Esame di FONDAMENTI di AUTOMATICA
(Nuovo ordinamento)
11 Settembre 2003
(Bozza di soluzione)

NB. Si riportano a grandi linee alcune soluzioni degli esercizi proposti all'esame. Lo svolgimento della prova scritta deve essere più chiara di quanto qui rapidamente accennato.

1) Le specifiche richiedono:

- Ingresso di ordine 1, richiesta di errore a regime permanente finito $\Rightarrow$ sistema di controllo deve essere di tipo 1; il sistema in catena diretta (controllore $C(s)$ in serie con il processo $P(s)$) deve avere un polo in $s = 0$ e un guadagno opportuno. Guadagno del processo $K_p = -1$, (negativo), specifica soddisfatta se $e_1 = 1/|K_c K_p| \leq 0.1$ e cioè se $K_c \leq -10$ o $K_c \geq 10$. Scelgo $K_c = -10$ per rendere il guadagno del sistema in catena diretta positivo.

- La presenza del polo in $s = 0$ introdotto per il soddisfacimento della specifica precedente garantisce l'astatismo.

- Dal tracciamento del diagramma di Bode di $K_c P(s)/s$ risulta che in $\omega_t^* = 1$rad/sec ho un modulo pari a 20dB e una fase pari a $-\pi$. Si deve anticipare di almeno 30° e attenuare di 20dB. Devo utilizzare sia una funzione anticipatrice (anticipo di fase ma amplificazione del modulo) che una funzione attenuatrice (attenuazione del modulo ma ritardo di fase). Ad esempio, scegliendo una funzione anticipatrice $R_a(s)$ con $m_a = 14$ e $\omega\tau_a = 0.9$ ottengo un anticipo di circa 38° (maggiore del richiesto ma cautelativo rispetto al futuro ritardo di fase introdotto dalla funzione attenuatrice) e un'amplificazione di circa 2.5dB. Con la funzione attenuatrice $R_i(s)$ caratterizzata da $m_i = 13$ (anche se non riportata sui diagrammi universali, interpolo) e $\omega\tau_i = 100$ ottengo 22.5dB di attenuazione e un ritardo di circa 7°. Volendo ottenere gli effetti precedenti in $\omega_t^* = 1$rad/sec, si ha $\tau_a = 0.9/1$ e $\tau_i = 100/1$. Il sistema di controllo è stabile asintoticamente in quanto garantito dal teorema di Bode.

Il controllore finale, nello schema di controllo a controreazione unitaria, è

$$C(s) = \frac{K_c}{s} R_a(s) R_i(s) = \frac{-10}{s} \left(\frac{1 + \tau_a s}{1 + \frac{\tau_a}{m_a} s} \right) \left(\frac{1 + \frac{\tau_i}{m_i} s}{1 + \tau_i s} \right)$$

Il diagramma di Nyquist esatto (senza la chiusura all'infinito) è riportato in Fig.1. Un tracciamento approssimato deve mettere in evidenza il margine di fase ottenuto e la chiusura all'infinito.

La funzione di trasferimento disturbo (in uscita)/uscita è pari a

$$W_d(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)} = \cdots$$

2) Il polinomio caratteristico di A è pari a

$$p_A(s) = \det(\lambda I - A) = \det \left\{ \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ 1 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \right\} = \lambda^2 - 1$$

e quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. La presenza di un autovalore a parte reale positiva (λ_1) rende il sistema instabile. I modi naturali, aperiodici, sono $e^{\lambda_1 t} = e^t$ e $e^{\lambda_2 t} = e^{-t}$. Le condizioni iniziali appartenenti al sottospazio vettoriale generato dall'autovettore u_2 corrispondente a $\lambda_2 = -1$ danno luogo a evoluzioni libere, nello stato, che tendono a zero esponenzialmente. L'autovettore (non nullo) u_2 è tale da verificare la relazione

$$(A - \lambda_2 I)u_2 = 0 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2a} \\ u_{2b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e pertanto un possibile u_2 è dato da

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

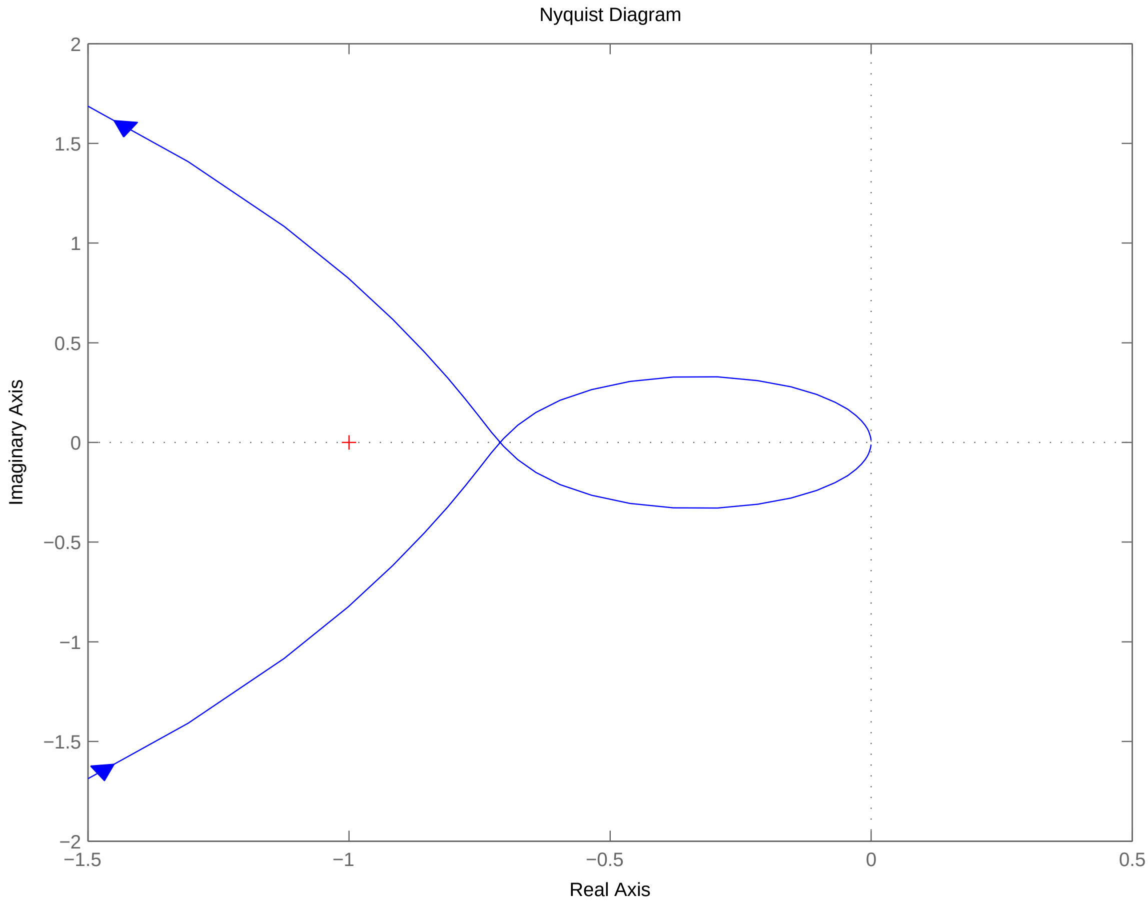

Figure 1: Dettaglio del diagramma di Nyquist

Una qualsiasi condizione iniziale parallela a u_2 risolve il problema

$$x_0 = \alpha u_2$$

3) Vedi teoria

4) Il denominatore della funzione di trasferimento del sistema controreazionato è

$$p(s) = s^2(s+p) + (s+1) = s^3 + s^2 p + s + 1$$

Applicando il criterio di Routh, la condizione necessaria richiede $p > 0$. Dalla tabella di Routh si ha la seguente ulteriore condizione $p > 1$. In conclusione, il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente se e solo se

$$p > 1$$