Diagrammi di Bode

L. Lanari

Dipartimento di Informatica e Sistemistica
Università di Roma "La Sapienza"

Ultima modifica – October 25, 2013

Argomenti

- Forma canonica di Bode

- Modulo e fase nel piano complesso

- I decibel (dB)

- Scala logaritmica per le ascisse

- Diagrammi di Bode dei vari fattori

Notazioni

- $\left|a\right| = \text{Mod}[a] =$ modulo di a

- $\angle a = \text{Fase}[a] =$ fase di a

- $j = \sqrt{-1}$

- s variabile complessa

La Forma Canonica di Bode

Rappresentazione poli/zeri di una funzione di trasferimento

$$F(s) = K' \frac{1}{s^m} \frac{\prod_k (s - z_k) \prod_\ell (s^2 + 2\zeta_\ell \omega_{n\ell} s + \omega_{n\ell}^2)}{\prod_i (s - p_i) \prod_z (s^2 + 2\zeta_z \omega_{nz} s + \omega_{nz}^2)}$$

con m tale che*

- $m = 0$ se nessun polo e zero in $s = 0$
- $m < 0$ se m zeri in $s = 0$
- $m > 0$ se m poli in $s = 0$

Inoltre

- espandendo il denominatore si ottiene un polinomio monico†. Ciò è sempre possibile ponendo un eventuale coefficiente di s^n diverso da 1 in K'
- K' non è il guadagno del sistema

*Si suppone che la $F(s)$ abbia numeratore e denominatore coprimi, cioè senza radici in comune, pertanto non possono essere contemporaneamente presenti poli e zeri in $s = 0$.

†Coefficiente del fattore di ordine più elevato in s pari a 1.

La Forma Canonica di Bode

- i termini $(s - z_k)$ e $(s - p_i)$ derivano dalla presenza di
  - ▷ zeri reali (in $s = z_k$)
  - ▷ poli reali (in $s = p_i$)

- i termini $(s^2 + 2\zeta_\ell \omega_{n\ell} s + \omega_{n\ell}^2)$ e $(s^2 + 2\zeta_z \omega_{nz} s + \omega_{nz}^2)$ derivano dalla presenza di
  - ▷ zeri complessi e coniugati (in $s = \alpha_\ell \pm j\beta_\ell$)
  - ▷ poli complessi e coniugati (in $s = \alpha_z \pm j\beta_z$)

  con, in generale,

  - ▷ pulsazione naturale $\omega_{n*} = \sqrt{\alpha_*^2 + \beta_*^2}$
  - ▷ coefficiente di smorzamento $\zeta_* = -\alpha_*/\omega_{n*} = -\alpha_*/\sqrt{\alpha_*^2 + \beta_*^2}$

La Forma Canonica di Bode

Fattorizzando

$$
\begin{aligned}
s - z_k = -z_k(1 - 1/z_k s) &= -z_k(1 + \tau_k s) \quad \text{con} \quad \tau_k = -1/z_k \\
s - p_i = -p_i(1 - 1/p_i s) &= -p_i(1 + \tau_i s) \quad \text{con} \quad \tau_i = -1/p_i
\end{aligned}
$$

con τ_i e τ_k costanti di tempo

$$
\begin{aligned}
F(s) &= K' \frac{1}{s^m} \frac{\prod_k(-z_k) \prod_\ell(\omega_{n\ell}^2) \prod_k(1 + \tau_k s) \prod_\ell(1 + 2\zeta_\ell/\omega_{n\ell} s + s^2/\omega_{n\ell}^2)}{\prod_i(-p_i) \prod_z(\omega_{nz}^2) \prod_i(1 + \tau_i s) \prod_z(1 + 2\zeta_z/\omega_{nz} s + s^2/\omega_{nz}^2)} \\
&= K \frac{1}{s^m} \frac{\prod_k(1 + \tau_k s) \prod_\ell(1 + 2\zeta_\ell/\omega_{n\ell} s + s^2/\omega_{n\ell}^2)}{\prod_i(1 + \tau_i s) \prod_z(1 + 2\zeta_z/\omega_{nz} s + s^2/\omega_{nz}^2)}
\end{aligned}
$$

e K guadagno generalizzato (o semplicemente guadagno) definito come

$$
\boxed{K = [s^m F(s)]\Big|_{s=0} \qquad \text{per qualsiasi} \quad m \gtreqless 0}
$$

uguale a

$$
K = K' \frac{\prod_k(-z_k) \prod_\ell(\omega_{n\ell}^2)}{\prod_i(-p_i) \prod_z(\omega_{nz}^2)}
$$

La Forma Canonica di Bode

Si noti che

- Per $m \leq 0$ (sistema privo di poli in $s = 0$) si è definito guadagno statico

$$K_s = F(s)\Big|_{s=0} = F(0)$$

  La presenza di eventuali zeri in $s = 0$ ($m < 0$) implica $F(0) = 0$.

- Il guadagno statico K_s e il guadagno K coincidono solo nel caso $m = 0$

$$K = K_s \quad \Leftrightarrow \quad m = 0$$

- Per un sistema stabile asintoticamente, la risposta indiciale tende asintoticamente al guadagno statico $K_s = F(0)$ (quindi a 0 se il sistema ha zeri in $s = 0$).

La Forma Canonica di Bode - Esempi

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{s-1}{2s^2+6s+4} = \frac{s-1}{2(s+1)(s+2)} = -\frac{1}{2}\frac{1-s}{(1+s)(1+s/2)} \\
K &= K_s = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(s) &= = \frac{s(s-1)}{2(s+1)^2(s+2)} = -\frac{1}{2}\frac{s(1-s)}{(1+s)^2(1+s/2)} \\
K &= -\frac{1}{2} \qquad K_s = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{s-1}{2s(s+1)(s+2)} = -\frac{1}{2}\frac{1-s}{s(1+s)(1+s/2)} \\
K &= -\frac{1}{2} \qquad \nexists\, K_s
\end{aligned}
$$

La Forma Canonica di Bode della Risposta Armonica

$$F(j\omega) = K \frac{1}{(j\omega)^m} \frac{\prod_k (1 + j\omega\tau_k) \prod_\ell (1 + 2\zeta_\ell j\omega/\omega_{n\ell} + (j\omega)^2/\omega_{n\ell}^2)}{\prod_i (1 + j\omega\tau_i) \prod_z (1 + 2\zeta_z j\omega/\omega_{nz} + (j\omega)^2/\omega_{nz}^2)}$$

con 4 fattori elementari della forma

1. costante K (guadagno generalizzato)

2. monomio $j\omega$ (zero/polo in $s = 0$)

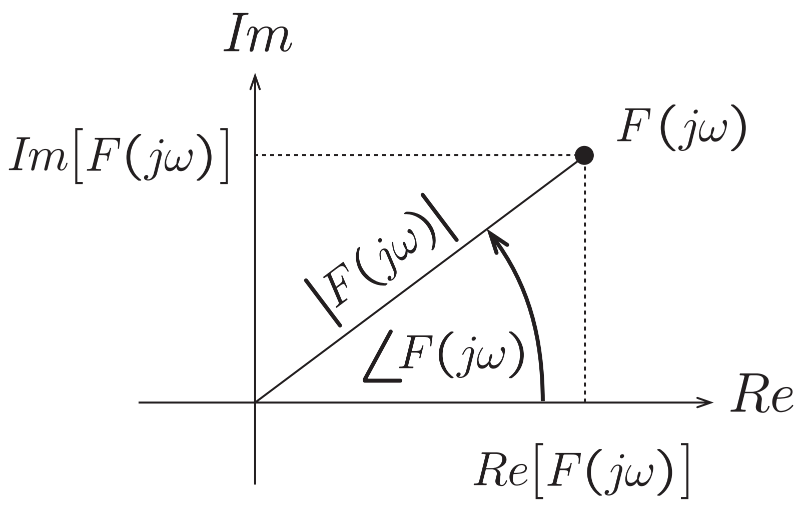
3. binomio $1 + j\omega\tau$ (zero/polo reale non nullo)

4. trinomio $1 + 2\zeta j\omega/\omega_n + (j\omega)^2/\omega_n^2$ (coppia zeri/poli complessi e coniugati)

Diagrammi di Bode

Rappresentazione grafica del modulo (in dB) e della fase di $F(j\omega)$ (numero complesso) al variare di $\omega \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$

Per ogni fissato $\bar{\omega}$, $F(j\bar{\omega}) \in \mathbb{C}$ può essere rappresentato



- parte reale e parte immaginaria

$$F(j\bar{\omega}) = \mathrm{Re}[F(j\bar{\omega})] + j\mathrm{Im}[F(j\bar{\omega})]$$

- modulo e Fase

$$F(j\bar{\omega}) = \mathrm{Mod}[F(j\bar{\omega})]e^{j\mathrm{Fase}[F(j\bar{\omega})]}$$

con le seguenti relazioni

▷ $\mathrm{Mod}[F(j\omega)] = |F(j\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}[F(j\omega)]^2 + \mathrm{Im}[F(j\omega)]^2}$

▷ $\mathrm{Fase}[F(j\omega)] = \angle F(j\omega) = \mathrm{atan2}(\mathrm{Im}[F(j\omega)], \mathrm{Re}[F(j\omega)])$

Diagrammi di Bode - Fase

Proprietà della fase:

$$\text{Fase}[F.G] = \text{Fase}[F] + \text{Fase}[G]$$

e cioè

"La fase di un prodotto è uguale alla somma delle fasi"

$$\text{Fase}\left[\frac{F}{G}\right] = \text{Fase}[F] - \text{Fase}[G]$$

e cioè

"La fase di un rapporto è uguale alla differenza delle fasi*"

Non vale per il modulo $\rightarrow$ si passa al logaritmo del modulo

*La proprietà è Fase $\left[\frac{1}{G}\right] = -\text{Fase}[G]$

Diagrammi di Bode - Modulo

Il modulo è espresso in decibel (dB)

$$|F(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}|F(j\omega)|$$

Dalle proprietà del logaritmo

$$\begin{aligned} |F.G|_{\mathrm{dB}} &= |F|_{\mathrm{dB}} + |G|_{\mathrm{dB}} \\ \left|\frac{1}{F}\right|_{\mathrm{dB}} &= -|F|_{\mathrm{dB}} \end{aligned}$$

$$|F|_{\mathrm{dB}} \nearrow +\infty \quad \text{se} \quad |F| \nearrow \infty$$

$$|F|_{\mathrm{dB}} \searrow -\infty \quad \text{se} \quad |F| \searrow 0$$

Esempi

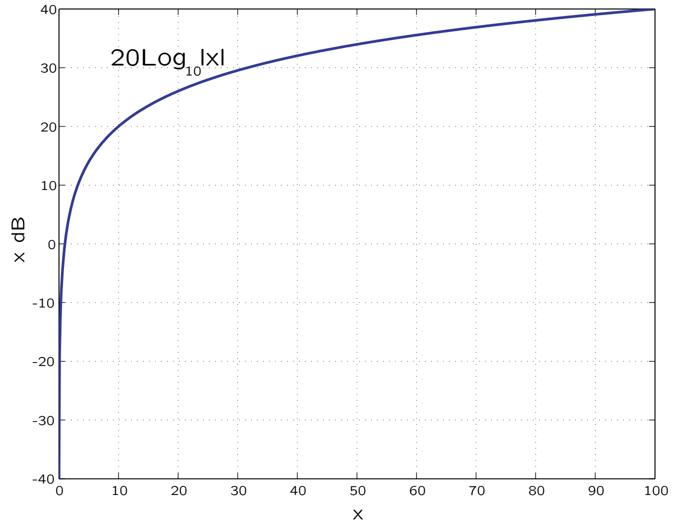
$$|0.1|_{\mathrm{dB}} = -20\,\mathrm{dB}$$

$$|1|_{\mathrm{dB}} = 0\,\mathrm{dB}$$

$$|10|_{\mathrm{dB}} = 20\,\mathrm{dB}$$

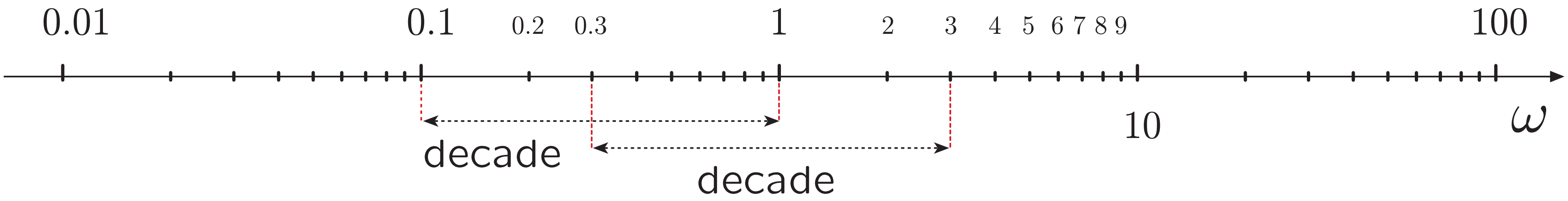
$$|100|_{\mathrm{dB}} = 40\,\mathrm{dB}$$

$$\left|\sqrt{2}\right|_{\mathrm{dB}} \approx 3\,\mathrm{dB}$$

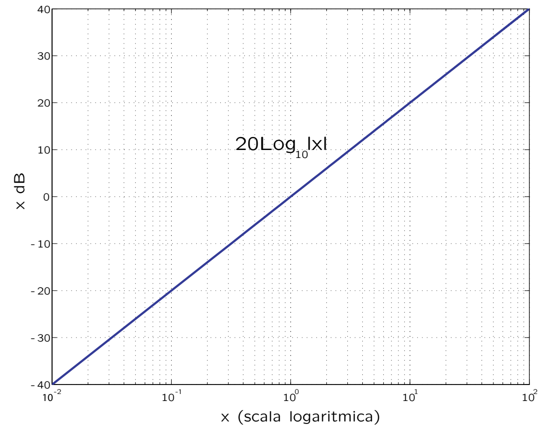


Scala logaritmica

• Per le ascisse (pulsazioni ω) si usa una scala logaritmica in base 10 (distanza di una decade corrisponde a una moltiplicazione per 10 o equivalentemente ad un ordine di grandezza superiore).



• La funzione $\log_{10}(x)$, in scala logaritmica per le ascisse, diventa lineare!



Scala logaritmica

Vantaggi della scala logaritmica per le ascisse e dei decibel

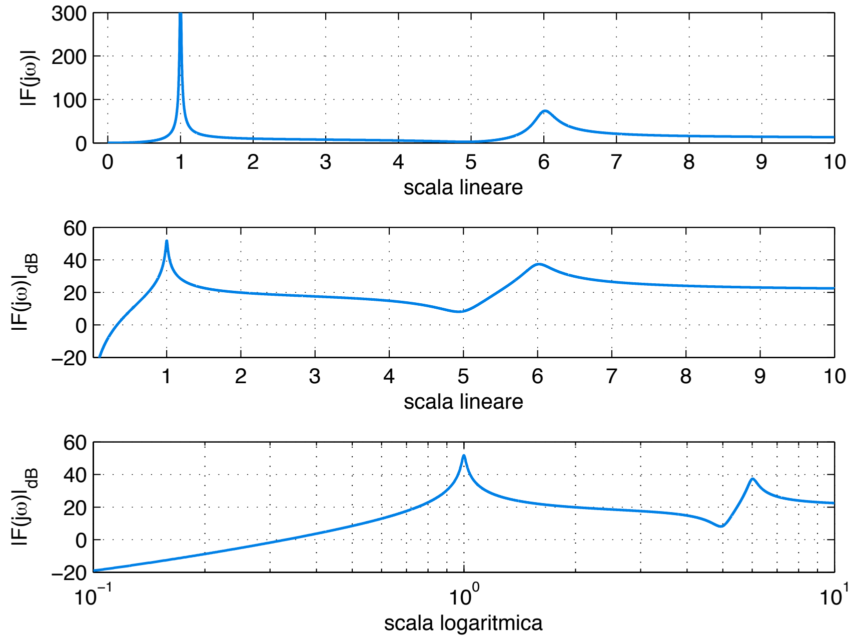
- rappresentare grandezze (ω e modulo) che variano in campi estesi
- facilità nella costruzione del diagramma del modulo in dB di una risposta armonica data in forma fattorizzata (forma canonica di Bode) a partire dagli andamenti del modulo in dB dei singoli fattori
- facilità di rappresentare i diagrammi di sistemi in serie (somma dei singoli diagrammi)

Stesso andamento del modulo riportato in diverse scale:

⋆ ascisse e ordinate lineari

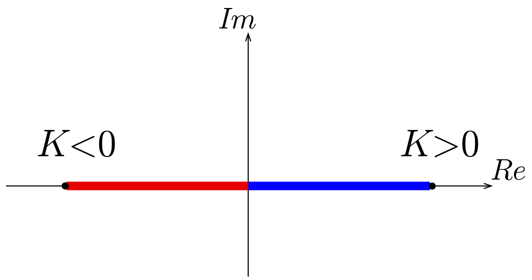
⋆ ascisse lineari e ordinate in dB

⋆ ascisse $\log_{10}$ ordinate in dB

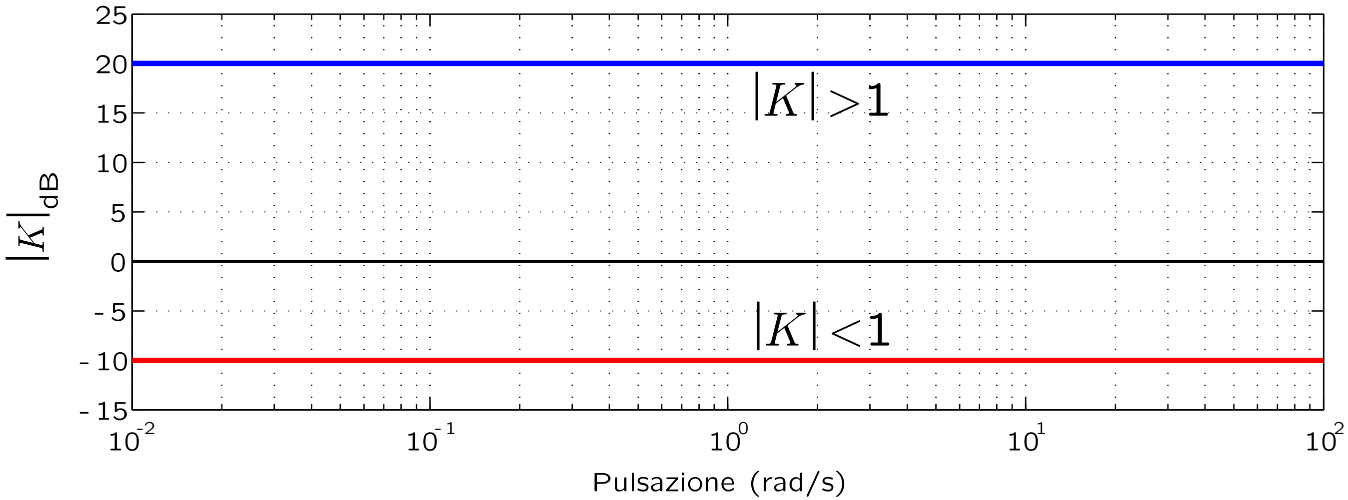


Fattore Costante K

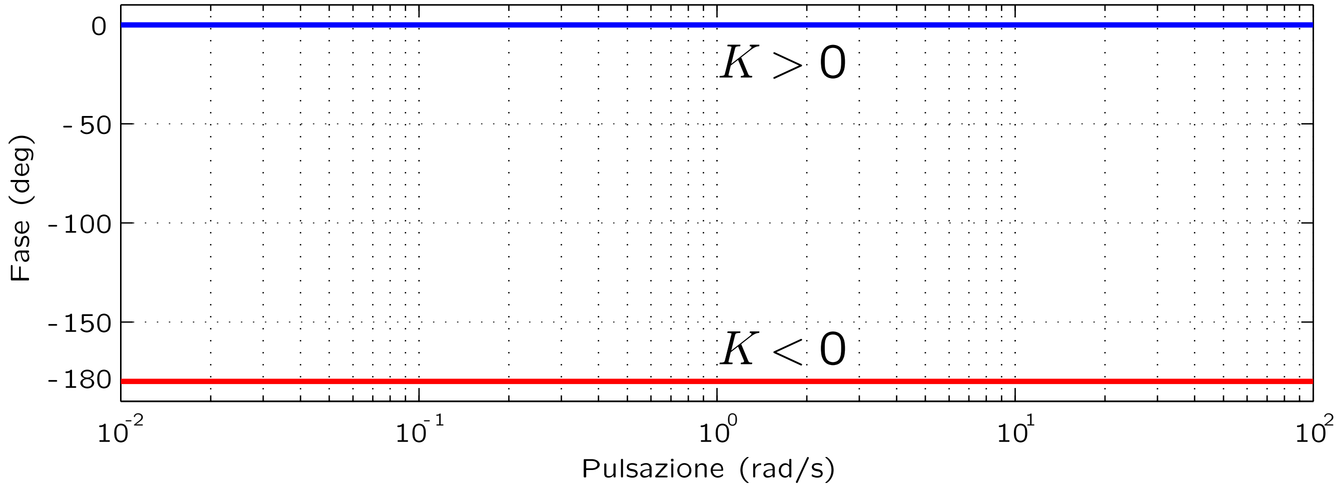
Nel piano complesso
(es: $K = 10$ e $K = -0.3162$)



modulo



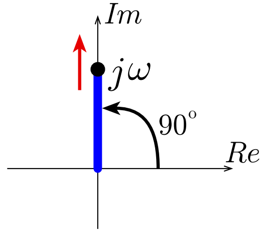
fase



Fattore Monomio $j\omega$

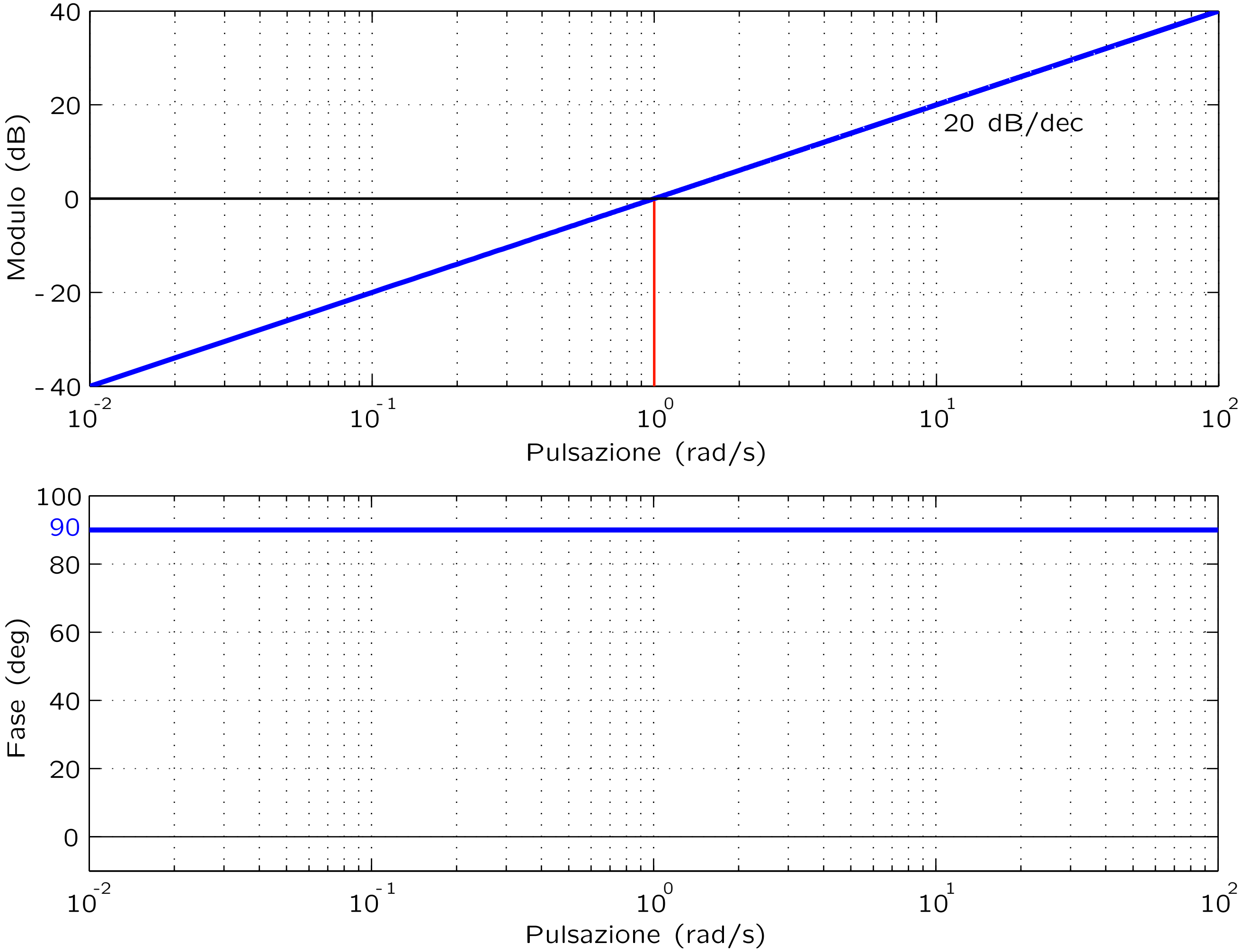
$|j\omega|_{dB} = 20\log_{10}\omega$ nel piano complesso

$|j\omega|_{dB} = 20x$ con le ascisse x in scala logaritmica



modulo

fase

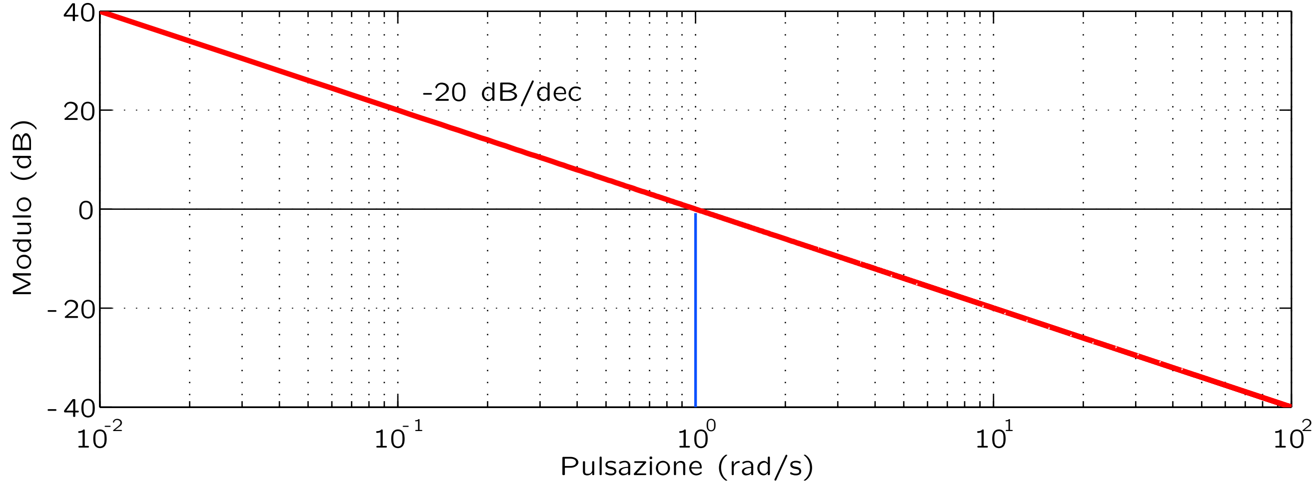


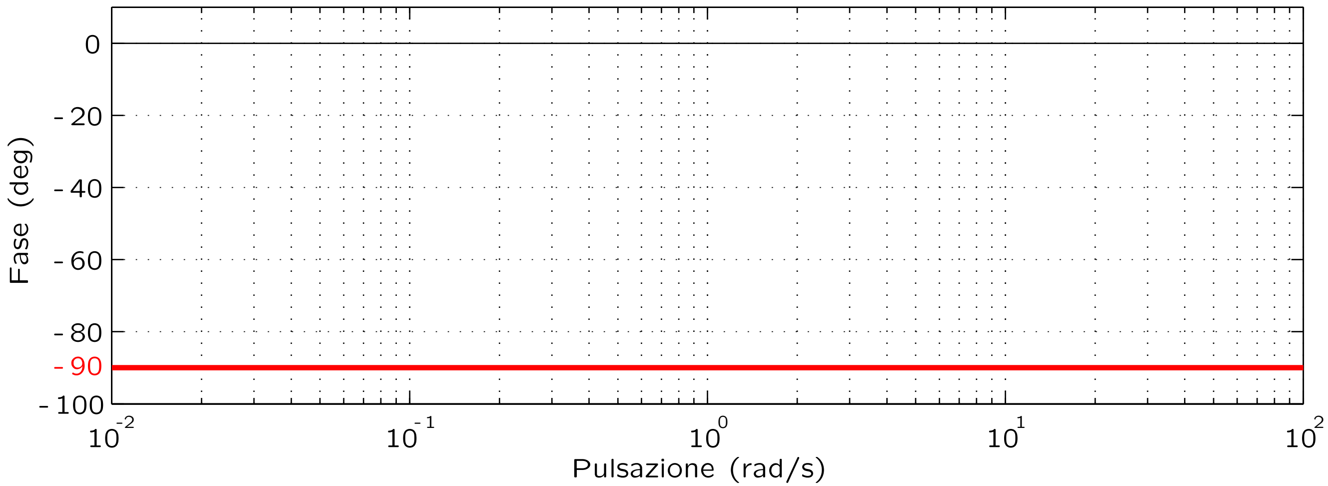
Fattore Monomio a denominatore $1/j\omega$

Dalle proprietà del modulo in dB e della fase

modulo

fase





Fattore Binomio a numeratore $(1 + j\omega\tau)$

- Modulo

$$|1 + j\omega\tau|_{dB} = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$$

Approssimazione rispetto alla pulsazione di rottura $1/|\tau|$

$$\sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \quad \approx \quad \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \omega \ll 1/|\tau| \\ \sqrt{\omega^2\tau^2} & \text{se} \quad \omega \gg 1/|\tau| \end{cases}$$

e quindi

$$|1 + j\omega\tau|_{dB} \quad \approx \quad \begin{cases} 0\,dB & \text{se} \quad \omega \ll 1/|\tau| \\ 20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} |\tau| & \text{se} \quad \omega \gg 1/|\tau| \end{cases}$$

mentre alla pulsazione di rottura $\omega^* = 1/|\tau|$

$$|1 + j\tau/|\tau|\,|_{dB} = 20 \log_{10} \sqrt{2} \approx 3\,dB$$

Si approssima il modulo con due semi-rette.

Andamento del modulo è indipendente dal segno di τ

Fattore Binomio a numeratore $(1 + j\omega\tau)$

L'andamento della fase dipende invece dal segno di τ

- Fase (caso $\tau > 0$)

$$\angle(1 + j\omega\tau) \quad \approx \quad \begin{cases} 0 & \text{se} \qquad\quad \omega \ll 1/|\tau| \\ \frac{\pi}{2} & \text{se} \quad \omega \gg 1/|\tau| \quad \text{e} \quad \tau > 0 \end{cases}$$

- Fase (caso $\tau < 0$)

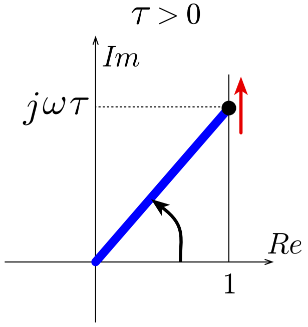
$$\angle(1 + j\omega\tau) \quad \approx \quad \begin{cases} 0 & \text{se} \qquad\quad \omega \ll 1/|\tau| \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se} \quad \omega \gg 1/|\tau| \quad \text{e} \quad \tau < 0 \end{cases}$$

I due asintoti vengono raccordati da un segmento che inizia in $0.1/|\tau|$ e termina in $10/|\tau|$ (una decade prima e una dopo rispetto alla pulsazione di rottura). L'andamento approssimato è quindi costituito da una spezzata a tre lati.

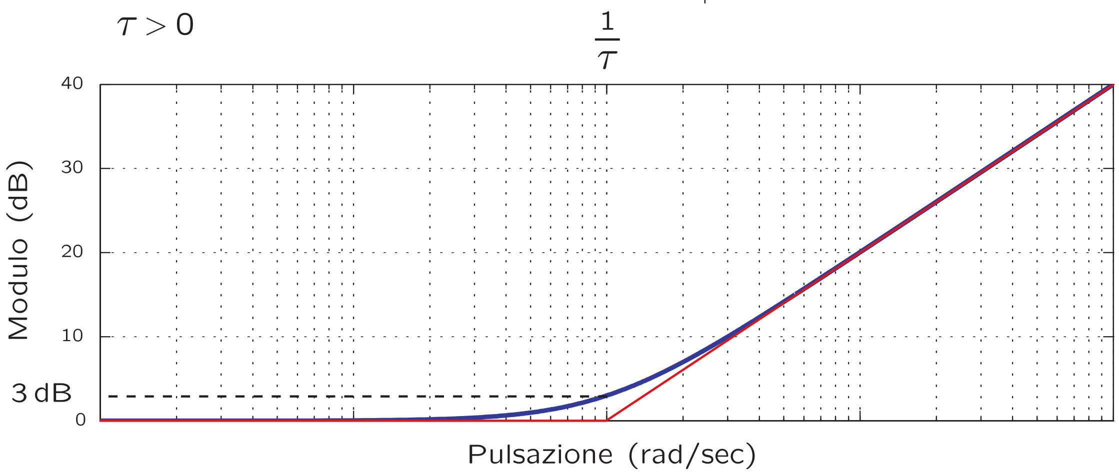
Alla pulsazione di rottura $\omega^* = 1/|\tau|$ $\qquad \angle(1 + j\tau/|\tau|) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{se} \quad \tau > 0 \\ -\frac{\pi}{4} & \text{se} \quad \tau < 0 \end{cases}$

Fattore Binomio a numeratore $(1 + j\omega\tau)$, $\tau > 0$

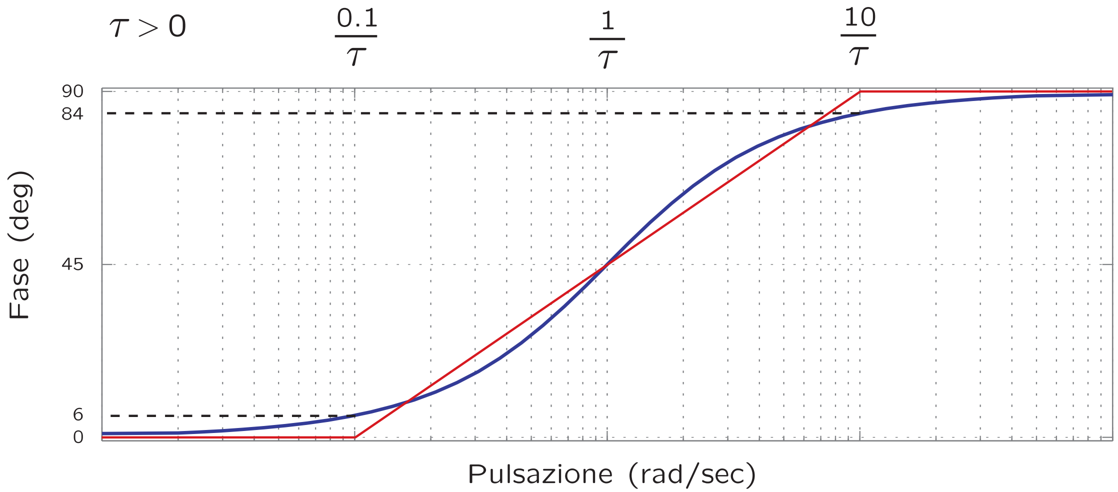
Nel piano complesso



modulo



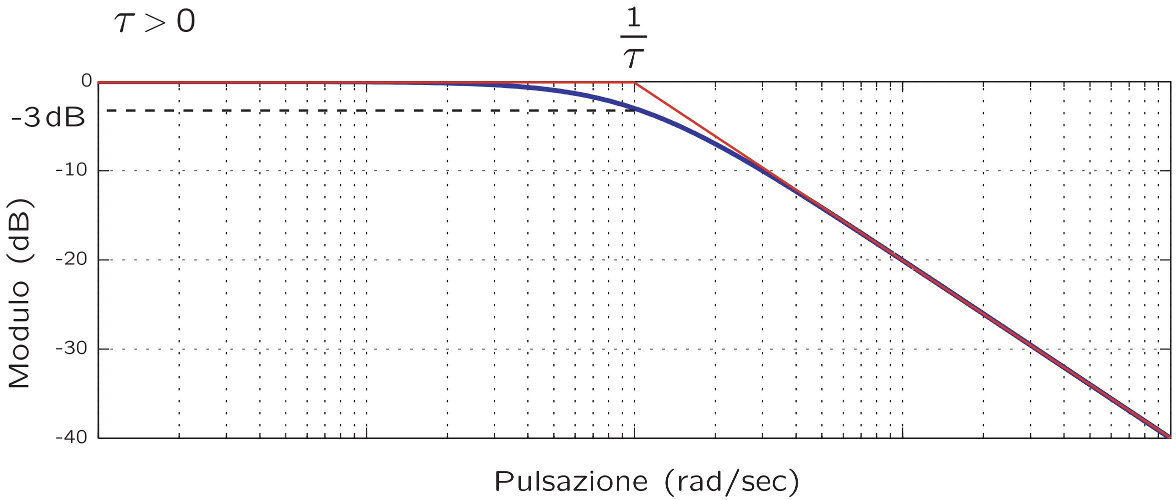
fase



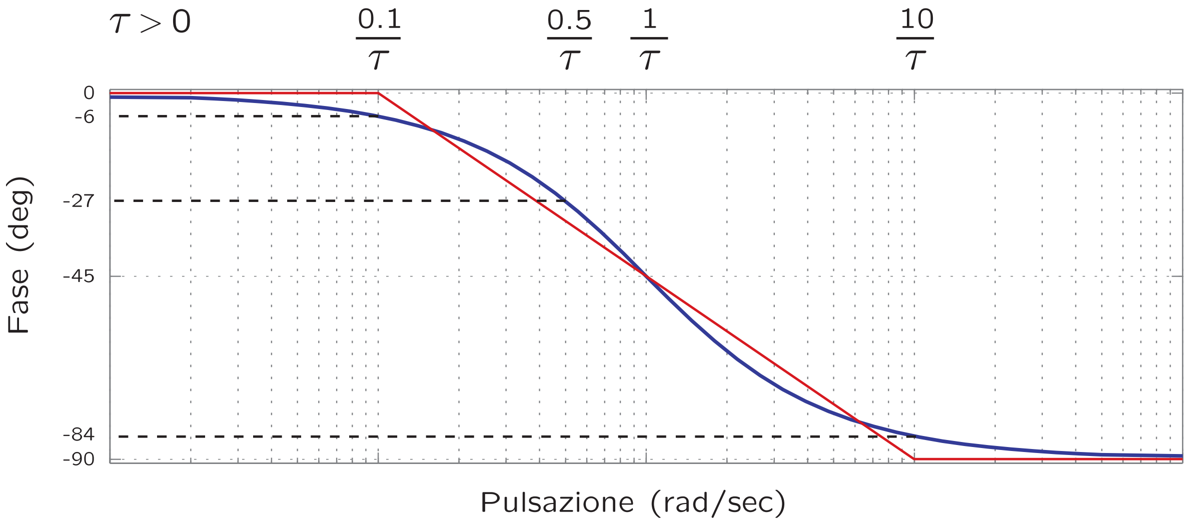
Fattore Binomio a denominatore $1/(1+j\omega\tau)$, $\tau > 0$

Dalle proprietà del modulo in dB e della fase

Modulo

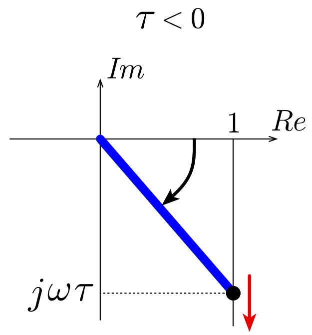


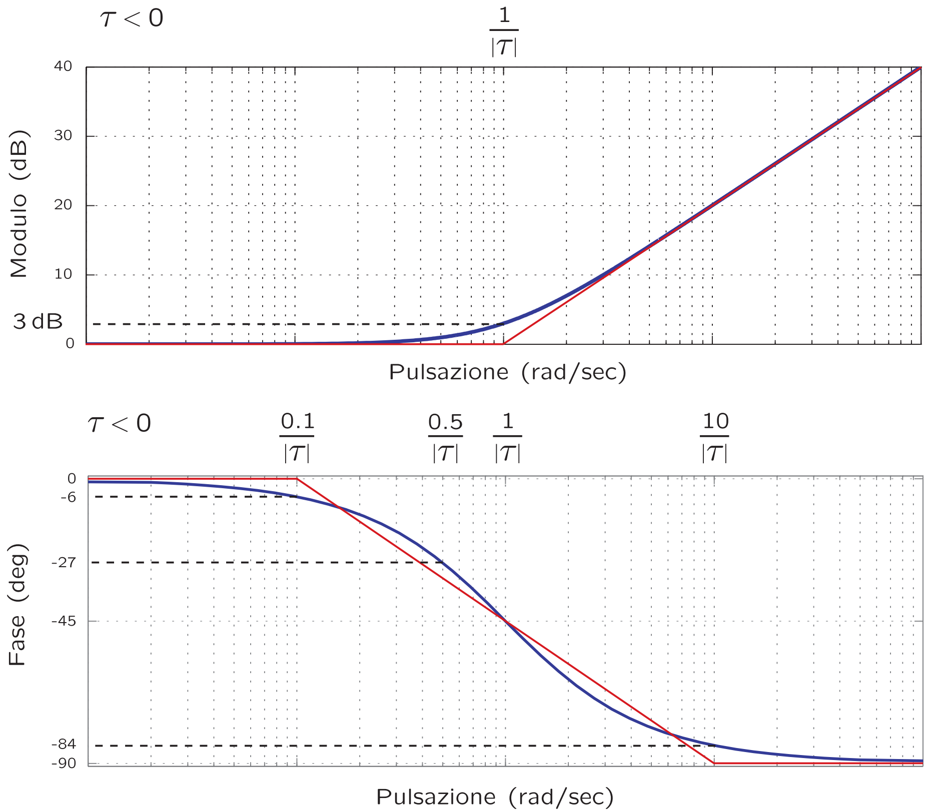
Fase



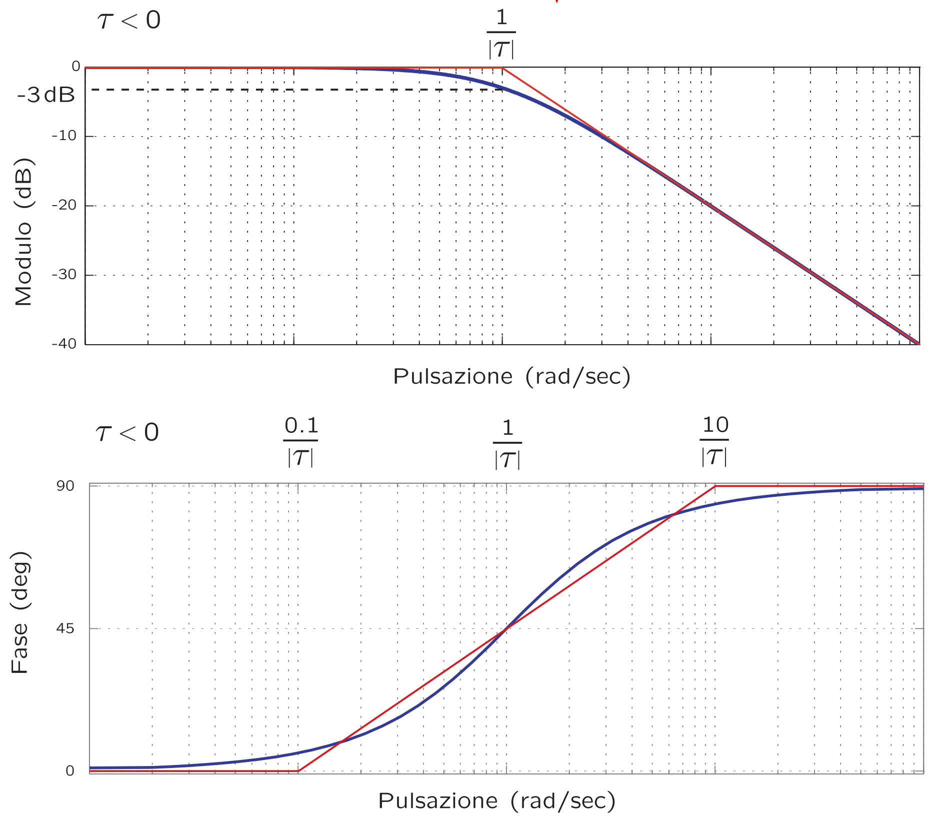
Fattore Binomio a numeratore/denominatore $\tau < 0$

Modulo non cambia, fase si





Numeratore



Denominatore

Fattore Trinomio a numeratore

Modulo

$$\left|1+2\frac{\zeta}{\omega_n}(j\omega)+\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}\right| = \left|1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right|$$

$$= \sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(4\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}$$

Approssimazione rispetto alla pulsazione naturale ω_n

$$|\text{TRINOMIO}| \approx \begin{cases} 1 & \text{se } \ \omega \ll \omega_n \\ \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2} = \frac{\omega^2}{\omega_n^2} & \text{se } \ \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

$$|\text{TRINOMIO}|_{dB} \approx \begin{cases} 0\,dB & \text{se } \ \omega \ll \omega_n \\ 40\log_{10}\omega - 20\log_{10}\omega_n^2 & \text{se } \ \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

Fattore Trinomio a numeratore

In $\omega = \omega_n$ si ha $|\text{TRINOMIO}| = 2\,|\zeta|$

$\lvert\zeta\rvert$	0	0.5	$1/\sqrt{2} \approx 0.707$	1
$\lvert TRIN\rvert_{dB}$ in ω_n	$-\infty$	0 dB	3 dB	6 dB

$\Rightarrow$ ampia variazione del modulo in funzione di ζ.

Fase

$$\angle\left(1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}(j\omega) + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \omega \ll \omega_n \\ \pi & \text{se} \quad \omega \gg \omega_n \quad \text{e} \quad \zeta \geq 0 \\ -\pi & \text{se} \quad \omega \gg \omega_n \quad \text{e} \quad \zeta < 0 \end{cases}$$

la transizione tra questi due valori avviene in modo simmetrico rispetto alla pulsazione naturale ω_n, e tanto più bruscamente quanto minore e $|\zeta|$; in particolare, per $\zeta = 0$ si ha una discontinuità nel diagramma delle fasi in corrispondenza a ω_n.

Fattore Trinomio $|\zeta| = 1$

Nel caso $\zeta = \pm 1$ il fattore trinomio ha radici reali coincidenti in

$$\text{radici} \quad = \quad \begin{cases} -\omega_n & \text{se} \quad \zeta = 1 \\ \omega_n & \text{se} \quad \zeta = -1 \end{cases}$$

$$\left(1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)_{\zeta=\pm 1} = \left(1 \pm \frac{s}{\omega_n}\right)^2$$

e quindi gli andamenti del modulo e della fase per $\zeta = \pm 1$ coincidono con quelli del doppio fattore binomio con pulsazione di rottura

$$\frac{1}{|\tau|} = \omega_n$$

Pertanto in $\omega = \omega_n$ il modulo del fattore trinomio, nel caso $|\zeta| = 1$, vale

$$\begin{aligned} 2 \times (3\,\text{dB}) \quad &= \quad 6\,\text{dB} \quad \text{Trinomio a numeratore} \\ 2 \times (-3\,\text{dB}) \quad &= \quad -6\,\text{dB} \quad \text{Trinomio a denominatore} \end{aligned}$$

Fattore Trinomio

Inoltre se $|\zeta| < 1/\sqrt{2} \approx 0.707$, il modulo di un fattore trinomio a denominatore (numeratore)

$$|F(j\omega)| = \left|\frac{1}{\text{TRINOMIO}}\right|$$

ha un massimo chiamato picco di risonanza (anti-risonanza)

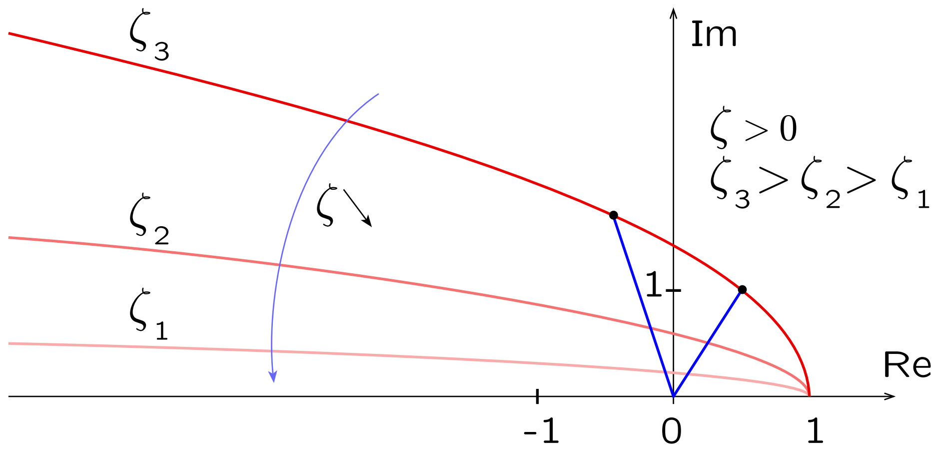
$$|F(j\omega_r)| = \frac{1}{2|\zeta|\sqrt{1-\zeta^2}}$$

in corrispondenza della pulsazione di risonanza ω_r
(coincidente con la pulsazione naturale solo per $\zeta = 0$)

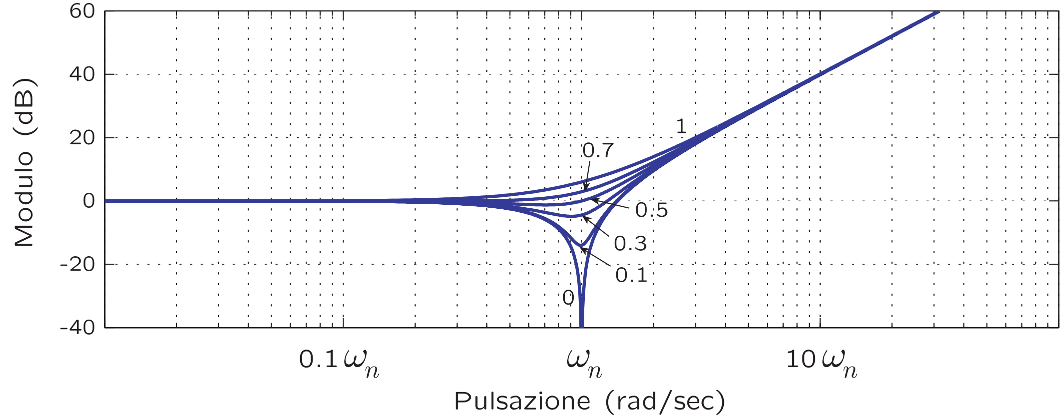
$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

Fattore Trinomio a numeratore $\zeta \geq 0$

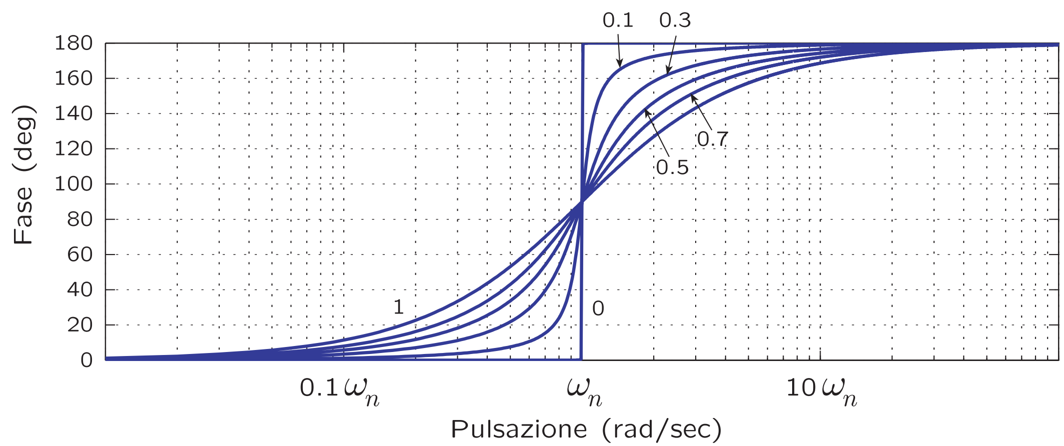
Nel piano complesso



Modulo
(al variare di $0 \leq \zeta \leq 1$)



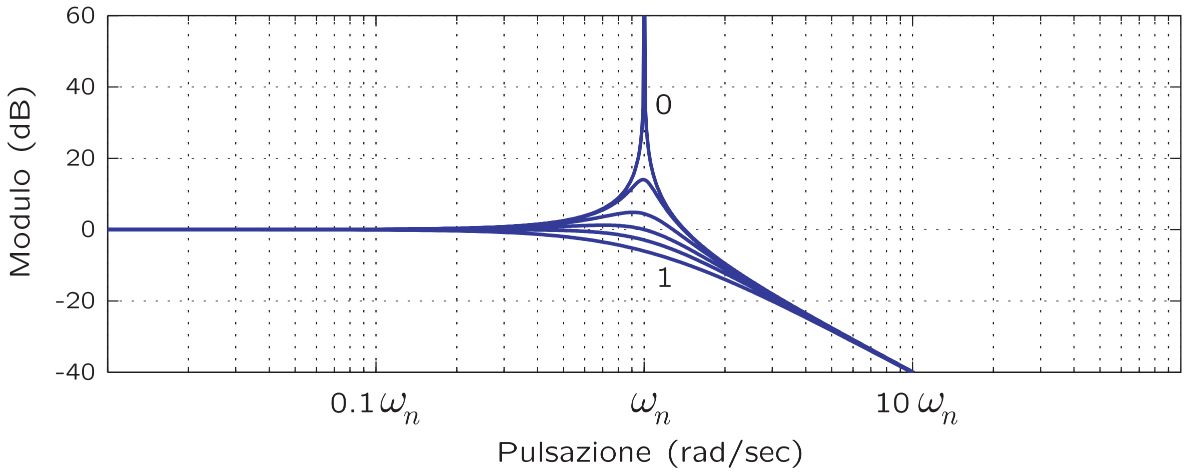
Fase
(al variare di $0 \leq \zeta \leq 1$)



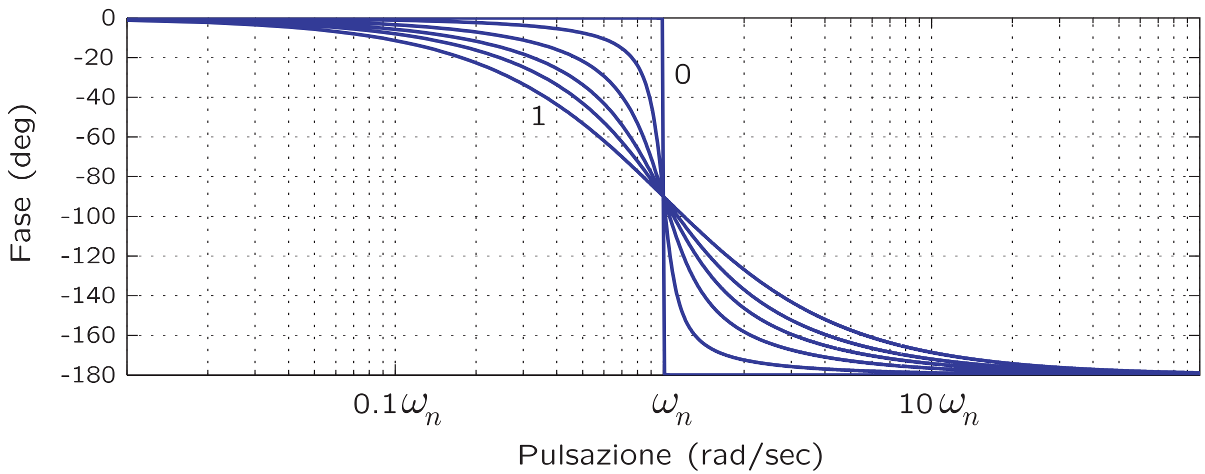
Fattore Trinomio a denominatore $\zeta \geq 0$

Dalle proprietà del modulo in dB e della fase

Modulo
(al variare di $0 \leq \zeta \leq 1$)

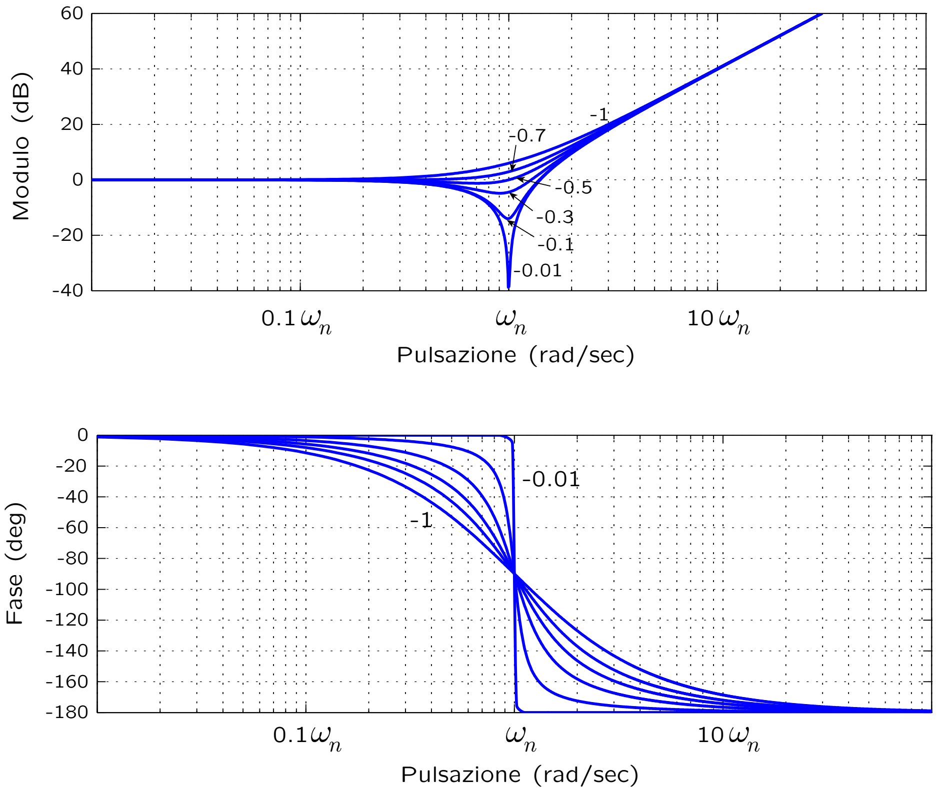


Fase
(al variare di $0 \leq \zeta \leq 1$)



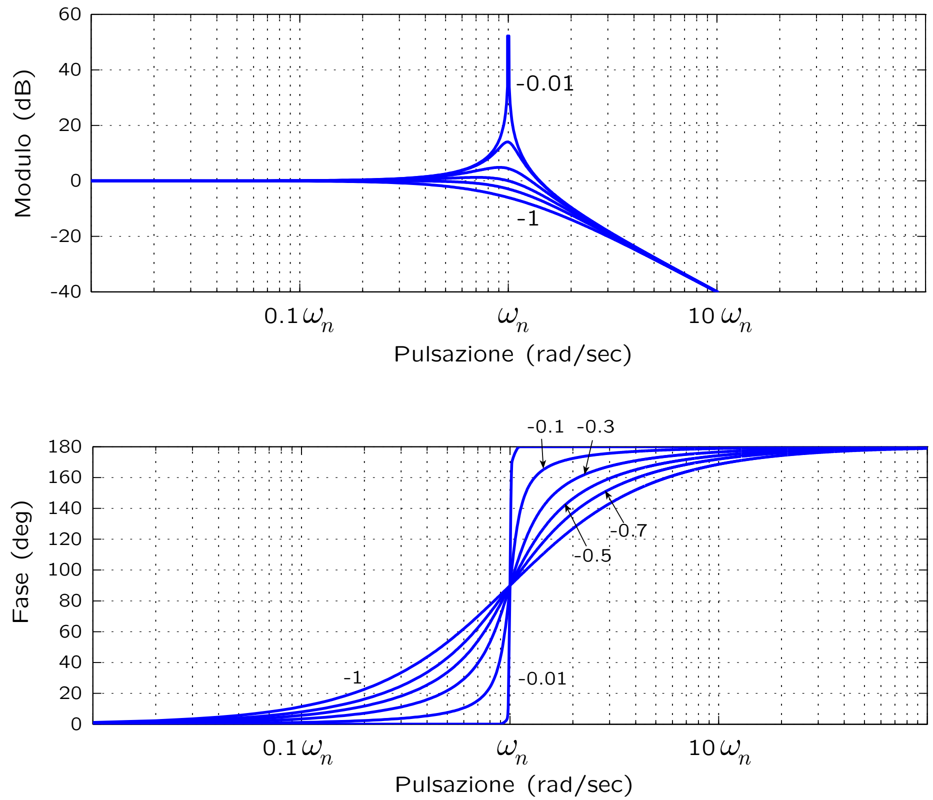
Fattore Trinomio a numeratore/denominatore $\zeta < 0$

Modulo non cambia, fase cambia di segno



Trinomio a Numeratore

$$-1 \leq \zeta < 0$$



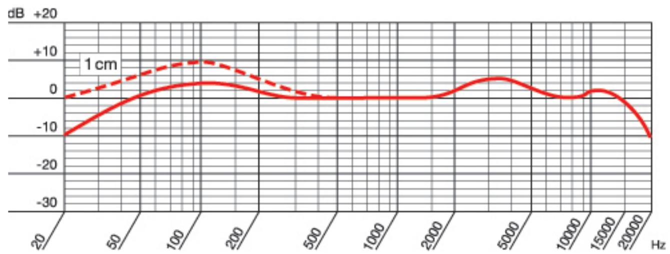
Trinomio a Denominatore

$$-1 \leq \zeta < 0$$

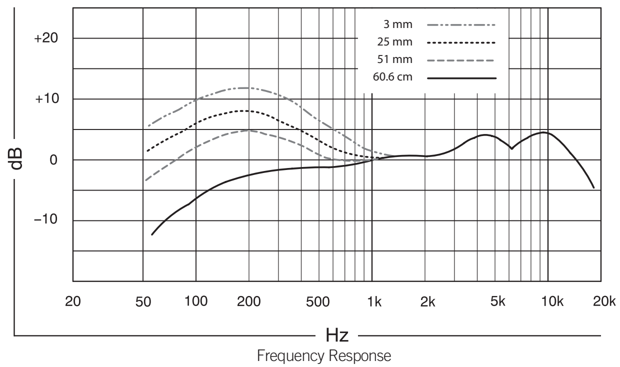
Qualche esempio reale

Microfono

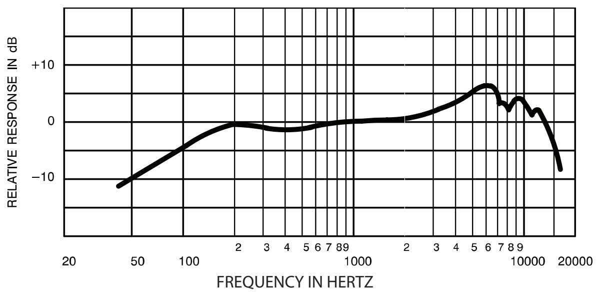
- frequenze udibili dall'orecchio umano: dai 20 Hz ai 20 KHz
- microfoni "specializzati" che esaltano determinati campi di frequenza



Tipico microfono usato per una grancassa (amplifica leggermente le basse frequenze)



Microfono professionale per la voce (leggera amplificazione delle frequenze del "parlato")



Microfono per amplificatori di chitarra elettrica

Sistema MMS

Il sistema Massa-Molla-Smorzatore (MMS), scegliendo la posizione come uscita misurata, è rappresentato dalla funzione di trasferimento

$$F(s) = \frac{1}{Ms^2 + \mu s + K}$$

Si hanno i seguenti casi al variare di $\mu > 0$ (sistema stabile asintoticamente)

- Basso smorzamento: $0 < \mu < 2\sqrt{KM}$ (autovalori complessi e coniugati)

$$p_{1,2} = \frac{-\frac{\mu}{M} \pm j\sqrt{4\left(\frac{K}{M}\right) - \left(\frac{\mu}{M}\right)^2}}{2}$$

- Smorzamento medio: $\mu = 2\sqrt{KM}$ (2 autovalori reali coincidenti)

$$p_{1,2} = -\frac{\mu}{2M}$$

- Elevato smorzamento: $\mu > 2\sqrt{KM}$ (2 autovalori reali distinti)

$$p_{1,2} = \frac{-\frac{\mu}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{M}\right)^2 - 4\left(\frac{K}{M}\right)}}{2}$$

Sistema MMS

I diagrammi di Bode sono caratterizzati dal guadagno $K_p = 1/K$ e da

- Per $0 < \mu < 2\sqrt{KM}$ si ha un fattore trinomio con*

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \text{e} \quad \zeta = \frac{\mu}{2\sqrt{KM}}$$

- Per $\mu = 2\sqrt{KM}$ doppio fattore binomio con

$$\text{pulsazione di rottura} \quad \frac{1}{\tau} = -p_{1,2} = \frac{\mu}{2M} = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

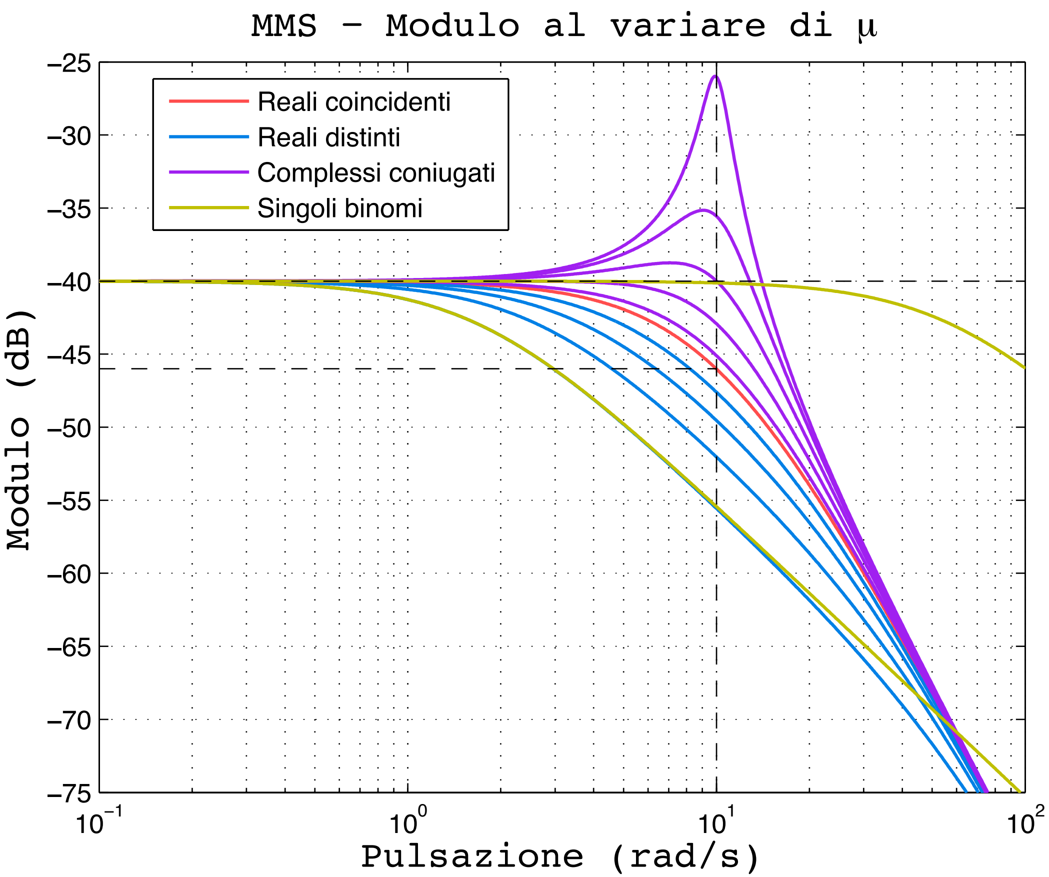
- Per $\mu > 2\sqrt{KM}$ due fattori binomi con

$$\frac{1}{\tau_1} = -p_1 > \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\tau_2} = -p_2 < \sqrt{\frac{K}{M}}$$

*Si noti che per $0 < \mu < 2\sqrt{KM}$ il coefficiente di smorzamento ζ varia coerentemente tra 0 e 1, estremi esclusi.

Sistema MMS

Andamenti del modulo al variare di μ con $K = 100\, N/m$ e $M = 1\, kg$.



Sono stati riportati anche i singoli andamenti dei fattori binomi distinti per evidenziare l'importanza del contributo relativo al fattore con pulsazione di rottura più bassa (polo dominante) corrispondente al polo reale negativo più vicino all'origine.