

**Analisi delle prestazioni:
Funzioni di sensitività**

L. Lanari

Dipartimento di Ingegneria Informatica
Automatica e Gestionale “Antonio Ruberti”

Università di Roma “La Sapienza”

Argomenti

- Prestazioni
- Compromesso tra le specifiche richieste
- Funzione di sensitività
- Funzione di sensitività complementare
- Funzione di sensitività del controllo

Generalità – Le funzioni di sensitività

Si consideri il generico schema di controllo a controreazione rappresentato in figura

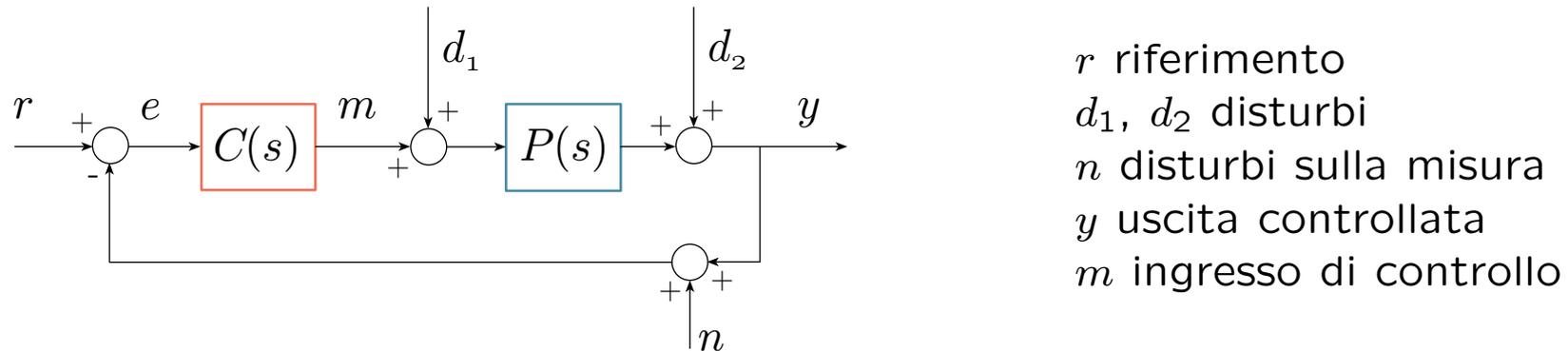


Fig. 1 – Generico sistema di controllo a controreazione a 1 grado di libertà (1 DoF)

Il sistema di controllo ha come ingressi d_1 , d_2 , n e r mentre possono essere considerate grandezze di particolare interesse le variabili y , e e m (influenzate da tutti gli ingressi).

Il principio di sovrapposizione degli effetti ci permette di considerare separatamente i contributi delle singole cause (r , d_1 , d_2 e n) alle diverse uscite di interesse (y , m , e) dando luogo a 12 funzioni di trasferimento.

$$\begin{aligned}y(s) &= W_{r,y}(s)r(s) + W_{d_1,y}(s)d_1(s) + W_{d_2,y}(s)d_2(s) + W_{n,y}(s)n(s) \\m(s) &= W_{r,m}(s)r(s) + W_{d_1,m}(s)d_1(s) + W_{d_2,m}(s)d_2(s) + W_{n,m}(s)n(s) \\e(s) &= W_{r,e}(s)r(s) + W_{d_1,e}(s)d_1(s) + W_{d_2,e}(s)d_2(s) + W_{n,e}(s)n(s)\end{aligned}$$

Generalità – Le funzioni di sensitività

Alcune delle funzioni di trasferimento precedenti hanno espressioni simili, ed in particolare

$$\begin{aligned}W_{r,y}(s) = -W_{n,y}(s) = -W_{d_1,m}(s) &= \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} \triangleq L(s) \\W_{r,e}(s) = W_{d_2,y}(s) = -W_{n,e}(s) &= \frac{1}{1 + C(s)P(s)} \triangleq S(s) \\W_{r,m}(s) = -W_{d_2,m}(s) = -W_{n,m}(s) &= \frac{C(s)}{1 + C(s)P(s)} \triangleq S_u(s)\end{aligned}$$

Le varie funzioni $S(s)$, $L(s)$ e $S_u(s)$ vengono rispettivamente chiamate

- $S(s)$ – Funzione di sensitività
- $L(s)$ – Funzione di sensitività complementare
- $S_u(s)$ – Funzione di sensitività del controllo

Nello schema di controllo precedentemente riportato (1 DoF)*, appare immediato che con la sola scelta del controllore $C(s)$, sarà difficile, se non impossibile, imporre contemporaneamente comportamenti desiderati sui vari canali ingressi/uscite.

*Nota: esistono schemi di controllo a più gradi di libertà e altre funzioni di sensitività ma i concetti di base qui esposti continuano a valere.

Generalità – Le funzioni di sensitività

Hyp. Sistema di controllo stabile asintoticamente

Dalle espressioni di L e S si nota che vale sempre la relazione algebrica

$$L(s) + S(s) = 1$$

Att. relazione in s non implica relazione in modulo* $|L(j\omega)| + |S(j\omega)| = 1$

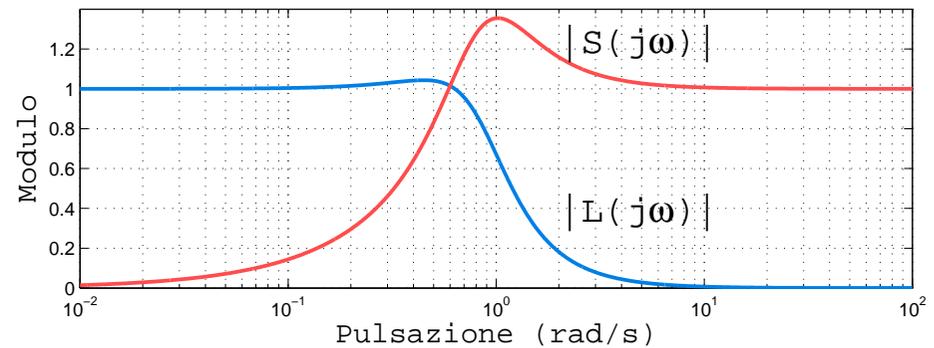
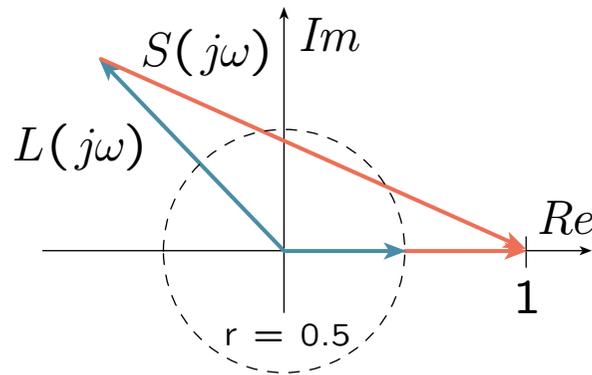


Fig. 2 – Andamento reale di $|S(j\omega)|$ e $|L(j\omega)|$

Obiettivi ideali:

- l'uscita controllata riproduce fedelmente il riferimento $W_{r,y} \equiv 1 \Rightarrow L(s) = 1$;
- l'uscita controllata non dipende dai disturbi $\begin{cases} W_{d_2,y} \equiv 0 \Rightarrow S(s) = 0 \\ W_{d_1,y} \equiv 0 \Rightarrow P(s)S(s) = 0 \Rightarrow S(s) = 0 \\ W_{n,y} \equiv 0 \Rightarrow L(s) = 0 \end{cases}$

*Si può invece dire che ad ogni pulsazione o $|L(j\omega)|$ o $|S(j\omega)|$ vale almeno 0.5 e inoltre che possono differire, alla medesima pulsazione, al più di 1.

Generalità – Le funzioni di sensitività

Dalle semplici osservazioni precedenti risulta già ovvio come non sia possibile soddisfare, in uno schema di controllo a controreazione, le specifiche ideali.

Sarà quindi necessario raggiungere un **compromesso** tra le diverse esigenze.

Ad esempio, notando che i vari segnali in ingresso al sistema di controllo possono avere componenti significative in bande diverse di frequenze, tipicamente

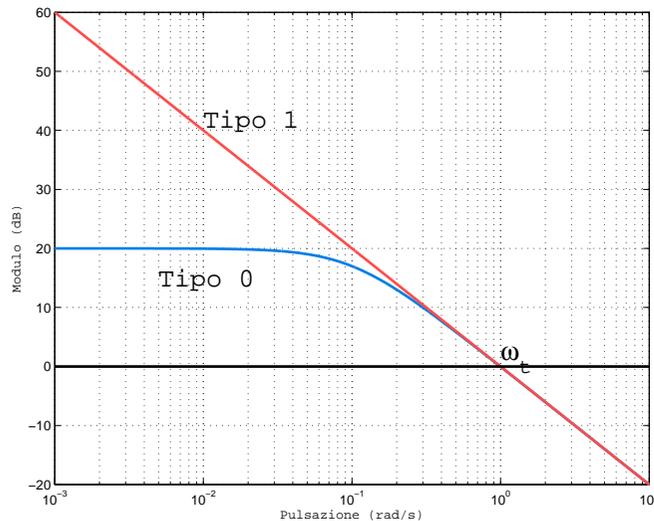
- r , d_1 e d_2 bassa frequenza
- n alta frequenza

si può, in questo caso, ottenere un giusto compromesso

- a bassa frequenza $|L(j\omega)| \approx 1$ e $|S(j\omega)| \approx 0$
- ad alta frequenza $|L(j\omega)| \approx 0$ e $|S(j\omega)| \approx 1$

Si noti invece come, nel caso ad esempio di disturbo costante sul ramo di reazione, una specifica di astatismo rispetto a tale disturbo, $L(0) = 0$, sia incompatibile con una specifica di errore a regime permanente nullo per un riferimento costante $S(0) = 0$ (e quindi $L(0) = 1$ – guadagno unitario riferimento/uscita).

Funzione d'anello $F(s) = C(s)P(s)$



Per $\omega \rightarrow 0$ in generale si ha $|F(j\omega)|$ elevato:

dalle specifiche a regime permanente

– su riferimenti di tipo polinomiale

– su disturbi d_2 di tipo sinusoidale a bassa frequenza

Ad esempio:

S_{ch} di Tipo 0, e_0 piccolo \Rightarrow guadagno di F elevato

S_{ch} di Tipo k , $k \geq 1$, $|F(j\omega)|$ elevato a basse frequenze per la presenza di uno o più poli in $s = 0$

Fig. 3 – Andamenti tipici del modulo della funzione d'anello $|F(j\omega)|_{dB}$

Inoltre se $P(s)$ è strettamente propria e $C(s)$ al più propria, allora $F(s)$ è strettamente propria e $L(s)$ è strettamente propria mentre $S(s)$ è propria.

Se $L(s)$ è strettamente propria non può essere sempre uguale a 1.

Hyp. $F(s)$ priva di poli a parte reale positiva e una sola pulsazione di attraversamento

Approssimazione:

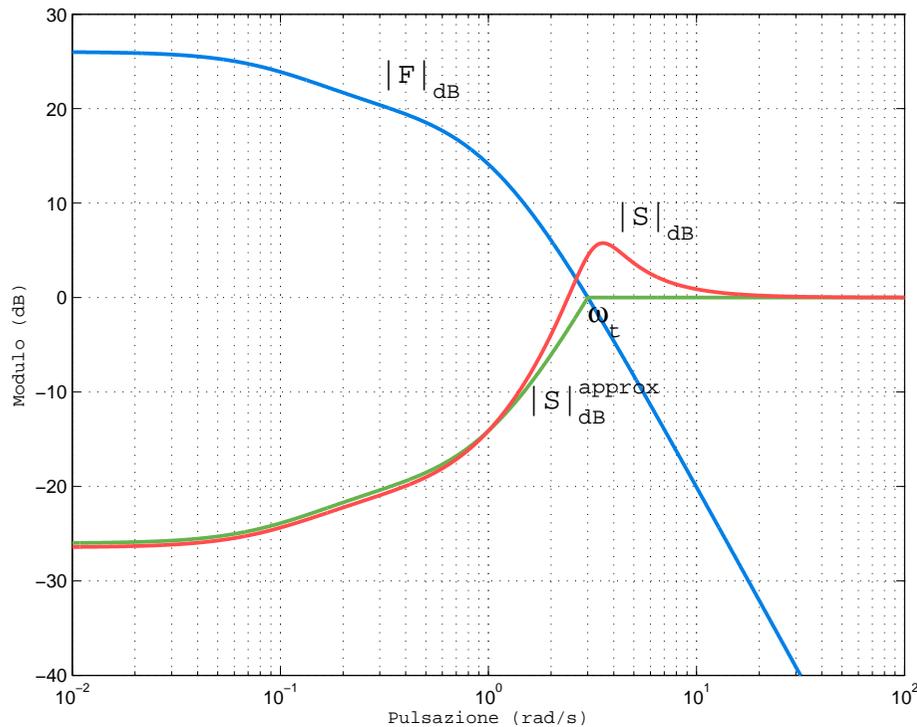
$$|1 + F(j\omega)| \approx \begin{cases} |F(j\omega)| & \text{se } \omega \leq \omega_t \\ 1 & \text{se } \omega > \omega_t \end{cases}$$

tanto peggiore quanto $|F(j\omega)| \approx 1$ (e quindi in prossimità di ω_t).

Funzione di sensitività $S(s)$

Approssimazione $|S(j\omega)|_{dB}$

$$|S(j\omega)|^{approx} = \frac{1}{|1 + F(j\omega)|} \approx \begin{cases} \frac{1}{|F(j\omega)|} & \text{se } \omega \leq \omega_t \\ 1 & \text{se } \omega > \omega_t \end{cases}$$



- $|F(j\omega)|_{dB}$
- $|S(j\omega)|_{dB}^{approx}$ approssimato
- $|S(j\omega)|_{dB}$ esatto

Fig. 4 – Andamenti tipici di $|F(j\omega)|_{dB}$, $|S(j\omega)|_{dB}$ e $|S(j\omega)|_{dB}^{approx}$

Si noti come l'approssimazione peggiora in prossimità della pulsazione di attraversamento.

Il sistema di controllo si comporta, rispetto a disturbi in uscita d_2 , come un **filtro passa-alto**.

Funzione di sensitività $S(s)$

Si possono formulare delle specifiche di regime permanente, ad esempio rispetto al segnale di riferimento $r(t)$. Si suppone che il segnale di riferimento abbia un contenuto armonico $|r(j\omega)|$ apprezzabile fino a pulsazione ω_1 .

Le capacità di inseguimento della risposta in uscita possono essere valutate attraverso l'ampiezza dell'errore. Se ad esempio si richiede che tale errore, in modulo, debba risultare inferiore al valore limite e_0 per tutte le sinusoidi con pulsazioni $\omega \in [0, \omega_1]$ e ampiezza $|r(j\omega)|$, si ha dalla relazione

$$e(j\omega) = \frac{1}{1 + F(j\omega)} r(j\omega) = S(j\omega) r(j\omega)$$

la condizione $|e(j\omega)| = |S(j\omega)| |r(j\omega)| \leq e_0$.

Al fine di normalizzare la condizione – senza quindi ogni volta dover specificare lo spettro di r e e_0 – si definisce la funzione reale $R(\omega) = |r(j\omega)|/e_0$. La specifica diventa

$$|S(j\omega)| R(\omega) \leq 1, \quad \forall \omega \in [0, \omega_1]$$

In altri termini si richiede, nel campo di pulsazioni di interesse, un modulo della funzione di sensitività basso a cui corrisponde la specifica, in termini della funzione d'anello $F(s)$,

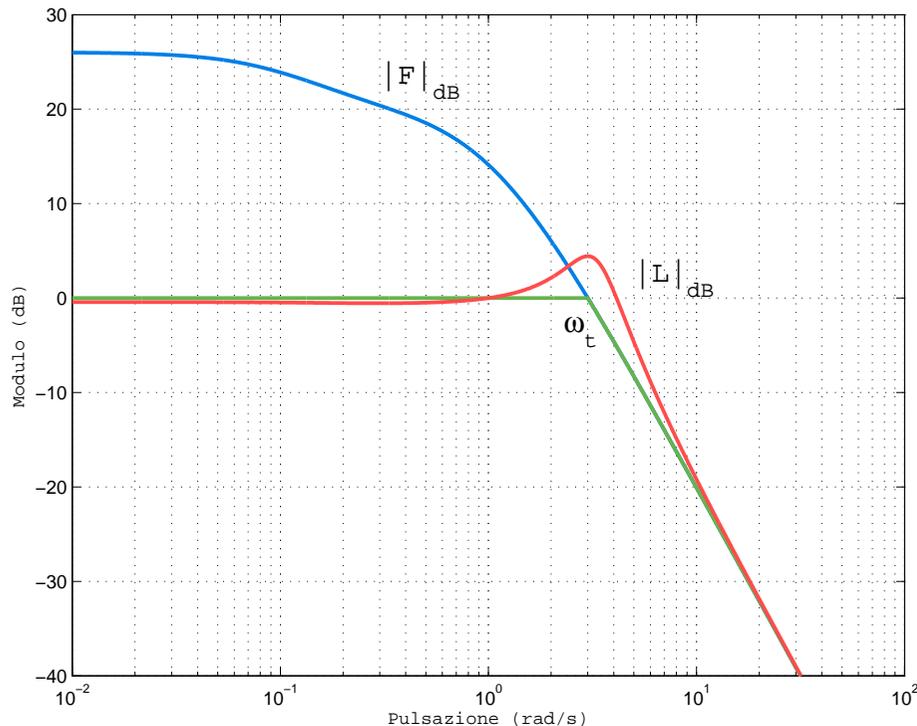
$$|S(j\omega)| R(\omega) \leq 1 \quad \stackrel{\text{approx}}{\Leftrightarrow} \quad \frac{R(\omega)}{|F(j\omega)|} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |F(j\omega)| \geq R(\omega), \quad \forall \omega \in [0, \omega_1]$$

Si noti infine che, essendo tipicamente $R(\omega) \gg 1$, indirettamente si richiede che la pulsazione di attraversamento ω_t sia maggiore di ω_1 .

Funzione di sensitività complementare $L(s)$

Approssimazione $|L(j\omega)|_{dB}$

$$|L(j\omega)|^{approx} = \frac{|F(j\omega)|}{|1 + F(j\omega)|} \approx \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \leq \omega_t \\ |F(j\omega)| & \text{se } \omega > \omega_t \end{cases}$$



- $|F(j\omega)|_{dB}$
- $|L(j\omega)|_{dB}^{approx}$ approssimato
- $|L(j\omega)|_{dB}$ esatto

N.B. In prima approssimazione $B_3 \approx \omega_t$
 con B_3 banda passante del sistema di controllo

Fig. 5 – Andamenti tipici di $|F(j\omega)|_{dB}$, $|L(j\omega)|_{dB}$ e $|L(j\omega)|_{dB}^{approx}$

Il sistema di controllo si comporta, rispetto al riferimento r e al disturbo n , come un **filtro passa-basso** con guadagno unitario (o prossimo a 1).

Tutte le componenti del segnale di riferimento a pulsazione inferiore a ω_t vengono riprodotte fedelmente (in termini di ampiezza).

Funzione di sensitività complementare $L(s)$

Per quanto riguarda il **rumore di misura** introdotto in n , si ricorda che tipicamente tale rumore ha componenti armoniche ad alta frequenza $\omega \geq \omega_2$. Il legame $n \rightarrow y$ è dato dalla funzione di sensitività complementare e pertanto si può scrivere, analogamente a quanto fatto per la funzione di sensitività,

$$|L(j\omega)|N(\omega) \leq 1, \quad \text{per } \omega \geq \omega_2$$

con $N(\omega)$ avente il significato analogo di $R(\omega)$ precedentemente definito. Per trasformare tale requisito in termini di vincolo sulla funzione d'anello, si sfrutta l'approssimazione ad alta frequenza di $|L(j\omega)|$ ottenendo

$$|F(j\omega)| \leq \frac{1}{N(\omega)}, \quad \text{per } \omega \geq \omega_2$$

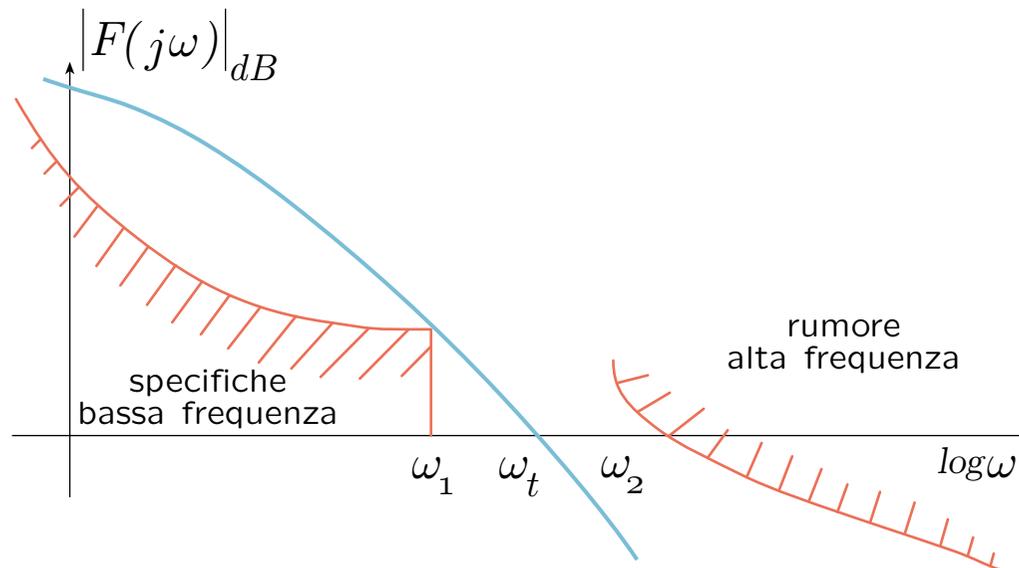


Fig. 6 – Vincoli sul modulo della funzione d'anello $|F(j\omega)|_{dB}$

Ulteriori vincoli nascono da considerazioni sulla specifica di stabilità in presenza di incertezze sul modello.

Funzione di sensitività del controllo $S_u(s)$

È stata definita funzione di sensitività del controllo la

$$S_u(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)P(s)} = C(s)S(s) = L(s)P^{-1}(s)$$

L'ingresso di controllo m è dato da

$$m(s) = S_u(s) (r(s) + d_1(s) - P(s)d_2(s) - d_3(s) - n(s))$$

Th. di Parseval (lega tempo a frequenza)

$$\int_0^{\infty} m^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |m(j\omega)|^2 d\omega$$

nell'ipotesi di stabilità asintotica del sistema di controllo e di un ingresso di controllo risultante da un'azione limitata nel tempo (esistenza integrali).

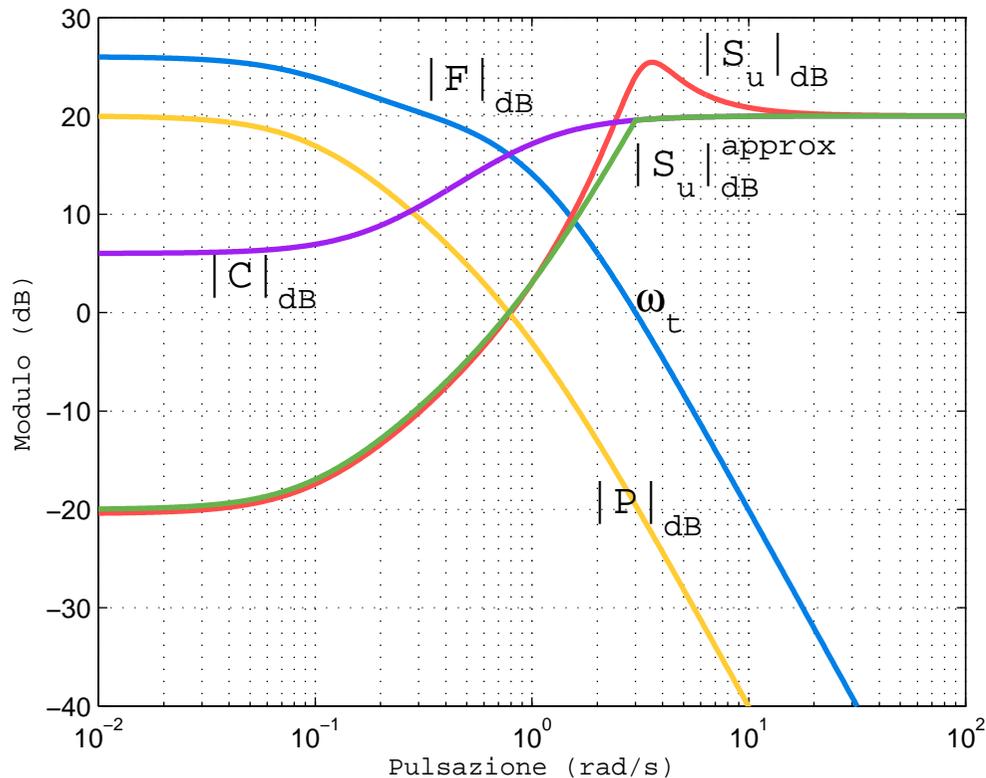
Per mantenere $\int |m(j\omega)|^2 d\omega$ limitato si può richiedere, sfruttando le relazioni precedenti tra $S_u(s)$, $L(s)$, $S(s)$, $C(s)$ e $P(s)$:

- $|L(j\omega)|$ piccolo, con l'eventuale eccezione di quelle pulsazione alle quali $|P(j\omega)|$ è sufficientemente grande;
- $|C(j\omega)|$ piccolo, con l'eventuale eccezione di quelle pulsazione alle quali $|S(j\omega)|$ è sufficientemente piccolo (o viceversa).

Funzione di sensitività del controllo $S_u(s)$

Approssimazione $|S_u(j\omega)|_{dB}$

$$|S_u(j\omega)|^{approx} = \frac{|C(j\omega)|}{|1 + F(j\omega)|} \approx \begin{cases} \frac{1}{|P(j\omega)|} & \text{se } \omega \leq \omega_t \\ |C(j\omega)| & \text{se } \omega > \omega_t \end{cases}$$



- $|F(j\omega)|_{dB}$
- $|S_u(j\omega)|_{dB}^{approx}$ approssimato
- $|S_u(j\omega)|_{dB}$ esatto

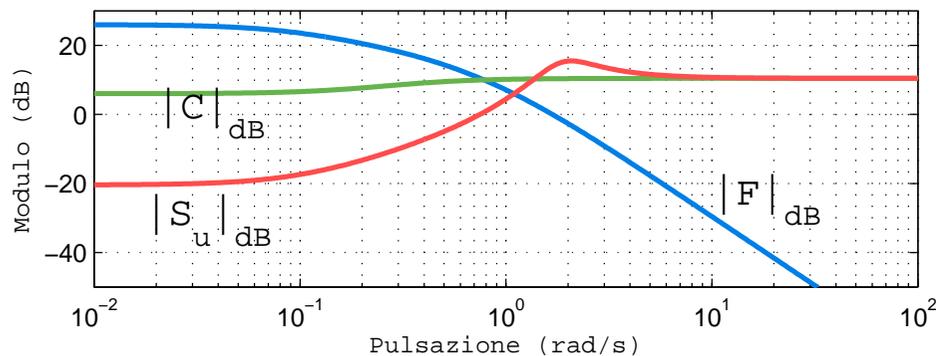
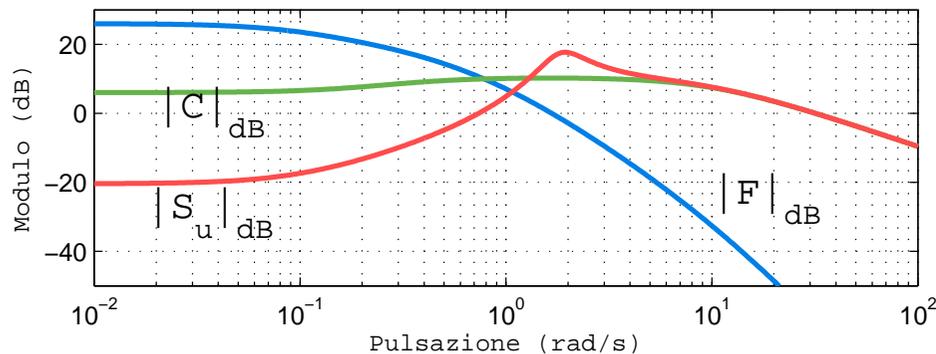
Fig. 11 – Funzione di sensitività del controllo $|S_u(j\omega)|_{dB}$ e sua approssimazione

$|S_u(j\omega)|$ dipende esclusivamente dalle caratteristiche del processo a bassa frequenza e del controllore ad alta frequenza.

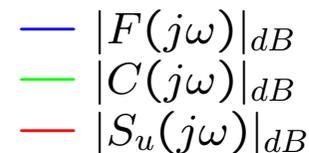
Funzione di sensitività del controllo $S_u(s)$

Desiderabile, a parità di altre prestazioni, ottenere il minor $|S_u(j\omega)|_{dB}$ possibile (minor sforzo di controllo – dipende comunque dallo spettro dei segnali).

- Un controllore caratterizzato da una funzione di trasferimento propria dà luogo a $|S_u(j\omega)|_{dB}$ elevato ad alta frequenza (comunque non decrescente).
- Esempio: scelta approssimazione azione derivativa nel controllore PID (all'aumentare del polo ad alta frequenza aumenta lo sforzo di controllo).
- Esempio: scelta $C(s)$ nella sintesi diretta (proprio o strettamente proprio).



- Due controllori: uno strettamente proprio, uno proprio
- Stessa pulsazione di attraversamento
- Margine di fase leggermente migliore nel caso proprio
- Derivata dell'ingresso di controllo con valori troppo elevati per $C(s)$ proprio

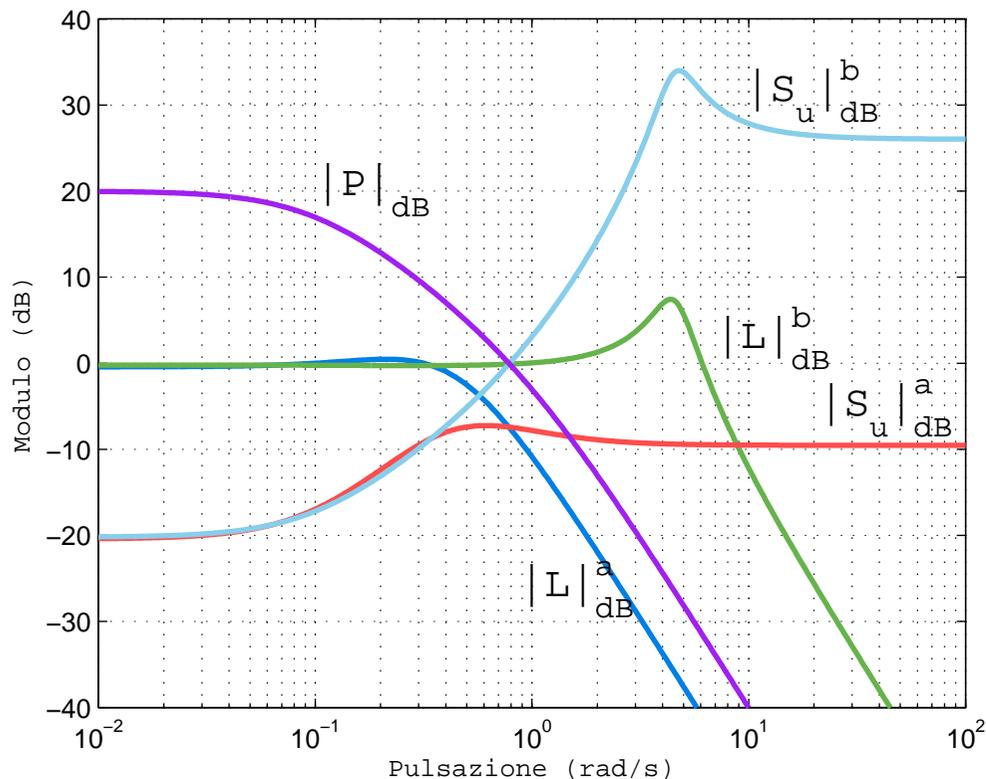


Funzione di sensitività del controllo $S_u(s)$

Dalla relazione $|S_u(j\omega)| = |L(j\omega)||P(j\omega)|^{-1}$, essendo tipicamente

- $|L(j\omega)|$ passa-basso con guadagno ≈ 1 e $B_3 \approx \omega_t$
- $|P(j\omega)|$ passa-basso con banda passante $B_{3,P}$

se $B_3 > B_{3,P}$ allora $|S_u(j\omega)|$ presenta un andamento crescente in $[B_{3,P}, B_3]$



- Caso (a) B_{3a} , Caso (b) B_{3b}
- $B_{3b} > B_{3a}$
- $C(s)$ proprio \Rightarrow pendenza P ed L simili
- B_3 aumenta
- a parità di altre caratteristiche

Caso (a): — $|L(j\omega)|_{dB}^a$; — $|S_u(j\omega)|_{dB}^a$

Caso (b): — $|L(j\omega)|_{dB}^b$; — $|S_u(j\omega)|_{dB}^b$

Fig. 12 – $|S_u(j\omega)|_{dB}$ e aumento banda passante (confronto caso (a) e (b) con $B_{3a} < B_{3b}$)

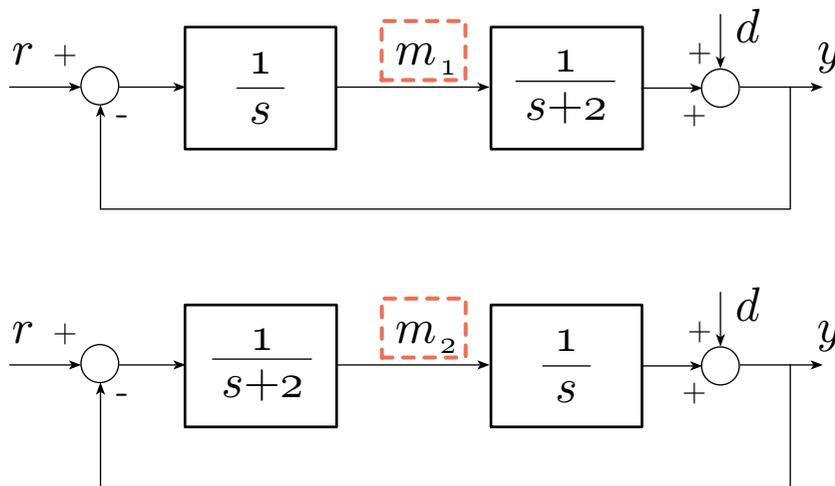
Funzione di sensitività del controllo $S_u(s)$

⇒ Se si desidera ottenere una banda passante del sistema di controllo ben più elevata rispetto a quella del processo controllato, ciò è ottenibile solo attraverso un aumento dello sforzo di controllo.

Esempio Considerazioni a bassa frequenza

Si considerino i due sistemi caratterizzati da

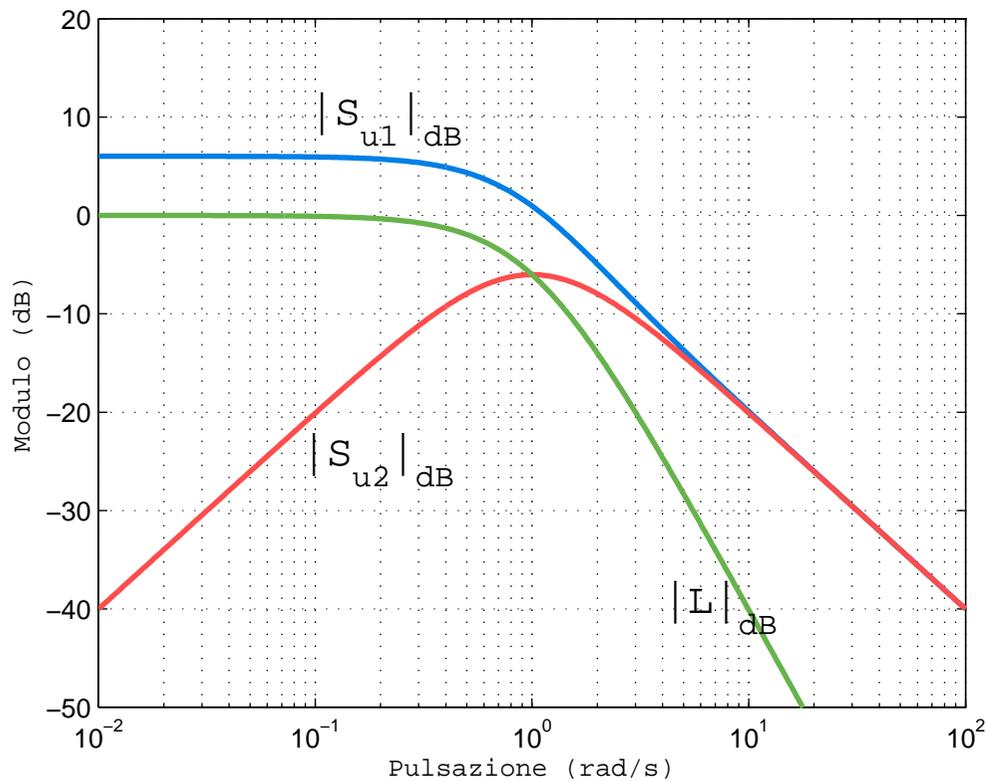
$$P_1(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \text{con} \quad C_1(s) = \frac{1}{s}$$
$$P_2(s) = \frac{1}{s}, \quad \text{con} \quad C_2(s) = \frac{1}{s+2}$$



Due controllori/sistemi
con uguale funzione d'anello
e quindi sistemi di controllo
con stessa banda passante

Funzione di sensitività del controllo $S_u(s)$

Il comportamento della funzione di sensitività del controllo differisce notevolmente a bassa frequenza a causa della presenza o meno dell'integratore nel processo.

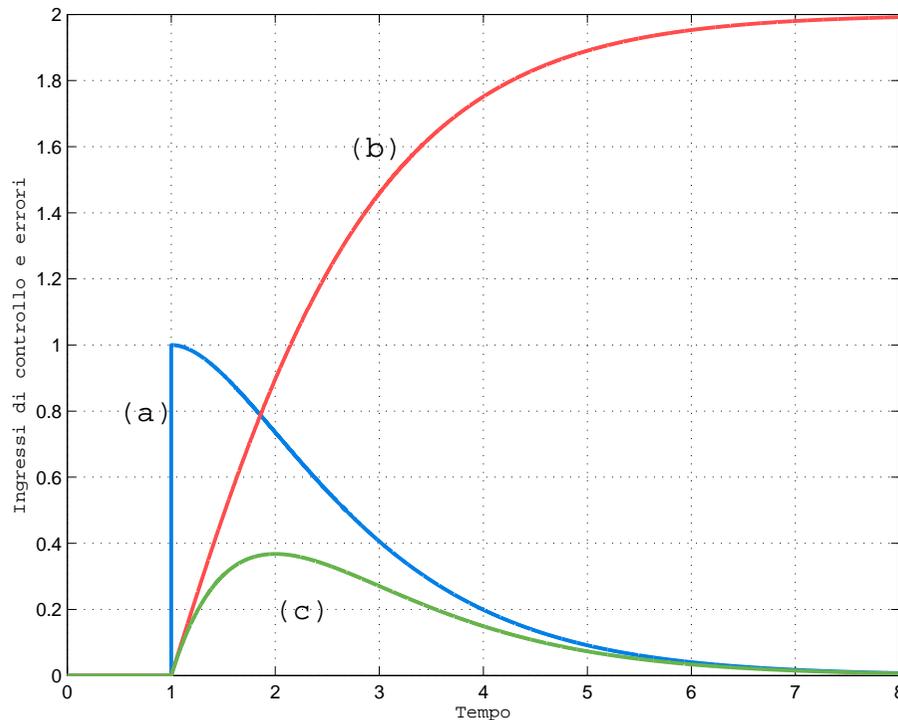


Confronto sullo sforzo di controllo
a parità di altre prestazioni
Effetto di un integratore nel processo
rispetto ad un integratore nel controllore

Le prestazioni in termini di $S(j\omega)$
e $L(j\omega)$ sono identiche essendo
 $F_1(s) = C_1(s)P_1(s) = C_2(s)P_2(s) = F_2(s)$

Fig. 13 – Esempio, confronto $|S_{u1}(j\omega)|_{dB}$, $|S_{u2}(j\omega)|_{dB}$

Funzione di sensitività del controllo $S_u(s)$



Andamento dell'errore $e_1(t)$ —
 e dell'ingresso $m_1(t)$ —
 infatti $m_1(t) = \int e_1(\tau) d\tau$
 mentre $e_1 \rightarrow 0$, $m_1 \rightarrow m_{1RP} = 2 = 1/P_1(0)$
 Nel caso (2) invece
 essendo $y_1(t) = y_2(t)$ si ha $e_1(t) = e_2(t)$
 mentre $e_2 \rightarrow 0$, l'ingresso $m_2 \rightarrow 0$ —
 ma mentre $m_2 \rightarrow 0$, $y_2 \rightarrow 1$
 essendo $P_2(s)$ un integratore

Fig. 14 – Esempio, confronto (a): $e_1(t) = e_2(t)$, (b): $m_1(t)$ e (c): $m_2(t)$

Le espressioni di $S_{u1}(s)$ e $S_{u2}(s)$ sono

$$S_{u1}(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2}, \quad S_{u2}(s) = \frac{s}{(s+1)^2}$$

Si nota infatti che $S_{u2}(0) = 0$ a conferma delle osservazioni derivanti dalla Fig. 14 e dall'andamento di Fig. 13.