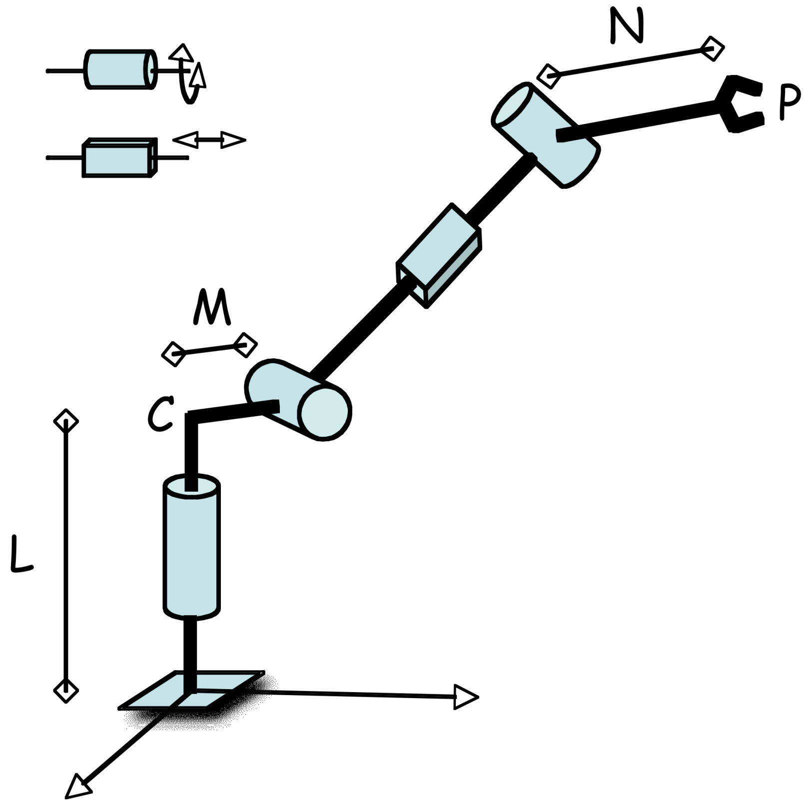
Prova Scritta di Robotica I

4 Dicembre 2006

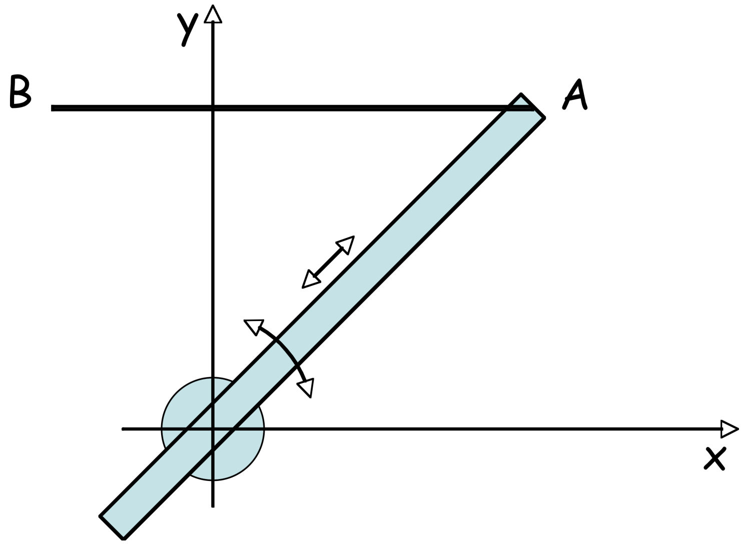
Esercizio 1



Nella struttura cinematica del robot a quattro gradi di libertà in figura, i primi due giunti ed il quarto sono rotazionali mentre il terzo è prismatico. Il robot è del tipo "ortogonale" (gli angoli di twist α_i tra assi di giunto consecutivi sono 0 o $\pm\pi/2$). L'asse di rotazione del secondo giunto si mantiene sempre orizzontale.

1. Assegnare le terne solidali ai bracci e determinare la tabella dei parametri associati secondo il formalismo di Denavit-Hartenberg.
2. Determinare l'espressione della cinematica diretta relativa al posizionamento del punto P.
3. Se il giunto prismatico ha corsa limitata, $q_{3,\min} \leq q_3 \leq q_{3,\max}$ (con $q_{3,\min} > 0$), qual è il raggio della minima sfera centrata nel punto C che contiene l'intero spazio di lavoro del robot?

Esercizio 2



Per il robot planare RP in figura si consideri un compito di moto rettilineo dal punto $A = (1, 1)$ [m] al punto $B = (-0.5, 1)$ [m], con velocità di partenza e arrivo nulle. Le massime velocità e accelerazioni cartesiane ammesse sono pari a $V_{\max} = 1$ m/s e, rispettivamente, $A_{\max} = 4$ m/s^2. Determinare la legge oraria che fornisce il tempo minimo di moto. Si verifichi quindi analiticamente (con eventuali approssimazioni del caso) se la soluzione trovata soddisfa i seguenti vincoli sulle velocità di giunto:

$$|\dot{q}_1| \leq 60°/\text{s}; \qquad |\dot{q}_2| \leq 0.5\,\text{m/s}.$$

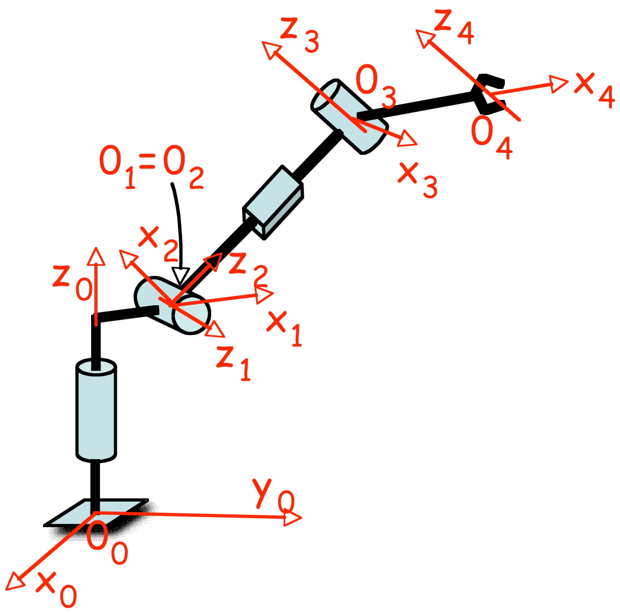
In caso contrario, qual è la minima scalatura temporale (uniforme per tutta la traiettoria) che garantisce l'ammissibilità del moto?

[120 minuti di tempo; libri aperti]

Soluzione

4 Dicembre 2006

Esercizio 1



Una possibile assegnazione delle terne è mostrata in figura. La tabella di Denavit-Hartenberg è la seguente:

i	α_i	d_i	a_i	θ_i
1	$\pi/2$	L	M	q_1
2	$\pi/2$	0	0	q_2
3	$\pi/2$	q_3	0	$\pi/2$
4	0	0	N	q_4

Si sarebbe anche potuto traslare la prima terna lungo z_0, fino a portare l'origine 0_0 nel punto C ($d_1 = 0$). Con tali dati, le matrici di trasformazione omogenea sono:

$$
{}^0A_1(q_1) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & Mc_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & Ms_1 \\ 0 & 1 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^1A_2(q_2) = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^2A_3(q_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^3A_4(q_4) = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & Nc_4 \\ s_4 & c_4 & 0 & Ns_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Svolgendo solo i prodotti necessari al calcolo della posizione di P (l'origine 0_4 della terna SR_4), si ha:

$$
{}^2A_4(q_3,q_4) = \begin{bmatrix} {}^2R_4(q_3,q_4) & \begin{matrix} 0 \\ Nc_4 \\ q_3 + Ns_4 \end{matrix} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^1A_4(q_2,q_3,q_4) = \begin{bmatrix} {}^1R_4(q_2,q_3,q_4) & \begin{matrix} s_2(q_3 + Ns_4) \\ -c_2(q_3 + Ns_4) \\ Nc_4 \end{matrix} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^0A_4(q_1,q_2,q_3,q_4) = \begin{bmatrix} {}^0R_4(q_1,q_2,q_3,q_4) & \begin{matrix} Mc_1 + c_1s_2(q_3 + Ns_4) + Ns_1c_4 \\ Ms_1 + s_1s_2(q_3 + Ns_4) - Nc_1c_4 \\ L - c_2(q_3 + Ns_4) \end{matrix} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix},
$$

dove l'ultima colonna individua l'espressione cercata per le componenti della posizione di P. Per semplice ispezione, il raggio minimo della sfera che include tutto lo spazio di lavoro del robot è pari a $M + N + q_{3,\max}$ (robot steso orizzontalmente).

Esercizio 2

Il cammino rettilineo è di lunghezza $L = \|B - A\| = 1.5$ [m] ed è definito parametricamente da

$$
p(s) = A + \frac{B - A}{L} s = \begin{bmatrix} 1 - s \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in [0, 1.5].
$$

In base ai vincoli cartesiani, si progetta una legge oraria a tempo minimo su tale cammino utilizzando un profilo trapezoidale per la velocità $\dot{s}(t)$. Poichè

$$
1.5 = L > \frac{V_{\max}^2}{A_{\max}} = 0.25,
$$

è presente il tratto a velocità costante pari a $V_{\max}$. Il tempo totale del moto è pertanto

$$
T = \frac{L}{V_{\max}} + \frac{V_{\max}}{A_{\max}} = 1.75\,\mathrm{s},
$$

con durata T_s dell'accelerazione iniziale e finale pari a 0.25 s. Nell'istante in cui subentra la massima velocità di moto cartesiano, il cammino percorso è pari a $s(T_s) = \frac{1}{2} A_{\max} T_s^2 = 0.125$ m.

La cinematica diretta del robot è

$$
p_x = q_2 \cos q_1 \qquad p_y = q_2 \sin q_1,
$$

dove q_1 è l'angolo del braccio 2 rispetto all'asse x e q_2 è la distanza dell'organo terminale dalla base del robot. In termini di velocità, si ha

$$v_x = -q_2 \sin q_1 \, \dot{q}_1 + \cos q_1 \, \dot{q}_2 \qquad v_y = -q_2 \cos q_1 \, \dot{q}_1 + \sin q_1 \, \dot{q}_2.$$

Tali legami differenziali sono sempre invertibili sul moto desiderato (il determinante dello Jacobiano associato è singolare solo per $q_2 = 0$). Nel seguito si ricaveranno le relazioni differenziali inverse lavorando per componenti (in modo del tutto equivalente a procedere invertendo lo Jacobiano). Il moto desiderato impone $v_x = -\dot{s}$ e $v_y = 0$. Da quest'ultima, notando che durante il moto si ha sempre $\sin q_1 > 0$, si ha il legame tra le due velocità di giunto:

$$v_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_2 = -q_2 \, \frac{\cos q_1}{\sin q_1} \, \dot{q}_1.$$

Sostituendo tale espressione nella $v_x = -\dot{s}$, si ottiene

$$-\dot{s} = -q_2 \sin q_1 \, \dot{q}_1 - q_2 \, \frac{\cos^2 q_1}{\sin q_1} \, \dot{q}_1 = -q_2 \, \frac{1}{\sin q_1} \, \dot{q}_1$$

da cui l'espressione della velocità del primo giunto associata al moto desiderato è

$$\dot{q}_1 = \frac{\dot{s} \sin q_1}{q_2}.$$

Si noti che il minimo valore di q_2 (sempre positivo) è pari a 1 e si ottiene in corrispondenza al punto in cui il cammino attraversa l'asse y. In corrispondenza dello stesso punto si hanno anche i massimi valori della velocità cartesiana ($\dot{s} = V_{\max} = 1$) e di $\sin q_1$ (pari a 1). Pertanto

$$\max |\dot{q}_1| = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1 \, \text{rad/s} < 60°/\text{s},$$

ed il moto è compatibile con il limite di velocità al primo giunto.

Sostituendo l'espressione di $\dot{q}_1$ in quella di $\dot{q}_2$ (entrambe associate alla traiettoria cartesiana desiderata), si ottiene infine

$$\dot{q}_2 = -\dot{s} \cos q_1.$$

Sul cammino desiderato, la funzione $\cos q_1$ decresce dal valore massimo positivo (pari a $\sqrt{2}/2$ nel punto A), inverte il segno in corrispondenza all'attraversamento dell'asse y per poi ricrescere (in modulo). In prima battuta, si può maggiorare $\dot{s}$ nel punto A (dove in effetti è nulla) sostituendovi il valore massimo $V_{\max} = 1$. Si ha allora

$$\max |\dot{q}_2| \leq V_{\max} \, \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707 \, \text{m/sec}.$$

Tale valore approssimato in eccesso risulterebbe incompatibile con il vincolo di velocità del secondo giunto. Un'analisi più accurata si ha risolvendo la cinematica inversa per il punto $p(s = 0.125)$, corrispondente all'istante in cui la velocità cartesiana raggiunge il massimo valore:

$$p(0.125) = \begin{bmatrix} 0.875 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad q = \begin{bmatrix} \text{ATAN2}\{p_y, p_x\} \\ \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.852\,[\text{rad}] \\ 1.329\,[\text{m}] \end{bmatrix},$$

dove si è assunto implicitamente $q_2 > 0$. Si ottiene quindi

$$\max |\dot{q}_2| = V_{\max} \cos(0.852) = 0.658\,\text{m/sec}.$$

eccessiva rispetto al vincolo.

Scalando uniformemente il tempo di moto di un fattore $k > 1$, e posta $\tau = kt$ la nuova variabile di tempo, si ha $\dot{s}(\tau) = ds/d\tau = (ds/dt) \cdot (dt/d\tau) = \dot{s}(t)/k$ — una riduzione proporzionale della velocità. Pertanto il recupero di ammissibilità si ottiene allungando il tempo di moto di un fattore

$$k = \frac{0.658}{0.5} = 1.317,$$

ottenendo il tempo totale di moto ammissibile $T' = 1.317 \cdot T = 2.305$ s. Il profilo finale di velocità trapezoidale sul cammino avrà fasi di accelerazione/decelerazione con $A' = A_{\max}/k^2 = 2.306$ m/s^2, di durata $T_s' = 1.317 \cdot T_s = 0.329$ s, e velocità massima di crociera $V' = V_{\max}/k = 0.759$ m/s.