

Esame di FONDAMENTI di AUTOMATICA – Compito A
(Nuovo ordinamento)
04 Aprile 2006
(Bozza di soluzione)

1A) Innanzi tutto si noti che i due sottosistemi caratterizzati dalle funzioni di trasferimento $G_1(s)$ e $G_2(s)$ sono entrambi del primo ordine (un solo polo–autovalore) e quindi il sistema interconnesso avrà dimensione 2 (dimensione dello spazio di stato). La funzione di trasferimento u/y è data da

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{(2s+2)(s+1)}{(s+10)(s+1) + 2s+2} = \frac{2(s+1)}{s+12}$$

ed è caratterizzata da un solo polo; vi è quindi stata una cancellazione con conseguente perdita di raggiungibilità e/o osservabilità. Per studiare le due proprietà strutturali è quindi necessario individuare le singole rappresentazioni dei sottosistemi e successivamente usare le equazioni di interconnessione per individuare la rappresentazione con lo spazio di stato del sistema interconnesso. A tal fine si noti che, essendo $G_1(s)$ propria, è possibile individuare il legame diretto riscrivendo la funzione di trasferimento come

$$G_1(s) = \frac{2s+2}{s+10} = \frac{-18}{s+10} + 2$$

Si hanno le seguenti possibili realizzazioni (A_1, B_1, C_1, D_1) e (A_2, B_2, C_2, D_2)

$$\begin{aligned} G_1(s) &\Rightarrow \text{stato } x_1 \in \mathbf{R}, & A_1 &= -10, & B_1 &= 1, & C_1 &= -18, & D_1 &= 2 \\ G_2(s) &\Rightarrow \text{stato } x_2 \in \mathbf{R}, & A_2 &= -1, & B_2 &= 1, & C_2 &= 1, & D_2 &= 0 \end{aligned}$$

Utilizzando le equazioni di interconnessione

$$y = y_1 = u_2, \quad u_1 = u - y_2,$$

che caratterizzano il sistema interconnesso considerato, e definendo come vettore di stato

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

si ha la seguente rappresentazione con lo spazio di stato (A, B, C, D) ove

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & -B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 - B_2D_1C_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{pmatrix}, \quad C = (C_1 \quad -D_1C_2), \quad D = D_1$$

e cioè

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -1 \\ -18 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = (-18 \quad -2), \quad D = 2$$

Si noti che, scegliendo diverse rappresentazioni equivalenti dei singoli sistemi, si può ottenere una diversa rappresentazione con lo spazio di stato del sistema interconnesso ma comunque simile (cioè legata a quella qui ottenuta da una matrice T non singolare). Gli autovalori di A sono necessariamente $\lambda_1 = -12$ coincidente con il polo della funzione $G(s)$ e $\lambda_2 = -1$ corrispondente all'autovalore nascosto. Per verifica, la matrice A ha come polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 13\lambda + 12$$

le cui radici sono proprio λ_1 e λ_2 . A questo punto lo studio della raggiungibilità e osservabilità è standard.

La matrice di raggiungibilità

$$\mathcal{R} = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ 2 & -24 \end{pmatrix}$$

è singolare e la sua immagine è generata da

$$\text{Im}(\mathcal{R}) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

e quindi un particolare cambiamento di coordinate T_r che permette di effettuare la scomposizione rispetto alla raggiungibilità è dato da

$$T_r^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad T_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$A_r = T_r A T_r^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui si conclude che il sottosistema raggiungibile è caratterizzato dall'autovalore $\lambda_1 = -12$ mentre quello non raggiungibile da $\lambda_2 = -1$. Si poteva arrivare più direttamente alla stessa conclusione notando che non essendo il sistema completamente raggiungibile (\mathcal{R} singolare) ed essendo l'autovalore $\lambda_1 = -12$ anche polo di $G(s)$, l'autovalore $\lambda_2 = -1$ doveva caratterizzare la dinamica non raggiungibile.

Per quanto riguarda l'osservabilità, essendo la matrice di osservabilità

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -2 \\ 216 & 24 \end{pmatrix}$$

singolare, per le stesse ragioni precedentemente esposte, il sottosistema inosservabile è caratterizzato dall'autovalore $\lambda_2 = -1$. A titolo di conferma, il nucleo di \mathcal{O} è generato da

$$\text{Ker}(\mathcal{O}) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \end{pmatrix} \right\}$$

e quindi un particolare cambiamento di coordinate T_o che permette di effettuare la scomposizione rispetto all'osservabilità è dato da

$$T_o^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad T_o = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$A_o = T_o A T_o^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si noti che la presenza di un legame diretto ingresso/uscita D (che esprime il legame dell'ingresso direttamente con l'uscita) non altera l'analisi delle proprietà strutturali che studiano l'influenza dell'ingresso sullo stato (raggiungibilità) e dello stato sull'uscita (osservabilità).

2A) La stabilità del sistema di controllo è evidente se si considera, ad esempio, il denominatore della funzione di trasferimento riferimento/uscita

$$s(s+1) + 10 = s^2 + s + 10$$

(polinomio del secondo ordine, tutti coefficienti dello stesso ordine = C.N.S. di stabilità asintotica). Per individuare il valore di regime di $\sigma(t)$ è necessario prima calcolare la funzione di trasferimento tra $d(t)$ e $\sigma(t)$ (ponendo $r(t)$ a zero). Lo schema di controllo diventa come in Fig.(1) e quindi può essere ridisegnato come in Fig.(2).

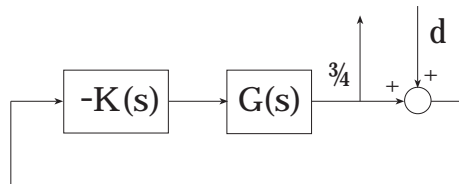


Figure 1: Individuazione della funzione di trasferimento $W_{d\sigma}(s)$, primo passo

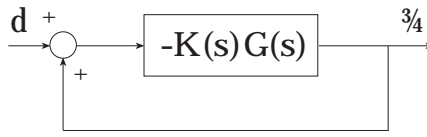


Figure 2: Individuazione della funzione di trasferimento $W_{d\sigma}(s)$, secondo passo

Dallo schema di Fig.(2), notando la reazione positiva, si ha la funzione di trasferimento cercata

$$W_{d\sigma}(s) = \frac{-K(s)G(s)}{1 - (-K(s)G(s))} = \frac{-10}{s(s+1) + 10}$$

Il valore di regime, applicando il teorema del valore finale, corrispondente ad un valore del disturbo costante pari a d è

$$\sigma_{RP} = W_{d\sigma}(0)d = -d$$

L'astatismo del sistema di controllo fa sì che si presenti in ingresso al sommatore, a regime permanente, un segnale tale da annullare il disturbo costante d e pertanto in uscita al sommatore non compare nessun effetto del disturbo.

3A) Il sistema ad anello chiuso è caratterizzato da poli soluzione di

$$p(s) = s(s+1)^2 + K = s^3 + 2s^2 + s + K = 0$$

La condizione necessaria affinché tutte le radici siano a parte reale negativa è

$$K > 0$$

La tabella di Routh è

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 1 \\ & 2 & K \\ & \frac{2-K}{2} & \\ & K & \end{array}$$

e quindi la C.N.S. di stabilità asintotica è

$$0 < K < 2$$

Per applicare il criterio di Nyquist è opportuno prima tracciare i diagrammi di Bode relativi a $F(j\omega)$, ad esempio per $K = 1$. In Fig.(3) vengono riportati gli andamenti, del modulo (in dB) e della fase, esatti e approssimati. Si noti che, in corrispondenza della pulsazione 1 rad/sec, l'andamento della fase ottenuto in modo approssimato coincide con il valore esatto. In effetti 1 rad/sec corrisponde alla pulsazione di rottura del doppio fattore binomio $(1+j\omega)^2$ a denominatore. Si ha quindi, a tale pulsazione, una fase pari a $2 \times -\pi/4 - \pi/2 = -\pi$. Tracciando il corrispondente diagramma di Nyquist basandosi sull'andamento approssimato del modulo, si otterrebbe, per $K = 1$, che tale diagramma passa esattamente per il punto di coordinate $(-1, 0)$ e quindi non si avrebbe stabilità asintotica in apparente contrasto con le conclusioni dell'analisi (esatta) basata sul criterio di Routh. Si noti però che, come ben noto, in corrispondenza della pulsazione di rottura del fattore binomio a denominatore $1 + j\omega$, l'andamento approssimato differisce da quello esatto di esattamente -3 dB. Essendo il fattore binomio doppio, lo scostamento totale è di -6 dB e cioè $1/2$ (non in dB). Ciò significa che il diagramma di Nyquist attraversa il semi-asse reale negativo (a fase $-\pi$) non nel punto $(-1, 0)$ ma in $(-0.5, 0)$. In Fig.(4) vengono riportati gli andamenti approssimato ed esatto del diagramma di Nyquist. Per quanto riguarda la stabilità del sistema a controreazione, essendo il sistema $F(s)$ privo di poli a parte reale positiva ($P_p = 0$), esso è stabile asintoticamente quando il diagramma non compie giri intorno al punto $(-1, 0)$ ($N = 0$). Avendo tracciato il diagramma di Nyquist per $K = 1$, all'aumentare di K prima o poi verranno compiuti giri intorno a $(-1, 0)$. Il margine di guadagno, qui calcolato nel caso $K = 1$, fornisce esattamente questa informazione e vale

$$k_m = \frac{1}{|F(j\omega_\pi)|} = 2, \quad \omega_\pi : \quad \angle F(j\omega_\pi) = -\pi$$

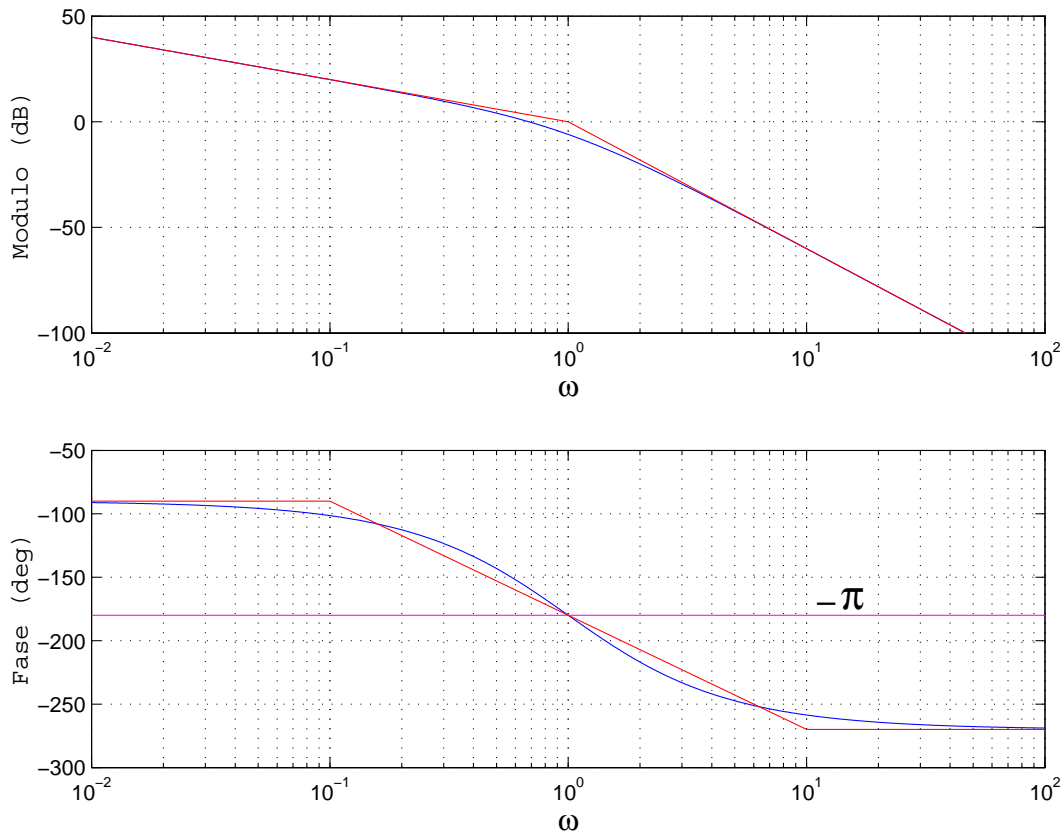


Figure 3: Diagrammi di Bode di $F(j\omega)$ con $K = 1$, approssimati (rosso), esatti (blu)

con $\omega_\pi = 1$ rad/sec. Pertanto il sistema a controreazione unitaria rimane stabile asintoticamente per

$$0 < K < 2$$

coerentemente con l'analisi svolta tramite il criterio di Routh.

4A) Il processo è caratterizzato da un guadagno $K_p = 1/100$ (positivo) ed è privo di poli in $s = 0$. Le specifiche richiedono:

- In corrispondenza ad un ingresso di riferimento canonico di ordine 0, si richiede un errore finito non necessariamente nullo (sistema di Tipo 0). Indicando con K_c il guadagno del controllore $C(s)$ da individuare (avendo scelto un classico schema di controllo a controreazione unitaria), l'errore a regime è pari a

$$|e_0| = \frac{1}{|1 + K_c K_p|}$$

e quindi la specifica è soddisfatta se

$$|1 + K_c K_p| \geq 11 \quad \Rightarrow \quad K_c \geq 1000$$

avendo scelto K_c positivo (per non introdurre un inutile e dannoso ai fini della stabilità sfasamento di $-\pi$ o equivalentemente in modo tale da mantenere il guadagno della funzione d'anello positivo). Si sceglie $K_c = 1000$.

- Dal tracciamento dei diagrammi di Bode di

$$K_c P(s) = 1000 P(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.1s)^2}$$

si nota che in $\omega_t^* = 10$ rad/sec la fase è pari a $-\pi$ mentre il modulo vale, sul diagramma approssimato, 0 dB. Essendo 10 rad/sec la pulsazione di rottura del doppio fattore binomio $(1 + 0.1j\omega)^2$ a denominatore, il modulo in 10 rad/sec vale in realtà -6 dB. Si deve quindi anticipare di almeno 30°

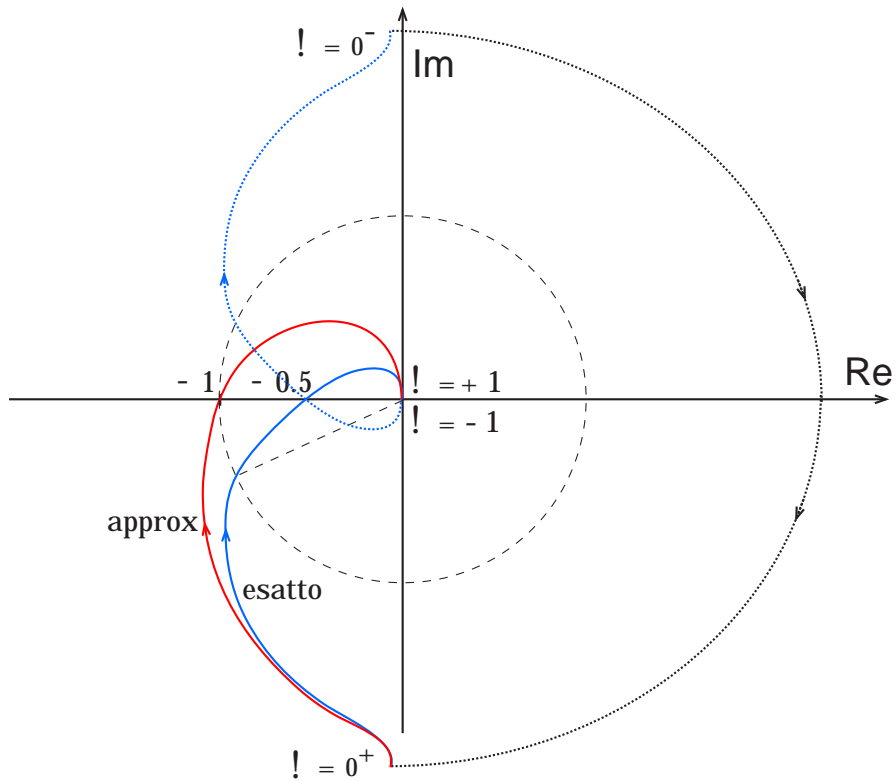


Figure 4: Diagramma di Nyquist di $F(j\omega)$ con $K = 1$, approssimato (rosso), esatto (blu)

e amplificare di 6 dB. Si può, ad esempio, scegliere una funzione anticipatrice $R_a(s)$ con $m_a = 4$ e $\omega\tau = 1$ (con conseguente anticipo di 30° circa e amplificazione di 2.5 dB) e un guadagno (maggiore di 1) pari a $K_{c2}|_{dB} = 6 - 2.5 = 3.5$ dB (pari a circa 1.5 non in dB). La funzione anticipatrice è quindi caratterizzata da $m_a = 4$ e $\tau_a = 1/10$. Sono possibili altre scelte della funzione anticipatrice. L'introduzione del guadagno K_{c2} maggiore di 1 non altera il soddisfacimento delle specifiche di regime; infatti il guadagno del controllore diventa $K_c K_{c2} = 1500$ maggiore del valore minimo 1000 richiesto.

- Il sistema di controllo è stabile asintoticamente in quanto garantito dal teorema di Bode.

Il controllore finale è quindi pari a

$$C(s) = K_c K_{c2} R_a(s) = 1500 \frac{1 + 1/10j\omega}{1 + 1/40j\omega}$$