità $m_D = 1$ e $\varphi_D = -\pi/2$, mentre da u_2 si definiscono u_a e u_b

$$u_a = \mathrm{Re}\{u_2\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_b = \mathrm{Im}\{u_2\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Infine si ottiene l'evoluzione libera nello stato dalla forma spettrale

$$\begin{aligned} e^{At}x(0) &= \left\{\sum_{i=1}^{3} e^{\lambda_i t} u_i v_i^T\right\}(c_\alpha u_1 + c_1 u_2 + c_1^* u_1^*) \\ &= c_\alpha e^{\lambda_1 t} u_1 + c_1 e^{\lambda_2 t} u_2 + c_1^* e^{\lambda_2^* t} u_2^* \\ &= c_\alpha e^{\lambda_1 t} u_1 + 2 m_D\, e^{\alpha t}\left\{\cos(\omega t + \varphi_D)\, u_a - \sin(\omega t + \varphi_D)\, u_b\right\} \\ &= -e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\, e^t \left\{\cos\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Ovviamente si arriva allo stesso risultato tramite il cambiamento di coordinate

$$T_2^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_a & u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow T_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si noti che

$$T_2 A T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_R \end{pmatrix} \Rightarrow e^{T_2 A T_2^{-1} t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{A_R t} \end{pmatrix}$$

Inoltre si ha

$$\begin{pmatrix} c_\alpha \\ c_a \\ c_b \end{pmatrix} = T_2 x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad x(0) = -u_1 + 0u_a + 2u_b$$

e $m_R = 2$, $\varphi_R = 0$. L'evoluzione libera nello stato è pari a

$$\begin{aligned} e^{At}x(0) &= c_\alpha e^{\lambda_1 t} u_1 + m_R\, e^{\alpha t}\left\{\sin(\omega t + \varphi_R)\, u_a + \cos(\omega t + \varphi_R)\, u_b\right\} \\ &= -e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\, e^t\left\{\sin(2t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos(2t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

la quale fornisce lo stesso risultato precedente. L'evoluzione libera in uscita si ottiene per semplice pre-moltiplicazione per C

$$y_\ell(t) = Ce^{At}x(0)$$