Esame di FONDAMENTI di AUTOMATICA
(Nuovo ordinamento)
13 Aprile 2004
(Bozza di soluzione)

NB. Si riportano a grandi linee alcune soluzioni degli esercizi proposti all'esame. Lo svolgimento della prova scritta deve essere più chiara di quanto qui rapidamente accennato.

1) Il disturbo $d(t)$ agisce in ingresso al processo e quindi il polo in $s = 0$ non rende astatico il sistema di controllo a controreazione.

- Ingresso di ordine 2, richiesta di errore a regime permanente finito $\Rightarrow$ sistema di controllo deve essere di tipo 2 e il sistema in catena diretta (controllore $C(s)$ in serie con il processo $P(s)$) deve avere un guadagno opportuno. Per avere un sistema di controlo di tipo 2 il sistema in catena diretta deve contenere 2 poli in $s = 0$. Un polo in $s = 0$ già presente nel processo, il controllore ne deve contenere uno solo. Guadagno del processo $K_p = -5/100$ (negativo), specifica soddisfatta se $e_2 = 1/|K_c K_p| \leq 1/(100\sqrt{10})$. Per rendere il guadagno del sistema in catena diretta positivo, si sceglie $K_c = -10000\sqrt{10}/5$. Si noti che

$$(100\sqrt{10})|_{dB} = (100)|_{dB} + (\sqrt{10})|_{dB} = 40dB + 10dB = 50dB$$

- Polo aggiuntivo, per specifica precedente, in $s = 0$ rende il sistema di controllo astatico rispetto a $d(t)$ costante.
- Dal tracciamento del diagramma di Bode di $K_c P(s)/s$ risulta che devo attenuare di 10dB e anticipare di almeno 30° in $\omega_t^* = 10$rad/sec. Devo utilizzare sia una funzione anticipatrice (anticipo di fase ma amplificazione del modulo) che una funzione attenuatrice (attenuazione del modulo ma ritardo di fase). Ad esempio, scegliendo una funzione anticipatrice $R_a(s)$ con $m_a = 10$ e $\omega\tau_a = 0.8$ ottengo un anticipo (maggiore del richiesto ma cautelativo rispetto al futuro ritardo di fase introdotto dalla funzione attenuatrice) di 34° e un'amplificazione di circa 2dB. Con la funzione attenuatrice $R_i(s)$ caratterizzata da $m_i = 4$ e $\omega\tau_i = 70$ ottengo 12dB di attenuazione e un ritardo di circa 4°. Volendo ottenere gli effetti precedenti in $\omega_t^* = 10$rad/sec, si ha $\tau_a = 0.8/10$ e $\tau_i = 70/10$. Il sistema di controllo è stabile asintoticamente in quanto garantito dal teorema di Bode.

Il controllore finale, nello schema di controllo a controreazione unitaria, é

$$C(s) = \frac{K_c}{s} R_a(s) R_i(s)$$

2) Applico il criterio di Routh al denominatore della funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso

$$p(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + s(K + 1) + 2K$$

La C.N. richiede $K > 0$ (e $K > -1$). Dalla costruzione della tabella di Routh, affinché tutti gli elementi della prima colonna abbiano lo stesso segno deve essere inoltre $K < 8$ e $-K^2 - 11K + 8 > 0$. Quest'ultima condizione richiede, per $K > 0$, che sia

$$K < \frac{11 - \sqrt{153}}{-2} = 0.68465$$

Pertanto il sistema ad anello chiuso sarà stabile asintoticamente per $0 < K < 0.68465$.

3) Il diagramma di Nyquist, in forma approssimata, è riportato in Fig.1. Dal diagramma di Bode si deduce che il diagramma di Nyquist interseca il semi-asse reale negativo a destra del punto di coordinate $(-1, 0)$. Essendo il sistema ad anello aperto privo di poli a parte reale positiva ed essendo il numero di giri del diagramma di Nyquist intorno al punto di coordinate $(-1, 0)$ pari a 0, il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente.

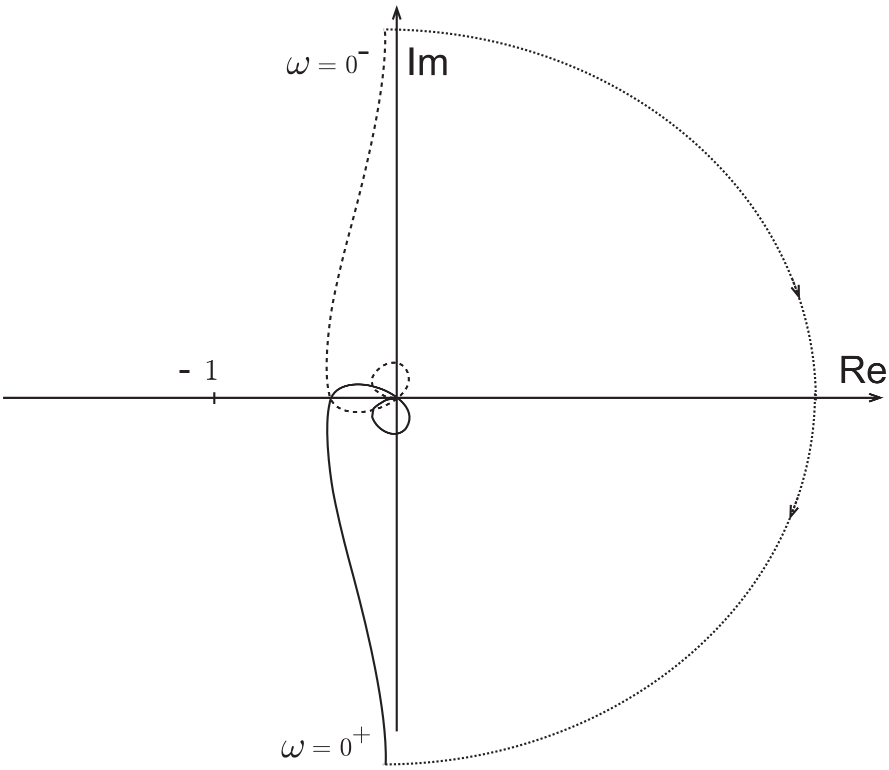

Figure 1: Diagramma di Nyquist

4) La funzione di trasferimento del disturbo (disturbo–uscita) è

$$W_d(s) = \frac{P(s)}{1 + KP(s)} = \frac{1}{s^2 + s + K} = \frac{1}{K}\frac{1}{\left(1 + \frac{s}{K} + \frac{s^2}{K}\right)}$$

Il guadagno diminuisce all'aumentare di K. Si noti che i poli sono reali per $K \leq 1/4$ (fattori binomi) mentre diventano complessi per $K > 1/4$ (fattore trinomio). Nel caso $K > 1/4$, all'aumentare di K, essendo $\omega_n^2 = K$, la pulsazione naturale aumenta, mentre $\zeta = 1/(2\sqrt{K})$ diminuisce. Per illustrare l'effetto a regime permanente del disturbo $d(t) = \sin t$ sull'uscita controllata al variare di K positivo si possono tracciare diversi diagrammi qualitativi del modulo di $W_d(j\omega)$ ed evidenziare i diversi valori a $\omega = 1$ rad/sec. L'andamento di $|W_d(j\omega)|$ in funzione di K positivo è riportato in Fig.2.

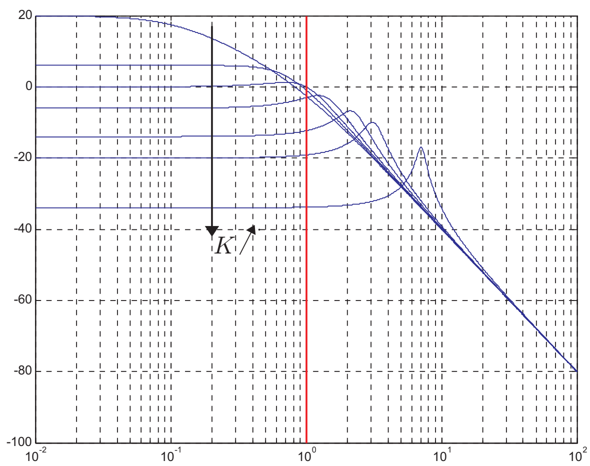

Figure 2: $|W_d(j\omega)|_{dB}$ all'aumentare di K positivo

Si ricorda che la risposta a regime permanente è

$$y_{RP}(t) = |W_d(j)| \sin(t + \angle W_d(j))$$

In alternativa si può calcolare esplicitamente $|W_d(j)|$. Essendo

$$W_d(j) = \frac{1}{-1+j+K} = \frac{K-1-j}{(K-1-j)(K-1+j)} = \frac{K-1-j}{(K-1)^2+1}$$

si ha

$$|W_d(j)| = \frac{1}{\sqrt{(K-1)^2+1}}$$

e quindi per K positivo piccolo il modulo vale all'incirca $1/\sqrt{2}$, aumenta fino a $K=1$ (il modulo vale 1) e diminuisce fino a zero per $K \gg 1$. L'andamento di $|W_d(j)|$ in funzione di K positivo è riportato in Fig.3.

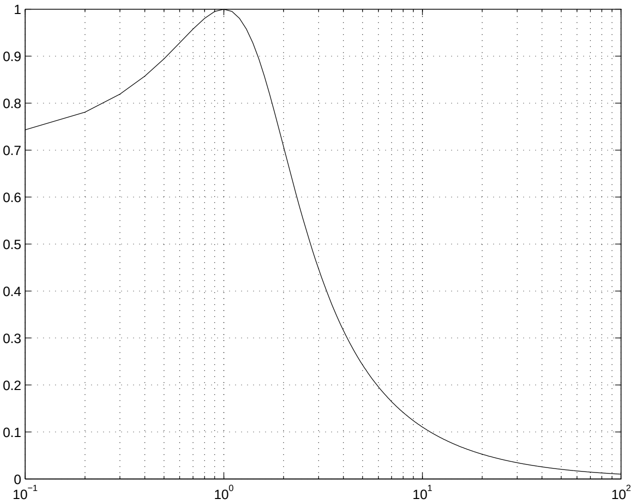

Figure 3: $|W_d(j)|$ in funzione di K positivo in scala logaritmica

5) Il modello matematico del pendolo è riportato sul libro. Con l'ingresso costante applicato si individuano i punti di equilibrio, si linearizza e si stabilizza il sistema linearizzato.

6) La struttura diagonale a blocchi rende immediata l'individuazione degli autovalori della matrice i quali risultano essere $\lambda_1 = 2j$, $\lambda_2 = \lambda_1^* = -2j$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = -1$. Gli autovalori a parte reale nulla sono tutti a molteplicità algebrica unitaria, non esistono autovalori a parte reale positiva, il sistema è stabile semplicemente. Per i modi naturali vedi teoria.