Esame di FONDAMENTI di AUTOMATICA – Compito B
(Nuovo ordinamento)
16 Giugno 2008
(Bozza di soluzione)

NB. Si consiglia vivamente di ripassare anche argomenti non strettamente inerenti la materia oggetto della prova di esame ma spesso utilizzati nei calcoli: in particolare le operazioni su matrici (moltiplicazione tra matrici, inversa, determinante) e le soluzioni di polinomi del secondo ordine. Si consiglia vivamente di effettuare le operazioni suddette senza l'ausilio della calcolatrice in quanto nei prossimi appelli potrebbe esserne vietato l'uso.

1B) Il sistema è caratterizzato dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = 0$$

e dagli autovalori $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 1$.

Proprietà strutturali

- **Raggiungibilità** – La matrice di raggiungibilità è

$$R = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{singolare}$$

Tramite il test di Hautus

$$\text{rango} \begin{pmatrix} (A - \lambda_1 I) & B \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 1 < 2$$

si nota che la dinamica non raggiungibile è caratterizzata dall'autovalore $\lambda_1 = -2$. In alternativa, si può effettuare la scomposizione rispetto alla raggiungibilità tramite il cambiamento di coordinate

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con il quale si ottiene

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad TB = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad CT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

- **Osservabilità** – La matrice di osservabilità è

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{non singolare}$$

Il sistema è completamente osservabile.

Il sistema è instabile per la presenza dell'autovalore $\lambda_2 = 1$ il quale caratterizza la dinamica del sotto-sistema raggiungibile e osservabile, mentre la dinamica del sotto-sistema non raggiungibile (e osservabile) è caratterizzata dall'autovalore $\lambda_2 = -2$ e quindi tale dinamica, non modificabile, è già stabile asintoticamente. Per la stabilizzazione del sistema si può quindi considerare il solo comportamento ingresso/uscita dato dalla funzione di trasferimento

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{2(s+2)}{(s+2)(s-1)} = \frac{2}{s-1}$$

In uno schema di controllo a retroazione si può verificare se la scelta di un controllore statico $C(s) = K_c$ è sufficiente per stabilizzare il sistema di controllo illustrato in Fig.(1).

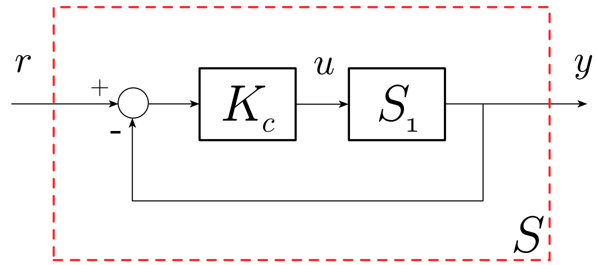

Figure 1: Schema d controllo

Come noto tale retroazione lascerà inalterata la dinamica non raggiungibile (già stabile asintoticamente) mentre il polo del sistema ad anello chiuso sarà dato dalla soluzione di

$$d_{CH}(s) = s - 1 + 2K_c = 0$$

Valori di $K_c > 1/2$ rendono il sistema ad anello chiuso stabile asintoticamente.

2B) Si noti (anche senza l'ausilio della calcolatrice) che

$$s^2 - 20s + 100 = (s - 10)^2$$

e quindi la funzione di trasferimento diventa, in forma canonica di Bode,

$$F(s) = \frac{1000\,K(s+10)}{(s+100)(s-10)^2} = \frac{K(1+s/10)}{(1+s/100)(1-s/10)^2}$$

ed è caratterizzata, per $K = 1$, dalla presenza di soli termini binomi!

I diagrammi di Bode, per $K = 1$, sono riportati in Fig.(2).

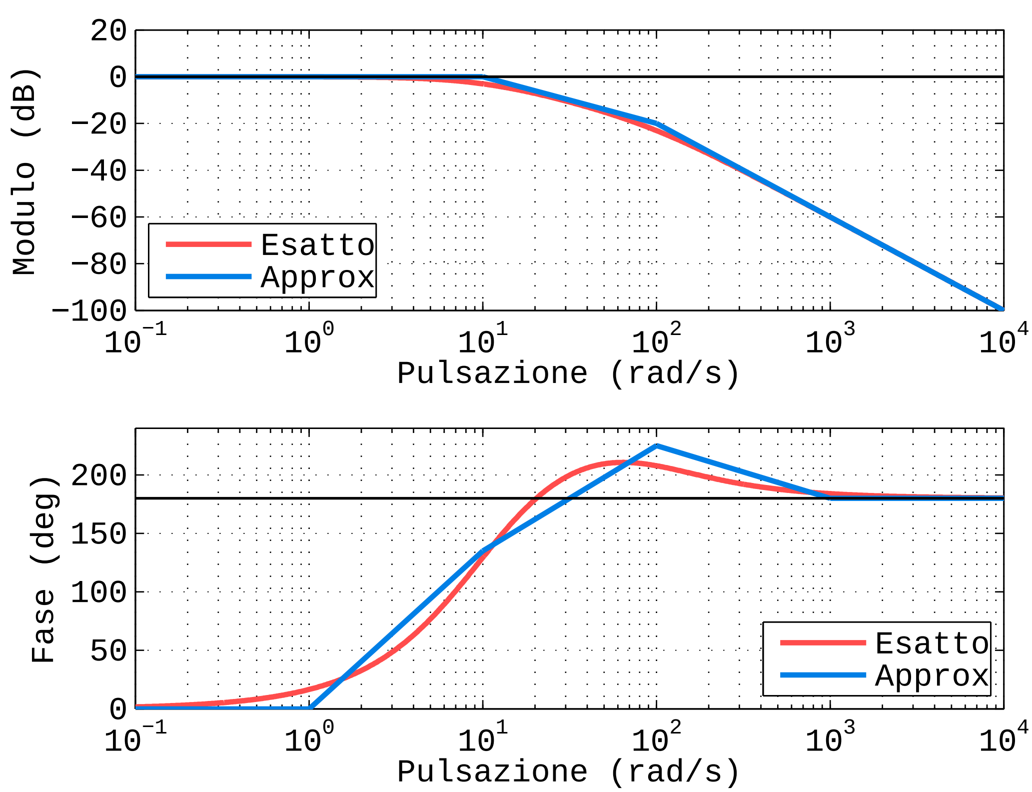

Figure 2: Diagrammi di Bode di $F(j\omega)$

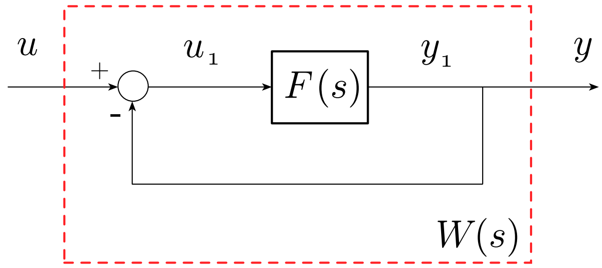

Figure 3: Schema di controllo

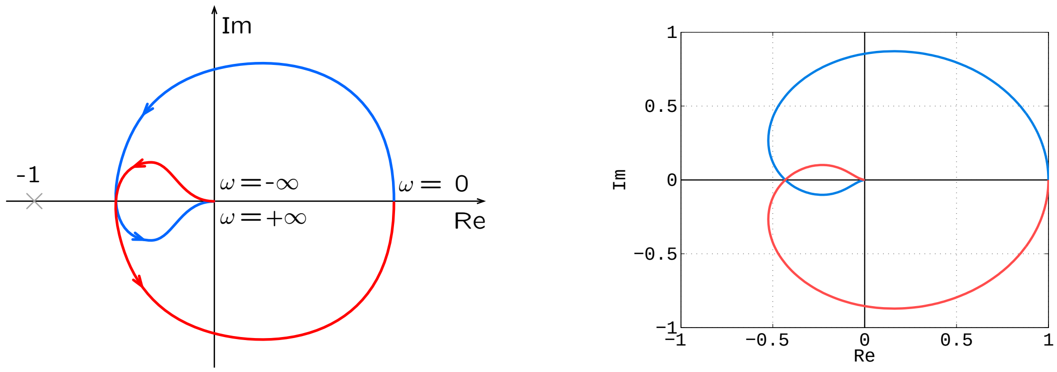

Figure 4: Nyquist "manuale" ed esatto per $K = 1$

Si noti che il numero di poli a parte reale positiva di $F(s)$ è $N_p = 2$. Dai diagrammi di Nyquist riportati in Fig.(4) si deduce che esiste un valore critico di K positivo oltre il quale il diagramma di Nyquist compie $N = 2$ giri (in senso anti-orario) e quindi tale da assicurare ($N_p = N$) la stabilità asintotica del sistema ad anello chiuso. Tale valore è determinabile in forma approssimata dai diagrammi di Bode o in forma esatta applicando il criterio di Routh.

Il denominatore della funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso riportato in Fig.(3)

$$W(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$

è pari a

$$d_{CH}(s) = s^3 + 80s^2 + 100s(10K - 19) + 10000(K + 1)$$

La condizione necessaria affinché tutte le radici (poli del sistema ad anello chiuso) siano a parte reale strettamente minore di zero è

$$K > -1, \qquad K > 1.9$$

e cioè $K > 1.9$. La tabella di Routh è

$$\begin{array}{|cc} 1 & 100(10K-19) \\ 80 & 10000(k+1) \\ 70K-162 & \\ K+1 & \end{array}$$

e quindi la C.N.& S. affinché il sistema ad anello chiuso sia stabile asintoticamente è

$$K > 162/70$$

Per valori di K negativi, il diagramma di Nyquist è ruotato di $-\pi$ (mezzo giro in senso orario) e non compie mai i giri necessari per assicurare la stabilità asintotica del sistema retroazionato.

Si noti che per $K = -1$ il diagramma di Nyquist passa per il punto $(-1, 0)$ (sistema ad anello chiuso non stabile asintoticamente). Per tale valore di K il denominatore di $W(s)$ diventa

$$d_{CH}(s)\big|_{K=-1} = s^3 + 80s^2 - 2900s = (s^2 + 80s - 2900)s$$

ed ha una soluzione (polo) $s = 0$ e una con parte reale maggiore di zero (sistema ad anello chiuso instabile).

3B) Il sistema è caratterizzato dalla terna

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -10.1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0.1 & 1 \end{pmatrix}$$

e dalla funzione di trasferimento

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s + 0.1}{s^2 + 10.1s + 1} = \frac{(s + 0.1)}{(s + 10)(s + 0.1)} = \frac{1}{s + 10}$$

La presenza di un autovalore nascosto in -0.1 (reale negativo) non preclude l'utilizzo della tecnica di sintesi in frequenza. Tale dinamica, stabile asintoticamente, rimane nascosta per il sistema di controllo considerato e quindi non contribuisce alla risposta forzata del sistema di controllo, indipendentemente dall'ingresso preso in esame (riferimento e/o disturbo).

Lo schema di controllo considerato è riportato in Fig.(5)

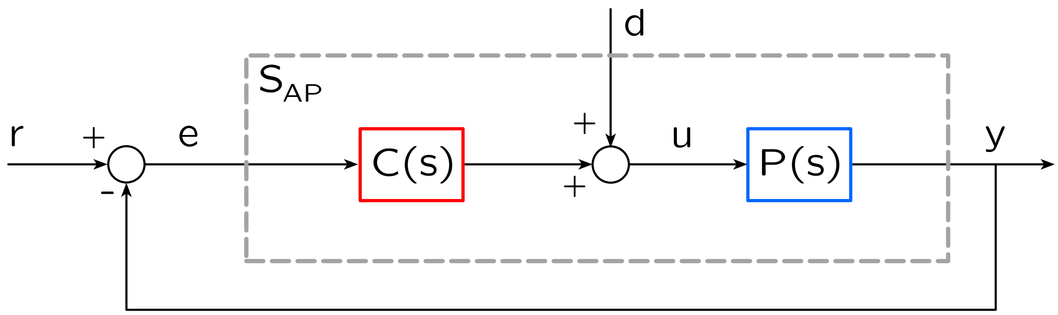

Figure 5: Schema d controllo

Per il soddisfacimento delle specifiche statiche (regime permanente)

- la specifica di astatismo rispetto al disturbo costante agente in ingresso richiede la presenza di un polo in $s = 0$ nel controllore (a monte del punto di ingresso del disturbo in catena diretta);
- la specifica di errore finito in corrispondenza ad un ingresso di riferimento di ordine 1 richiede la presenza, gà assicurata dal punto precedente, di un polo in $s = 0$ in catena diretta e da un valore del guadagno K_pK_c del sistema in catena diretta tale che

$$|e_1| = \frac{1}{|K_cK_p|} \leq \frac{1}{100} \quad \Rightarrow \quad |K_c| \geq 1000$$

Si sceglie $K_c = 1000$.

La struttura necessaria del controllore è

$$\frac{1000}{s}$$

e quindi il "processo modificato" è

$$\widehat{P}(s) = \frac{1000}{s}P(s) = \frac{1000}{s}\frac{1}{s + 10} = \frac{100}{s(1 + s/10)}$$

I diagrammi di Bode di $\widehat{P}(j\omega)$ sono riportati in Fig.(6)

Dall'esame di tali diagrammi si individuano le azioni necessarie

- Anticipo della fase in $\omega_t^* = 100$ rad/sec di almeno 30°
- Amplificazione in $\omega_t^* = 100$ rad/sec di esattamente 20 dB.

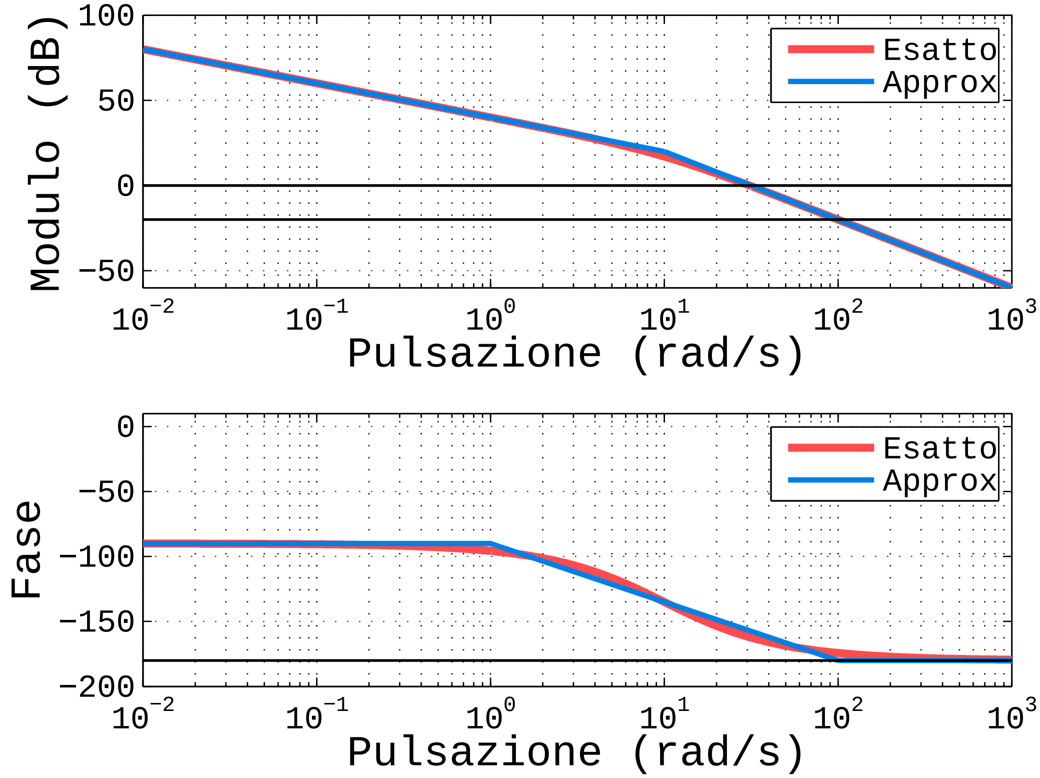

Figure 6: Diagrammi di Bode di $\widehat{P}(j\omega)$

Si può pertanto scegliere una funzione anticipatrice sfruttando anche l'amplificazione da essa fornita (rimanendo comunque nella parte a sinistra della "campana"). Ad esempio $m_a = 4$ fornisce l'anticipo richiesto alla pulsazione normalizzata $\omega\tau = 1$ e un'amplificazione di circa 3 dB. Per ottenere l'effetto desiderato in ω_t^* si sceglie τ_a tale che

$$\omega_t^* \tau_a = 1 \quad \Rightarrow \quad \tau_a = \frac{1}{100}$$

Un ulteriore guadagno K_{c2} tale che $K_{c2}|_{dB} = 17$ dB (maggiore di uno e quindi tale da non alterare il soddisfacimento delle specifiche di regime) fornisce la rimanente amplificazione necessaria $(20\,\mathrm{dB} - 3\,\mathrm{dB})$ e garantisce il soddisfacimento della specifica sulla pulsazione di attraversamento.

La stabilità asintotica del sistema di controllo è garantita dal Teorema di Bode.

Il controllore prescelto è

$$C(s) = \frac{1000}{s}\, K_{c2}\, \frac{1 + \tau_s s}{1 + \tau_a/m_a\, s}, \qquad \text{con} \qquad m_a = 4,\ \tau_a = \frac{1}{100}$$