Esame di FONDAMENTI di AUTOMATICA – Compito A/B
(Nuovo ordinamento)
20 Aprile 2005
(Bozza di soluzione)

NB. Si riportano a grandi linee alcune soluzioni degli esercizi proposti all'esame. Lo svolgimento della prova scritta deve essere più chiara di quanto qui rapidamente accennato.

1A) Il sistema ad anello chiuso è caratterizzato da poli radici del polinomio (denominatore della funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso)

$$d_{ch}(s) = s^3 + (3+K)s^2 + (3-5K)s + (1-50K)$$

Le condizioni necessarie richiedono $K > -3$, $K < 3/5$ e $K < 1/50$. Dalla costruzione della tabella di Routh deve essere positivo il polinomio

$$-5K^2 + 38K + 8$$

il quale ha radici

$$K_1 = \frac{-19 + \sqrt{19^2 + 40}}{-5} \approx -0.205, \quad K_2 = \frac{-19 - \sqrt{19^2 + 40}}{-5} \approx 7.805$$

ed è positivo per $K_1 < K < K_2$. In conclusione il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente se e solo se

$$K_1 < K < 1/50$$

3B) Si ha

$$d_{ch}(s) = s^3 + (3+K)s^2 + (3+9K)s + (1-10K)$$

Le condizioni necessarie sono $K > -3$, $K > -1/3$ e $K < 1/10$. Inoltre dalla tabella di Routh deve essere positivo il polinomio

$$9K^2 + 40K + 8$$

il quale ha radici

$$K_1 = \frac{-20 - \sqrt{20^2 - 72}}{9} \approx -4.2345, \quad K_2 = \frac{-20 + \sqrt{20^2 - 72}}{9} \approx -0.2099$$

ed è positivo per $K < K_1$ e $K > K_2$. In conclusione il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente se e solo se

$$K_2 < K < 1/10$$

2A) Una possibile scelta dello stato del sistema interconnesso è

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

e pertanto, con le equazioni di interconnessione $u = u_1$, $u_2 = y_1$ e $y = y_2$, S avrà la seguente rappresentazione con lo spazio di stato

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{pmatrix} u, \qquad y = \begin{pmatrix} 0 & C_2 \end{pmatrix} x$$

Essendo $A_1 = -1$, $B_1 = 1$, $C_1 = -2$, $D_1 = 1$, $A_2 = 1$, $B_2 = 1$ e $C_2 = 1$ si hanno le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La funzione di trasferimento di una serie di sistemi è data dal prodotto delle singole funzioni di trasferimento

$$F_1(s) = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 + D_1 = \frac{s-1}{s+1}, \quad F_2(s) = C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 = \frac{1}{s-1}$$

e quindi

$$F(s) = \frac{1}{s-1}\frac{s-1}{s+1} = \frac{1}{s+1}$$

(si noti la semplificazione dell'autovalore in $+1$). Le matrici di raggiungibilità e osservabilità sono rispettivamente

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si noti che $\mathcal{R}$ è singolare (e ha rango 1) mentre $\mathcal{O}$ ha rango pieno (non singolare). I sistema interconnesso risulta quindi osservabile e non completamente raggiungibile (la dinamica del sotto-sistema non raggiungibile è evidentemente caratterizzata dall'autovalore $+1$ cancellato nella funzione di trasferimento $F(s)$). Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = +1$ (unione degli autovalori dei due sotto-sistemi S_1 e S_2), S è instabile e i modi naturali sono $e^{\lambda_1}t$ e $e^{\lambda_2}t$.

4B) Una possibile scelta dello stato del sistema interconnesso è

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

e pertanto, con le equazioni di interconnessione $u = u_1$, $u_2 = y_1$ e $y = y_2$, S avrà la seguente rappresentazione con lo spazio di stato

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \qquad y = \begin{pmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{pmatrix} x$$

Essendo $A_1 = 1$, $B_1 = 1$, $C_1 = 1$, $A_2 = -1$, $B_2 = 1$, $C_2 = -2$ e $D_2 = 1$, si hanno le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La funzione di trasferimento di una serie di sistemi è data dal prodotto delle singole funzioni di trasferimento

$$F_1(s) = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 = \frac{1}{s-1}, \quad F_2(s) = C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 + D_2 = \frac{s-1}{s+1}$$

e quindi

$$F(s) = \frac{s-1}{s+1}\frac{1}{s-1} = \frac{1}{s+1}$$

(si noti la semplificazione dell'autovalore in $+1$). Le matrici di raggiungibilità e osservabilità sono rispettivamente

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si noti che $\mathcal{R}$ è no singolare mentre $\mathcal{O}$ ha rango 1 (singolare). I sistema interconnesso risulta quindi non osservabile e completamente raggiungibile (la dinamica del sotto-sistema inosservabile è evidentemente caratterizzata dall'autovalore $+1$ cancellato nella funzione di trasferimento $F(s)$). Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = +1$ (unione degli autovalori dei due sotto-sistemi S_1 e S_2), S è instabile e i modi naturali sono $e^{\lambda_1}t$ e $e^{\lambda_2}t$.

3A) Il diagramma di Nyquist corrispondente, riportato in Fig.1 in forma approssimata, non presenta giri intorno al punto di coordinate $(-1, 0)$ e quindi $N = 0$. Il sistema ad anello aperto $F(s)$ non ha poli a parte reale positiva (e quindi $N = +1$), il criterio di Nyquist $N = N_p$ è quindi soddisfatto e il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente.

1B) L'andamento del diagramma di Nyquist è simile a quello riportato in Fig.1 con la pulsazione 10rad/sec al posto di 1rad/sec. Le conclusioni sono identiche.

4A - 2B) Il processo è caratterizzato da un guadagno $K_p = -1$ (negativo) ed è privo di poli in $s = 0$. Le specifiche richiedono:

- Astatismo rispetto ad un disturbo costante in uscita al processo, devo inserire un polo in $s = 0$ nel controllore.

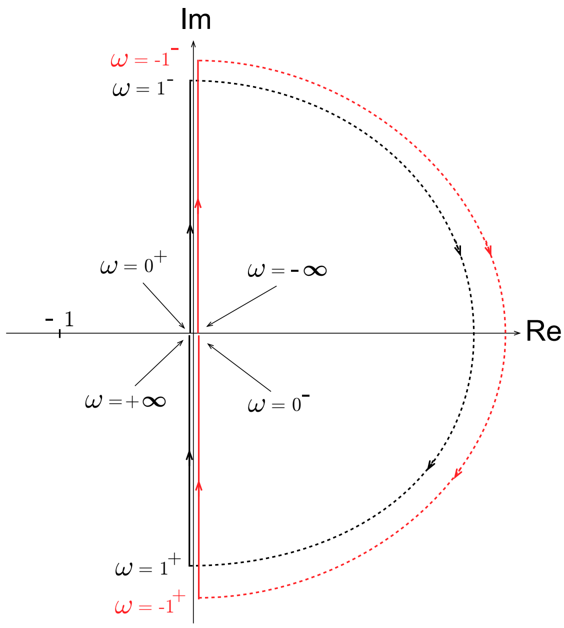

Figure 1: Diagramma di Nyquist

- Essendo il sistema lineare, se in corrispondenza ad un riferimento $2t\delta_{-1}(t)$ desidero ottenere a regime un errore in modulo inferiore a 0.02, ciò equivale a richiedere che per un ingresso di ordine 1 ($r(t) = t\delta_{-1}(t)$) l'errore a regime sia in modulo inferiore a 0.01 o (essendo il sistema già di tipo 1 per l'introduzione del polo nell'origine) $|K_c K_p| \geq 100$. Scelgo $K_c = -100$ (negativo in modo tale da ottenere in catena diretta un guadagno positivo).
- Dal tracciamento dei diagrammi di Bode di

$$\frac{-100}{s}P(s) = \frac{100}{s}\frac{1}{(1+0.1s)}$$

noto che in $\omega_t^* = 10$rad/sec ho un modulo pari a 20dB (in realtà 17dB) e una fase pari a $-3/4\pi$ circa. Devo attenuare di 20dB (o meglio di 17dB) senza alterare troppo la fase (posso ritardare al massimo di 45 - 35 = 10°). Scelgo una funzione attenuatrice che mi attenui di 17dB, con ad esempio $m_i = 7$ e $\omega\tau = 80$ (con conseguente ritardo di 4° circa). Per ottenere tale effetto in $\omega_t^* = 10$rad/sec deve essere $\omega_t^* \tau_i = 80$ da cui $\tau_i = 80/10$.

- Il sistema di controllo è stabile asintoticamente in quanto garantito dal teorema di Bode.

Un possibile controllore è quindi dato da

$$C(s) = \frac{K_c}{s}R_i(s) = \frac{K_c}{s}\left(\frac{1+\frac{\tau_i}{m_i}s}{1+\tau_i s}\right)$$

La funzione di trasferimento del disturbo (sulla catena di reazione)/uscita controllata è

$$W_{ny}(s) = -\frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} = -W_{ry}(s)$$

e ha lo stesso modulo della risposta armonica riferimento/uscita controllata. Avendo ottenuto una pulsazione di attraversamento pari a $\omega_t^* = 10$rad/sec e ricordando il legame approssimativo con la banda passante del sistema ad anello chiuso, si può concludere che la banda passante di $W_{ny}(s)$ sarà prossima a $\omega_t^* = 10$. Il segnale di disturbo, agente ad una pulsazione maggiore verrà sicuramente attenuato.

5) Vedi teoria.

6) Vedi teoria.