Autovalori complessi e coniugati*

Notazioni

$$\lambda_1 = \alpha + j\omega, \qquad \lambda_1^* = \alpha - j\omega$$

$$A_R = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{matrice ad elementi reali} \tag{1}$$

$$A_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + j\omega & 0 \\ 0 & \alpha - j\omega \end{pmatrix}, \quad \text{matrice diagonale ad elementi complessi} \tag{2}$$

Le due matrici A_R e A_D hanno gli stessi autovalori (λ_1, λ_1^*).

Data una generica matrice A (2×2) caratterizzata dalla coppia di autovalori complessi e coniugati (λ_1, λ_1^*).

• All'autovalore λ_1 corrisponde l'autovettore u_1 complesso

$$u_1 = u_a + j\, u_b, \qquad \text{con} \qquad u_a = \mathrm{Re}\{u_1\}, \quad u_b = \mathrm{Im}\{u_1\} \tag{3}$$

(u_a e u_b vettori a elementi reali).

• Si noti che la relazione complessa $Au_1 = \lambda_1 u_1$ (definizione di autovettore e autovalore) può essere riscritta come due relazioni reali

$$Au_a = \alpha u_a - \omega u_b = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\omega \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$Au_b = \omega u_a + \alpha u_b = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \alpha \end{pmatrix} \tag{5}$$

Dim. Le due equazioni si ottengono esplicitando le grandezze complesse

$$Au_1 = A(u_a + ju_b) = Au_a + jAu_b$$

e

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 &= (\alpha + j\omega)(u_a + ju_b) \\ &= (\alpha u_a - \omega u_b) + j(\omega u_a + \alpha u_b) \end{aligned}$$

---

*Versione temporanea del October 19, 2012 con A, u_a e u_b a elementi reali e uguagliando le parti reali e le parti immaginarie. ∎

• All'autovalore λ_1^* corrisponde l'autovettore u_1^*.

Dim. Basta osservare che sicuramente la relazione

$$\begin{aligned} Au_1^* &= \lambda_1^* u_1^* \\ A(u_a - ju_b) &= (\alpha - j\omega)(u_a - ju_b) \\ &= (\alpha u_a - \omega u_b) - j(\omega u_a + \alpha u_b) \end{aligned}$$

è vera in quanto corrisponde proprio alle equazioni (4) e (5). ∎

• La matrice A è caratterizzata da 2 autovalori distinti (λ_1, λ_1^*) e quindi è diagonalizzabile[1] tramite il cambiamento di coordinate T_D definito come

$$T_D^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_1^* \end{pmatrix}$$

Dim. Caso di autovalori distinti.

• Il particolare cambiamento di coordinate (a elementi reali) T_R che porta una generica matrice A caratterizzata dalla coppia di autovalori (λ_1, λ_1^*) nella forma A_R è la matrice non singolare

$$T_R^{-1} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \tag{6}$$

Dim. Si noti che le due equazioni (4) e (5) possono essere riscritte in forma più compatta come

$$A \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

e cioè

$$A \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} A_R \tag{7}$$

Se si definisce con T_R la matrice non singolare

$$T_R^{-1} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix}$$

la (7) diventa

$$AT_R^{-1} = T_R^{-1} A_R$$

e cioè

$$A_R = T_R \, A \, T_R^{-1} \tag{8}$$

∎

• Riassumendo

$$\begin{aligned} &\exists\, T_D \text{ non singolare}: \; T_D^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_1^* \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad A_D = T_D \, A \, T_D^{-1} \\ &\exists\, T_R \text{ non singolare}: \; T_R^{-1} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad A_R = T_R \, A \, T_R^{-1} \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$A_D = T_D \, A \, T_D^{-1} \quad \text{e} \quad A = T_D^{-1} A_D \, T_D, \quad \text{con} \quad A_D \text{ e } T_D \text{ complessi} \tag{9}$$

$$A_R = T_R \, A \, T_R^{-1} \quad \text{e} \quad A = T_R^{-1} A_R \, T_R, \quad \text{con} \quad A_R \text{ e } T_R \text{ reali} \tag{10}$$

[1] Condizione sufficiente ma non necessaria.

• Si noti infine che dalle due espressioni equivalenti di A in (9) e (10) si ha il cambiamento di coordinate (complesso) tra le due matrici, A_R reale e A_D complessa

$$\begin{aligned} A_R &= T_R\, T_D^{-1}\, A_D\, T_D\, T_R^{-1} = \left[T_R\, T_D^{-1}\right] A_D \left[T_R\, T_D^{-1}\right]^{-1} & (11) \\ A_D &= T_D\, T_R^{-1}\, A_R\, T_R\, T_D^{-1} = \left[T_D\, T_R^{-1}\right] A_R \left[T_D\, T_R^{-1}\right]^{-1} & (12) \end{aligned}$$

in altri termini la matrice (complessa)

$$T_{RD} = T_D\, T_R^{-1} \tag{13}$$

diagonalizza la matrice A_R.

• Vogliamo calcolare l'evoluzione libera a partire da una condizione iniziale generica $x(0)$. Si possono seguire due percorsi alternativi (ovviamente equivalenti):

$$\begin{aligned} e^{At}x(0) &= e^{T_R^{-1}\, A_R\, T_R\, t}x(0) = T_R^{-1}\, e^{A_R t}\, T_R\, x(0) & (14) \\ e^{At}x(0) &= e^{T_D^{-1}\, A_D\, T_D\, t}x(0) = T_D^{-1}\, e^{A_D t}\, T_D\, x(0) & (15) \end{aligned}$$

Dim. Definiamo le seguenti grandezze

$$T_R\, x(0) = \begin{pmatrix} c_a \\ c_b \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad x(0) = T_R^{-1} \begin{pmatrix} c_a \\ c_b \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad x(0) = c_a\, u_a + c_b\, u_b \tag{16}$$

$$T_D\, x(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1^* \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad x(0) = T_D^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1^* \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad x(0) = c_1\, u_1 + c_1^*\, u_1^* \tag{17}$$

Si noti che

▷ $T_R x(0)$ è un vettore a componenti reali c_a e c_b essendo la matrice T_R a elementi reali così come i vettore u_a e u_b (per definizione);

▷ $T_D x(0)$ è un vettore a componenti complessi c_1 e c_1^* essendo la matrice T_D a elementi complessi così come i vettore u_1 e u_1^*. Si può esprimere il coefficiente complesso c_1 esplicitando la sua parte reale e immaginaria

$$c_1 = c_{1a} + jc_{1b}, \qquad \text{con} \qquad c_{1a} = \mathrm{Re}\{c_1\}, \quad c_{1b} = \mathrm{Im}\{c_1\} \tag{18}$$

Si possono quindi definire le quantità

$$m_R, \varphi_R \quad \text{t.c.} \quad m_R = \sqrt{c_a^2 + c_b^2}, \quad c_a = m_R \sin\varphi_R, \quad c_b = m_R \cos\varphi_R \tag{19}$$

$$m_D, \varphi_D \quad \text{t.c.} \quad m_D = \sqrt{c_{1a}^2 + c_{1b}^2}, \quad c_{1a} = m_D \cos\varphi_D, \quad c_{1b} = m_D \sin\varphi_D \tag{20}$$

Calcoliamo in primo luogo

$$e^{A_D t} \quad \text{e} \quad e^{A_R t}$$

Per la prima si usa la formula di Eulero $e^{j\vartheta} = \cos\vartheta + j\sin\vartheta$

$$\begin{aligned} e^{A_D t} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1^* t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(\alpha+j\omega)t} & 0 \\ 0 & e^{(\alpha-j\omega)t} \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} e^{j\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-j\omega t} \end{pmatrix} \\ &= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\omega t + j\sin\omega t & 0 \\ 0 & \cos\omega t - j\sin\omega t \end{pmatrix} & (21) \end{aligned}$$

Per il calcolo di $e^{A_R t}$ si sfruttano le seguenti due osservazioni.

▷ La matrice A_R può essere riscritta come

$$A_R = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$$

Sfruttando la commutatività delle due matrici[2] si può scrivere

$$\begin{aligned} e^{A_R t} &= e^{\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} t} = e^{\left\{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} t\right\}} & (22) \\ &= e^{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} t} e^{\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} t} & (23) \\ &= e^{\alpha t} e^{\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} t} & (24) \end{aligned}$$

▷ Per il calcolo della matrice anti-simmetrica si usa la definizione di esponenziale di matrice

$$\begin{aligned} e^{\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}^k \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 \\ \omega^3 & 0 \end{pmatrix} + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega^2 t^2}{2} + \cdots & \omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \cdots \\ -\omega t + \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \cdots & 1 - \frac{\omega^2 t^2}{2} + \cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} & (25) \end{aligned}$$

Mettendo insieme le varie relazioni si ottengono le seguenti espressioni equivalenti dell'evoluzione libera, Incominciando dalla (14) e sfruttando la (25)

$$\begin{aligned} e^{At}x(0) &= T_R^{-1}\, e^{A_R t}\, T_R\, x(0) \\ &= \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_a \\ c_b \end{pmatrix} \qquad \text{da (16)} \\ &= m_R\, e^{\alpha t} \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\varphi_R \\ \cos\varphi_R \end{pmatrix} \qquad \text{da (19)} \\ &= m_R\, e^{\alpha t} \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega t\, \sin\varphi_R + \sin\omega t\, \cos\varphi_R \\ -\sin\omega t\, \sin\varphi_R + \cos\omega t\, \cos\varphi_R \end{pmatrix} \\ &= m_R\, e^{\alpha t} \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\omega t + \varphi_R) \\ \cos(\omega t + \varphi_R) \end{pmatrix} \\ e^{At}x(0) &= m_R\, e^{\alpha t} \left\{ \sin(\omega t + \varphi_R)\, u_a + \cos(\omega t + \varphi_R)\, u_b \right\} & (26) \end{aligned}$$

Calcolando l'evoluzione libera nello stato dalla (15), sfruttando le (21), (17), (18) e la (20)

$$\begin{aligned} e^{At}x(0) &= e^{A_D t}\, T_D\, x(0) \\ &= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} u_1 & u_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega t + j\sin\omega t & 0 \\ 0 & \cos\omega t - j\sin\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1a} + jc_{1b} \\ c_{1a} - jc_{1b} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[2]Si ricorda che $e^{M+N} = e^M e^N$ sse le due matrici commutano nel prodotto i.e. $M \cdot N = N \cdot M$.

$$
\begin{aligned}
&= m_D\, e^{\alpha t} \begin{pmatrix} u_1 & u_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega t + j\sin\omega t & 0 \\ 0 & \cos\omega t - j\sin\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi_D + j\sin\varphi_D \\ \cos\varphi_D - j\sin\varphi_D \end{pmatrix} \\
&= m_D\, e^{\alpha t} \begin{pmatrix} u_a + ju_b & u_a - ju_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\cos\omega t + j\sin\omega t)(\cos\varphi_D + j\sin\varphi_D) \\ (\cos\omega t - j\sin\omega t)(\cos\varphi_D - j\sin\varphi_D) \end{pmatrix} \\
&= 2m_D\, e^{\alpha t} \left\{ (\cos\omega t \cos\varphi_D - \sin\omega t \sin\varphi_D)\, u_a - (\sin\omega t \cos\varphi_D + \cos\omega t \sin\varphi_D)\, u_b \right\} \\
e^{At}x(0) &= 2m_D\, e^{\alpha t} \left\{ \cos(\omega t + \varphi_D)\, u_a - \sin(\omega t + \varphi_D)\, u_b \right\} \qquad (27)
\end{aligned}
$$

nella quale sono state usate le note formule

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta
\end{aligned}
$$

■

• Confrontando le espressioni di (26) e (27), si potrebbe pensare di aver ottenuto due risultati diversi. A tal proposito si noti che, essendo

$$
\frac{u_1 + u_1^*}{2} = u_a, \qquad \frac{u_1 - u_1^*}{2j} = u_b
$$

lo stato iniziale generico $x(0)$ si può riscrivere come

$$
\begin{aligned}
x(0) &= c_a\, u_a + c_b\, u_b \\
&= c_a\, \frac{u_1 + u_1^*}{2} + c_b\, \frac{u_1 - u_1^*}{2j} \\
&= \frac{c_a - jc_b}{2}\, u_1 + \frac{c_a + jc_b}{2}\, u_1^*
\end{aligned}
$$

la quale, confrontandola con la (17) e la (18), implica

$$
c_1 = \frac{c_a - jc_b}{2} = \frac{c_a}{2} + j\frac{-c_b}{2} \quad \longrightarrow \quad c_{1a} = \frac{c_a}{2}, \quad c_{1b} = \frac{-c_b}{2}
$$

Sostituendo tali espressioni nelle posizioni (20) e sfruttando le (19) si ha

$$
\begin{aligned}
m_D \quad &= \quad \sqrt{c_{1a}^2 + c_{1b}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{c_a^2 + c_b^2} = \frac{m_R}{2} \\
c_{1a} = \frac{c_a}{2} \quad &\Rightarrow \quad m_D \cos\varphi_D = \frac{m_R}{2} \sin\varphi_R \\
c_{1b} = \frac{-c_b}{2} \quad &\Rightarrow \quad m_D \sin\varphi_D = -\frac{m_R}{2} \cos\varphi_R
\end{aligned}
$$

e pertanto

$$
\begin{aligned}
m_D &= \frac{m_R}{2} \\
\sin\varphi_R &= \cos\varphi_D \\
\cos\varphi_R &= -\sin\varphi_D
\end{aligned}
$$

In conclusione, le due espressioni dell'evoluzione libera (26) e (27) sono equivalenti in quanto valgono le relazioni

$$
\begin{aligned}
m_D &= \frac{m_R}{2} \qquad (28) \\
\varphi_D &= \varphi_R - \frac{\pi}{2} \qquad (29)
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

• Riassumendo, si possono usare due rappresentazioni equivalenti dell'evoluzione nello stato (e in uscita) nel caso di autovalori complessi e coniugati:

Caso A) Si diagonalizza la matrice A ottenendo A_D diagonale ad elementi complessi:

$$\begin{aligned}
\exists\, T_D \text{ non singolare}: \; T_D^{-1} &= \begin{pmatrix} u_1 & u_1^* \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad A_D = T_D\, A\, T_D^{-1} \\
e^{At}x(0) &= e^{T_D^{-1}\, A_D\, T_D\, t}x(0) = T_D^{-1}\, e^{A_D t}\, T_D\, x(0) \\
T_D\, x(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1^* \end{pmatrix} \longrightarrow x(0) &= T_D^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1^* \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad x(0) = c_1\, u_1 + c_1^*\, u_1^* \\
m_D, \varphi_D \;\text{ tale che }\; m_D &= \sqrt{c_{1a}^2 + c_{1b}^2}, \quad c_{1a} = m_D \cos\varphi_D, \quad c_{1b} = m_D \sin\varphi_D \\
e^{At}x(0) &= 2m_D\, e^{\alpha t} \left\{\cos\left(\omega t + \varphi_D\right) u_a - \sin\left(\omega t + \varphi_D\right) u_b\right\}
\end{aligned}$$

Caso B) Si trasforma attraverso un opportuno cambiamento di variabili la matrice in una particolare matrice ad elementi reali (A_R)

$$\begin{aligned}
\exists\, T_R \text{ non singolare}: \; T_R^{-1} &= \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad A_R = T_R\, A\, T_R^{-1} \\
e^{At}x(0) &= e^{T_R^{-1}\, A_R\, T_R\, t}x(0) = T_R^{-1}\, e^{A_R t}\, T_R\, x(0) \\
T_R\, x(0) = \begin{pmatrix} c_a \\ c_b \end{pmatrix} \longrightarrow x(0) &= T_R^{-1} \begin{pmatrix} c_a \\ c_b \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad x(0) = c_a\, u_a + c_b\, u_b \\
m_R, \varphi_R \;\text{ tale che }\; m_R &= \sqrt{c_a^2 + c_b^2}, \quad c_a = m_R \sin\varphi_R, \quad c_b = m_R \cos\varphi_R \\
e^{At}x(0) &= 2m_D\, e^{\alpha t} \left\{\cos\left(\omega t + \varphi_D\right) u_a - \sin\left(\omega t + \varphi_D\right) u_b\right\}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Esempio
Calcolare l'evoluzione libera nello stato del sistema

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} x(t)
\end{aligned}$$

a partire da

$$x(0) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Soluzione)
Autovalori e autovettori

$$\lambda_1 = 1 + 2j \quad \to \quad u_1 = \begin{pmatrix} j \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = \lambda_1^* = 1 - 2j \quad \to \quad u_2 = u_1^* = \begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix}$$

pertanto

$$u_a = \mathrm{Re}\left\{u_1\right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_b = \mathrm{Im}\left\{u_1\right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e quindi c_a e c_b devono essere tali che (in alternativa si usa la formula (16))

$$x(0) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = c_1\ u_a + c_b\ u_b = c_a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè

$$c_a = \frac{1}{2}, \qquad c_b = -\frac{1}{2}$$

Si ottengono le quantità (19)

$$\begin{aligned} m_R &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi_R &= \frac{c_a}{m_R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\varphi_R &= \frac{c_b}{m_R} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

da cui

$$\varphi_R = \frac{3\pi}{4}$$

Dalla formula generale (26) si ha

$$\begin{aligned} x_\ell(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \left[\sin\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \begin{pmatrix} \cos\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) \\ \sin\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mentre l'evoluzione libera in uscita è data da

$$y_\ell(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \left[\cos\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) \right]$$

In alternativa, volendo utilizzare la formula (27), si ha

$$T_D^{-1} = \begin{pmatrix} j & -j \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1^* \end{pmatrix} = T_D x(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -j & 1 \\ j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+j \\ 1-j \end{pmatrix}$$

e quindi $c_1 = 1/4 + 1/4j$ da cui $c_{1a} = 1/4$ e $c_{1b} = 1/4$. Utilizzando le posizioni (20) si ottiene

$$\begin{aligned} m_D &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \cos\varphi_D &= \frac{c_{1a}}{m_D} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi_D &= \frac{c_{1b}}{m_D} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

e cioè

$$\varphi_D = \frac{\pi}{4}$$

Le relazioni (28) e (29) sono ovviamente verificate; si ottiene

$$
\begin{aligned}
x_\ell(t) &= 2\frac{1}{2\sqrt{2}}e^t\left[\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}e^t\begin{pmatrix}\cos\left(2t+\frac{3\pi}{4}\right)\\ \sin\left(2t+\frac{3\pi}{4}\right)\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$
