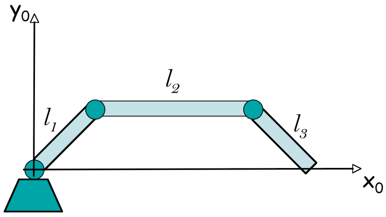
Prova Scritta di Robotica I

7 Gennaio 2008

Esercizio 1

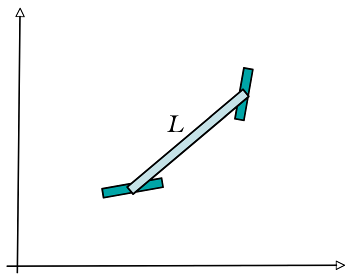


Si consideri il robot planare a tre giunti rotatori nella configurazione mostrata in figura. Le lunghezze dei bracci sono

$$l_1 = 0.5, \qquad l_2 = 1, \qquad l_3 = 0.5 \quad [\mathrm{m}].$$

- Si determini il valore del vettore $\dot{\theta}$ di velocità istantanea dei giunti che faccia muovere l'organo terminale del robot lungo l'asse x_0 con una velocità lineare pari a 0.7 [m/s], mantenendone costante l'orientamento.
- Si analizzino le singolarità cinematiche di tale robot per compiti congiunti di posizionamento e orientamento nel piano.

Esercizio 2



La figura rappresenta schematicamente un robot mobile con due ruote, entrambe ad orientamento variabile, poste ad una distanza L (lunghezza del veicolo). Scelte le variabili di configurazione ed espressi in termini di esse i vincoli di puro rotolamento delle due ruote, ricavare un modello cinematico nella forma $\dot{q} = G(q)\,u$ che descriva (nello spazio delle configurazioni) tutti i moti istantanei ammissibili del veicolo.

Tra le diverse scelte possibili, si definiscano le colonne $g_i(q)$ della matrice $G(q)$ in modo tale che gli ingressi u_i ad esse associate abbiano una corrispondenza fisica con comandi di velocità lineare (ossia, di avanzamento) e/o angolare (ossia, di sterzo) delle due ruote. Si discutano infine le eventuali situazioni di stallo (singolarità del modello).

[120 minuti di tempo; libri aperti]

Soluzioni

7 Gennaio 2008

Esercizio 1

Utilizzando le variabili di Denavit-Hartenberg (angoli relativi tra i bracci), la configurazione in figura corrisponde al valore

$$\bar{\theta} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}^T .$$

Il compito richiesto è tridimensionale ed è definito dal vettore di task

$$r = \begin{pmatrix} p_x & p_y & \alpha \end{pmatrix}^T ,$$

dove α è l'orientamento assoluto dell'organo terminale (terzo braccio). Per questo tipo di compito il robot non è ridondante. La cinematica diretta è data da

$$\begin{aligned} p_x &= l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} \\ p_y &= l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123} \\ \alpha &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3, \end{aligned}$$

con la usuale notazione $c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$ e simili. Derivando, si ha

$$\dot{r} = \begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -(l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} = J(\theta)\dot{\theta}.$$

Sostituendo i valori numerici di $\bar{\theta}$ e l_i $(i = 1, 2, 3)$, si ottiene

$$J(\bar{\theta}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

La soluzione per il moto desiderato è quindi[1]

$$\dot{\theta}_d = J^{-1}(\bar{\theta})\dot{r}_d = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \\ 1 + \frac{4}{\sqrt{2}} & 1 & -(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ -1 & -1 & 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.7 \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 1 + \frac{4}{\sqrt{2}} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1.9799 \\ 2.6799 \\ -0.7 \end{pmatrix} \text{[rad/s]}.$$

[1] In questo caso sarebbe sufficiente calcolare la sola prima colonna dell'inversa dello Jacobiano.

Allo stesso risultato si sarebbe ovviamente arrivati lavorando con le coordinate assolute (angoli rispetto all'asse x_0) definite dalla

$$q = T\,\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \theta \qquad \text{(e anche } \dot{q} = T\,\dot{\theta}\text{)}.$$

In tal caso si avrebbe

$$r = f(q) = \begin{pmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_2 + l_3 c_3 \\ l_1 s_1 + l_2 s_2 + l_3 s_3 \\ q_3 \end{pmatrix},$$

con la notazione $c_i = \cos q_i$, $s_i = \sin q_i$. Derivando

$$\dot{r} = \frac{\partial f(q)}{\partial q}\,\dot{q} = J(q)\,T\,\dot{\theta}$$

dove lo Jacobiano rispetto alle q assume la forma più semplice

$$J(q) = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 & -l_2 s_2 & -l_3 s_3 \\ l_1 c_1 & l_2 c_2 & l_3 c_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

La configurazione mostrata in figura corrisponde a

$$\bar{q} = T\,\bar{\theta} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & 0 & -\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}^T,$$

da cui si ha

$$J(\bar{q}) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$\dot{q}_d = J^{-1}(\bar{q})\,\dot{r}_d = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.7 \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui si ritrova

$$\theta_d = T^{-1}\,\dot{q}_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \dot{q}_d = 0.7 \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 1 + \frac{4}{\sqrt{2}} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Le coordinate assolute risultano più comode per lo studio delle singolarità cinematiche. Infatti, dalla (1) si ha immediatamente

$$\det J(q) = l_1 l_2 \sin(q_2 - q_1) = l_1 l_2 \sin\theta_2.$$

Il robot si trova quindi in una configurazione singolare per il compito congiunto di posizionamento e orientamento nel piano se e solo se il secondo braccio è allineato con il primo ($\theta_2 = 0$ o π).

Esercizio 2

Il robot mobile considerato ha una struttura cinematica completamente simmetrica rispetto alla marcia avanti o indietro. Si indichi con (x_1, y_1) la posizione di una (qualsiasi) delle due ruote, con θ l'orientamento assoluto dell'asse longitudinale (nel verso dalla ruota 1 alla ruota 2, vedi Figura 1) del veicolo e con ϕ_1 e, rispettivamente, ϕ_2 i due angoli (positivi in senso antiorario) che caratterizzano l'orientamento variabile delle ruote 1 e 2 rispetto all'asse longitudinale del veicolo.

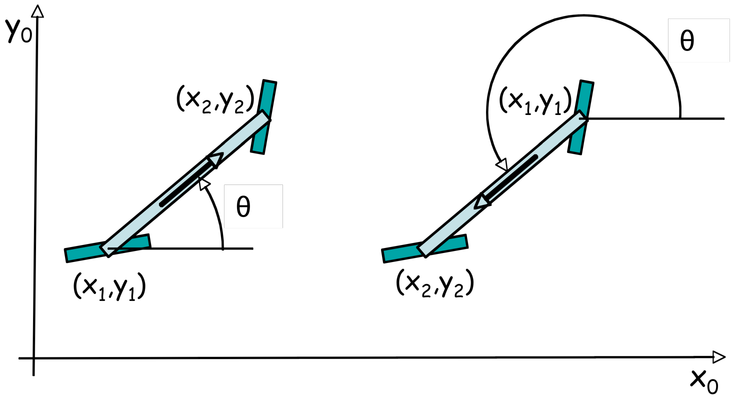


Figura 1: Definizione dell'orientamento θ dell'asse longitudinale del veicolo

La configurazione del robot mobile è pertanto caratterizzata dalle 5 variabili

$$q = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \theta & \phi_1 & \phi_2 \end{pmatrix}^T.$$

La posizione della seconda ruota è data dalle

$$x_2 = x_1 + L\cos\theta, \qquad y_2 = y_1 + L\sin\theta. \tag{2}$$

I vincoli di puro rotolamento delle due ruote si scrivono nella forma usuale

$$\dot{x}_1 \sin(\theta + \phi_1) - \dot{y}_1 \cos(\theta + \phi_1) = 0,$$

$$\dot{x}_2 \sin(\theta + \phi_2) - \dot{y}_2 \cos(\theta + \phi_2) = 0.$$

Sostituendo nel secondo vincolo

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - \dot{\theta}\, L\sin\theta, \qquad \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + \dot{\theta}\, L\cos\theta, \tag{3}$$

si ottiene, con semplificazioni trigonometriche,

$$\dot{x}_1 \sin(\theta + \phi_2) - \dot{y}_1 \cos(\theta + \phi_2) - \dot{\theta} L \cos\phi_2 = 0.$$

Pertanto i vincoli si possono mettere nella forma $A(q)\,\dot{q} = 0$, con la matrice (2×5)

$$A(q) = \begin{pmatrix} \sin(\theta + \phi_1) & -\cos(\theta + \phi_1) & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\theta + \phi_2) & -\cos(\theta + \phi_2) & -L\cos\phi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per determinare tutti i moti istantanei ammissibili del veicolo occorre trovare una base per il nucleo della matrice $A(q)$. Poichè tale nucleo ha dimensione $5 - 2 = 3$ (numero delle colonne $-$ numero delle righe di $A(q)$, essendo le due righe di $A(q)$ a rango genericamente pieno), occorre trovare tre vettori linearmente indipendenti $g_i(q)$, $i = 1, 2, 3$, tali che

$$A(q) g_i(q) = 0 \quad (\forall q), \qquad i = 1, 2, 3.$$

E' immediato determinare due vettori di tale genere:

$$g_1(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g_2(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ad essi corrispondono i comandi $u_1 = \omega_1$ e $u_2 = \omega_2$ di velocità di sterzo, rispettivamente della ruota 1 e 2. Per ispezione, un terzo vettore linearmente indipendente nel nucleo di $A(q)$ ha l'espressione

$$g_3(q) = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi_1) \\ \sin(\theta + \phi_1) \\ \frac{1}{L}\sin(\phi_2 - \phi_1)\sec\phi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove $\sec\phi_2 = 1/\cos\phi_2$. Ad esso corrisponde il comando $u_3 = v_1$ di velocità lineare della ruota 1 (si ricordi che questa scelta tra le due ruote era arbitraria). Il modello cinematico del robot mobile con le proprietà richieste è dunque

$$\dot{q} = G(q)\,u = \begin{pmatrix} g_1(q) & g_2(q) & g_3(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

Quando $|\phi_2| = \pi/2$ ($\cos\phi_2 = 0$), si ha una situazione di stallo perchè nessuna velocità lineare $v_1 \neq 0$ è compatibile con il vincolo di puro rotolamento della ruota

2 (la terza componente di $g_3(q)$ "esplode"), a meno che non sia anche $|\phi_1| = \pi/2$. In tal caso si avrebbe infatti sia $\cos\phi_2 = 0$ che $\sin(\phi_2 - \phi_1) = 0$: la terza componente di $g_3(q)$ risulta una forma indeterminata $0/0$ che si può analizzare al limite mediante il teorema di De l'Hospital. Ad esempio:

$$\lim_{\substack{\phi_1 \to +\pi/2 \\ \phi_1 \to +\pi/2}} \frac{\sin(\phi_2 - \phi_1)}{L\cos\phi_2} = \lim_{\substack{\phi_1 \to +\pi/2 \\ \phi_1 \to +\pi/2}} \frac{\cos(\phi_2 - \phi_1)}{-L\sin\phi_2} = -\frac{1}{L}.$$

In questi casi si ha quindi $|\dot{\theta}| = |v_1|/L$, ovvero si ha una rotazione del veicolo intorno al punto di appoggio della ruota 2. Se si pone inoltre $\omega_1 = \omega_2 = 0$, l'orientamento delle due ruote rispetto all'asse longitudinale del veicolo rimane costante.

A complemento dell'esercizio, si riportano alcuni commenti finali.

- E' interessante notare che per $|\phi_2| \neq \pi/2$ e $\phi_1 = \phi_2 \pmod{\pi}$, si ha $\dot{\theta} = 0$ ed il veicolo procede linearmente lungo la direzione individuata dalla ruota 1 quando esso viene attuato solo con la velocità v_1.
- Non è possibile scegliere tra i comandi indipendenti entrambe le velocità lineari delle due ruote, pena lo slittamento delle stesse. Fissata infatti la velocità lineare di una delle due ruote, la velocità lineare dell'altra risulta univocamente determinata dalle equazioni del modello e dalla (3) oppure, in modo equivalente, attraverso la costruzione geometrica del centro istantaneo di rotazione (ICR) del veicolo.
- Si può facilmente mostrare che il modello del veicolo collassa in quello del "car-like" quando una delle due ruote è fissa ($\phi_i \equiv 0$, per $i = 1$ oppure $i = 2$), ovviamente eliminando la riga corrispondente alla variabile di orientamento della ruota fissata ed eliminando il relativo vettore g_i ($\omega_i \equiv 0$). In particolare:
  1. Per $\phi_1 \equiv 0$, si ottiene il modello a trazione posteriore (sulla ruota fissa) che conserva la stessa singolarità vista precedentemente ($|\phi_2| = \pi/2$),

  $$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ \frac{1}{L}\tan\phi_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}.$$

  2. Per $\phi_2 \equiv 0$, si ottiene il modello a trazione anteriore (sulla ruota sterzante) che non ha singolarità,

  $$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi_1) & 0 \\ \sin(\theta + \phi_1) & 0 \\ -\frac{1}{L}\sin\phi_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \omega_1 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Si noti però che le coordinate posizionali scelte originariamente come variabili di configurazione si riferiscono in questo caso alla ruota 1, ossia alla ruota anteriore. Per ritrovare esattamente il modello *FD* (*forward drive*) fornito nelle dispense, dove si impiega la posizione della ruota posteriore, si applica il cambiamento di coordinate

$$(x_1, y_1, \theta, \phi_1) \longrightarrow (x_2, y_2, \theta, \phi_1)$$

definito tramite la (2). Dalle (3) e (4), si ha

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi_1) + \sin\theta \sin\phi_1 \\ \sin(\theta + \phi_1) - \cos\theta \sin\phi_1 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \cos\phi_1 \, v_1.$$

Occorre inoltre "ribattezzare" l'orientamento del veicolo e il verso della velocità della ruota trattrice secondo le convenzioni usate nel modello del robot mobile car-like,

$$\theta = \theta_{\text{car}} + \pi, \qquad v_1 = -v_{\text{car}}.$$

Il risultato finale di tali trasformazioni è quindi

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\theta}_{\text{car}} \\ \dot{\phi}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{\text{car}} \cos\phi_1 & 0 \\ \sin\theta_{\text{car}} \cos\phi_1 & 0 \\ \dfrac{1}{L}\sin\phi_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{\text{car}} \\ \omega_1 \end{pmatrix}.$$

* * * * *