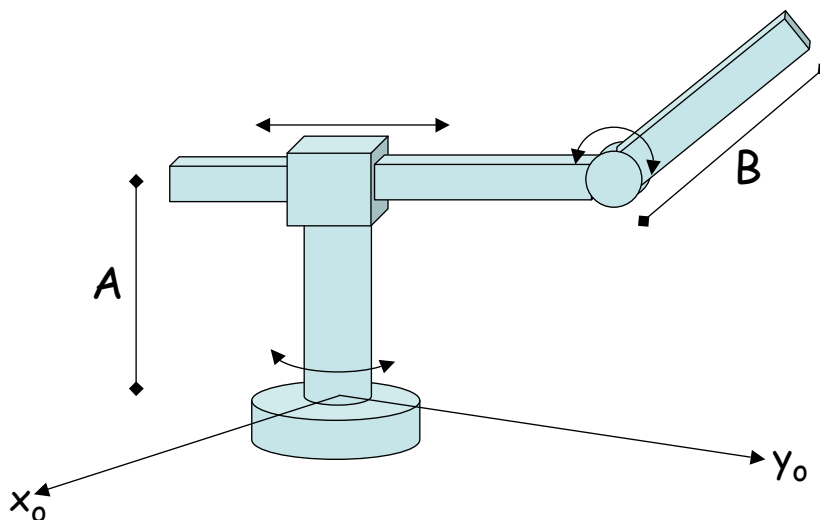


# Prova Scritta di Robotica I

16 Dicembre 2004

## Esercizio 1

Si consideri il robot *RPR* in figura.



1. Assegnare le terne di riferimento e ricavare la tabella dei parametri secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg.
2. Determinare l'espressione della posizione dell'organo terminale del robot in funzione delle variabili di giunto.
3. Analizzare le singolarità cinematiche. Esistono configurazioni nelle quali l'organo terminale ha una sola direzione ammissibile di moto?
4. Discutere qualitativamente se è possibile definire una traiettoria di moto che congiunga i due punti cartesiani

$$P_i = \begin{bmatrix} 0 \\ B \\ A + \frac{B}{2} \end{bmatrix} \quad P_f = \begin{bmatrix} 0 \\ -B \\ A - \frac{B}{2} \end{bmatrix}$$

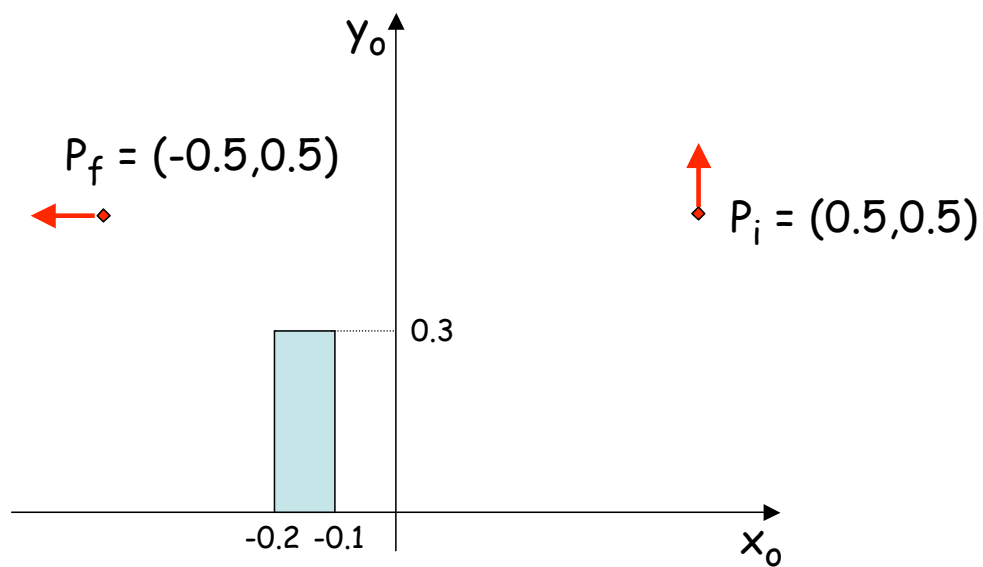
**senza** attraversare alcuna singolarità.

5. Disegnare lo spazio di lavoro nel caso in cui il giunto prismatico abbia un'escursione limitata tra  $-C$  e  $+C$ , con  $C \gg B$ .

## Esercizio 2

Con riferimento alla figura, pianificare un **cammino nello spazio dei giunti** per un robot planare  $2R$ , con bracci di lunghezza  $\ell_1 = \ell_2 = 0.5$  [m], tale da:

- congiungere i due punti cartesiani  $P_i$  e  $P_f$  con tangenti iniziale e finale al cammino lungo le direzioni indicate (vettori normalizzati a 1);
- avere tangente che vari con continuità lungo tutto il cammino;
- evitare collisioni con l'ostacolo.



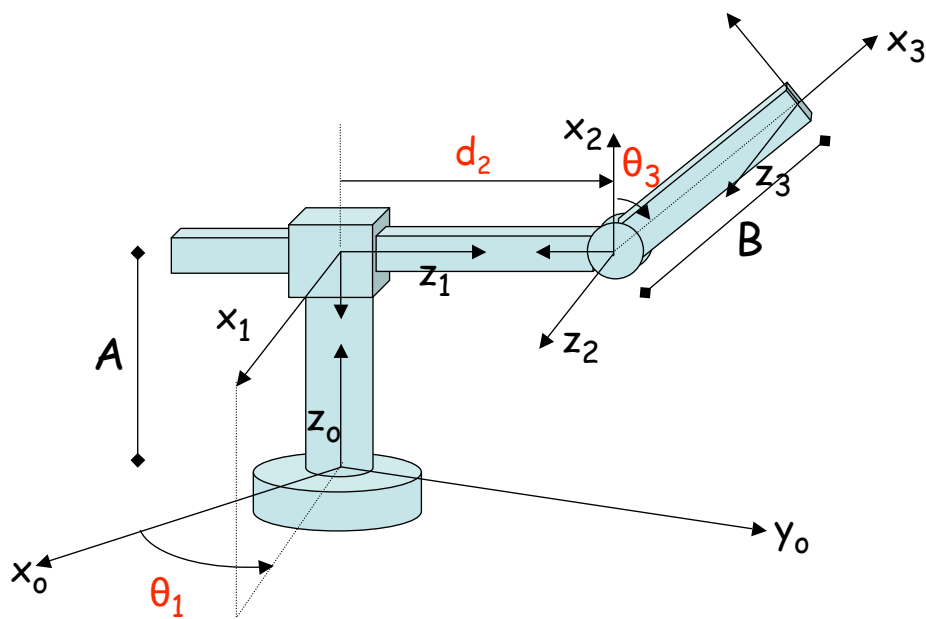
[180 minuti di tempo; libri aperti]

## Soluzioni

16 Dicembre 2004

### Soluzione Esercizio 1

Una possibile assegnazione delle terne  $SR_i$ , con  $i = 0, 1, 2, 3$ , è riportata in figura.



La tabella di Denavit-Hartenberg

$i$	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$-\frac{\pi}{2}$	0	$A$	$q_1$
2	$-\frac{\pi}{2}$	0	$q_2$	$-\frac{\pi}{2}$
3	0	$B$	0	$q_3$

fornisce le matrici di trasformazioni omogenee

$${}^0A_1(q_1) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2(q_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3(q_3) = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & Bs_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & Bs_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

in cui si è posto  $s_i = \sin q_i$ ,  $c_i = \cos q_i$  ( $i = 1, 3$ ).

Dalla cinematica diretta

$$T = {}^0A_1(q_1) {}^1A_2(q_2) {}^2A_3(q_3) = \begin{bmatrix} R & p \\ 0^T & 1 \end{bmatrix},$$

svolgendo i prodotti, si ottiene il vettore di posizione

$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(q_2 - Bs_3)s_1 \\ (q_2 - Bs_3)c_1 \\ A + Bc_3 \end{bmatrix},$$

di immediata interpretazione geometrica (in realtà si poteva arrivare a questo risultato senza passare dalle matrici di trasformazione omogenea).

La matrice Jacobiana ( $3 \times 3$ ) in  $v = \dot{p} = J(q)\dot{q}$  è

$$J(q) = \begin{bmatrix} -(q_2 - Bs_3)c_1 & -s_1 & Bs_1c_3 \\ -(q_2 - Bs_3)s_1 & c_1 & -Bc_1c_3 \\ 0 & 0 & -Bs_3 \end{bmatrix}$$

con determinante pari a  $Bs_3(q_2 - Bs_3)$ . Le singularità si hanno pertanto quando il terzo braccio è verticale ( $q_3 = \{0, \pi\}$ ) e/o quando l'organo terminale si trova sull'asse del primo giunto ( $q_2 - Bs_3 = 0$ ). In particolare, lo Jacobiano ha rango pari ad uno quando  $q_3 = 0$  (o  $\pi$ ) e  $q_2 = 0$ . In tale situazione, l'unica direzione di moto istantaneo lineare ammissibile per l'organo terminale è

$$v = \pm\alpha \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

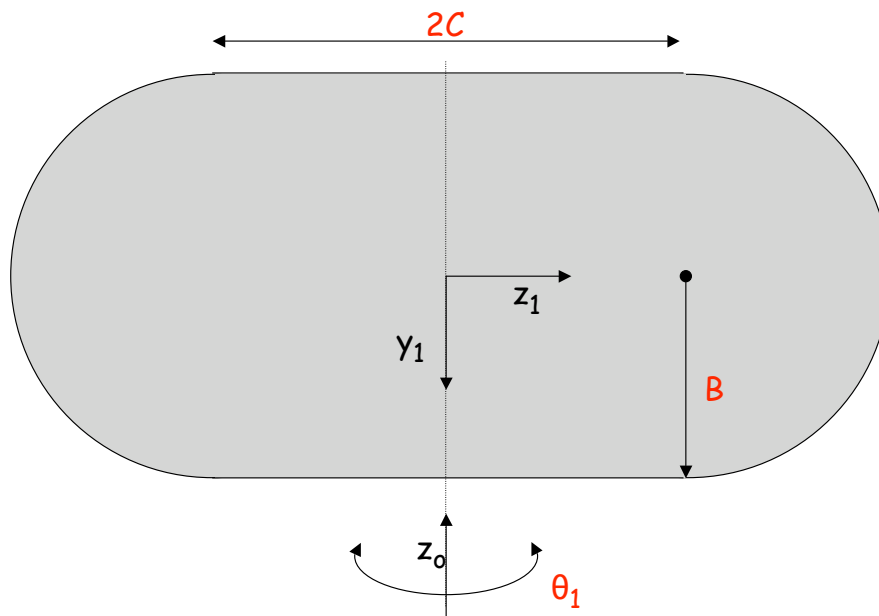
I due punti  $P_i$  e  $P_f$  assegnati potrebbero essere connessi da un cammino cartesiano rettilineo che attraversa però l'asse del primo giunto, portando il robot in singolarità (a parte problemi di autocollisioni che qui non si considerano). In tal caso il primo giunto rimarrebbe fermo. Sfruttando la rotazione del primo giunto, è invece semplice definire un moto interpolante privo di singolarità. Tramite la cinematica inversa (immediata per le posizioni indicate),

basta far corrispondere ai due punti cartesiani iniziali e finali le configurazioni di giunto

$$q_i = \begin{bmatrix} 0 \\ B \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \\ \frac{\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \quad q_f = \begin{bmatrix} \pi \\ B \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \\ \frac{2\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$$

e quindi interpolare, ad esempio, con un cammino lineare nello spazio dei giunti (sul quale si può definire la legge oraria). Il secondo giunto rimane quindi fermo ed il terzo braccio non si porta mai in posizione verticale, evitando così qualsiasi configurazione singolare.

Per quanto riguarda il tracciamento dello spazio di lavoro (un volume tri-dimensionale), la struttura ha una simmetria rispetto all'asse di rotazione del primo giunto. La sezione relativa al piano  $(y_1, z_1)$  mostrata in figura genera lo spazio di lavoro come solido di rotazione (l'ipotesi semplificatrice  $C \gg B$  esclude la presenza di zone cave all'interno).



## Soluzione Esercizio 2

Occorre anzitutto individuare le soluzioni cinematiche iniziali e finali per realizzare il compito assegnato. Utilizzando le variabili  $\theta_1$  e  $\theta_2$  della convenzione di Denavit-Hartenberg, è conveniente scegliere:

$$\theta_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \quad \theta_f = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}.$$

Lo Jacobiano del robot  $2R$  è

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} -\ell_1 s_1 - \ell_2 s_{12} & -\ell_2 s_{12} \\ \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} & \ell_2 c_{12} \end{bmatrix},$$

con  $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$  e altre notazioni analoghe. Inserendo i valori numerici nelle due configurazioni scelte si ha

$$J_i = J(\theta_i) = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \quad J_f = J(\theta_f) = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

Le condizioni di tangenza si traducono allora nello spazio dei giunti nel modo seguente:

$$\left. \frac{d\theta}{ds} \right|_i = J_i^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \left. \frac{d\theta}{ds} \right|_f = J_f^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

dove  $s \in [0, 1]$  è il parametro che descrive il cammino nello spazio dei giunti. Si noti che, pur essendo i valori iniziale  $\theta_{2i}$  e finale  $\theta_{2f}$  del secondo giunto identici, la presenza di un valore non nullo per  $d\theta_2/ds$  agli estremi del cammino implica comunque un movimento del secondo giunto.

Si possono quindi impostare due problemi di interpolazione, uno per ogni giunto. Le condizioni al contorno sono

$$\theta_1(0) = 0 \quad \theta_1(1) = \frac{\pi}{2} \quad \theta_1'(0) = 2 \quad \theta_1'(1) = 2$$

per il primo giunto, e

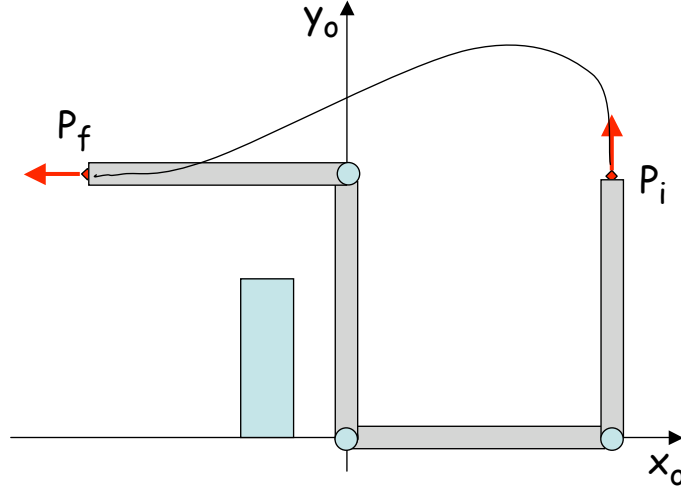
$$\theta_2(0) = \frac{\pi}{2} \quad \theta_2(1) = \frac{\pi}{2} \quad \theta_2'(0) = -2 \quad \theta_2'(1) = -2$$

per il secondo, dove l'apice indica la derivata rispetto al parametro  $s$ . È sufficiente allora considerare polinomi cubici del tipo  $\theta(s) = as^3 + bs^2 + cs + d$  (il che garantisce anche la necessaria continuità della tangente al cammino). Risolvendo si ottiene

$$\theta_1(s) = (4 - \pi)s^3 + \frac{3(\pi - 4)}{2}s^2 + 2s \quad \theta_2(s) = -4s^3 + 6s^2 - 2s + \frac{\pi}{2}.$$

Ovviamente si può anche definire una legge oraria  $s = s(t)$  per avere una traiettoria risultante di moto con caratteristiche temporali desiderate (ad esempio, per partire e arrivare con velocità nulla).

Il moto cartesiano risultante è illustrato in modo qualitativo nella figura seguente.



La verifica accurata della non collisione con l'ostacolo durante tutto il movimento del robot è un po' più laboriosa. Occorre a tal fine determinare analiticamente la massima escursione dei due giunti. Per il primo giunto, i massimi e minimi di  $\theta_1(s)$  si hanno o agli estremi dell'intervallo di definizione o dove

$$\theta'_1(s) = 3(4 - \pi)s^2 + 3(\pi - 4)s + 2 = 0.$$

Quest'ultima fornisce due radici complesse  $\frac{1}{2} \pm i 0.7257$  (non esistono punti stazionari). Durante il moto la prima variabile di giunto è quindi monotonicamente crescente ed in particolare non eccede il valore (massimo) finale  $\theta_1(1) = \frac{\pi}{2}$ . Pertanto il primo braccio non può collidere con l'ostacolo. Analogamente, per il secondo giunto la

$$\theta'_2(s) = -12s^2 + 12s - 2 = 0$$

fornisce le due radici

$$s_{1,2} = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{\sqrt{12}}$$

entrambe all'interno dell'intervallo  $[0, 1]$  ed equidistanti rispetto al centro. Come previsto, durante il moto la seconda variabile di giunto compie un'oscillazione simmetrica intorno al valore  $\frac{\pi}{2}$ , prima riducendosi di valore (il braccio si stende leggermente) e poi aumentando (il braccio si ripiega leggermente). È infatti facile verificare che il massimo valore di  $\theta_2(s)$  (quello più critico per un'eventuale collisione) si ha in corrispondenza della radice  $s$  maggiore. In particolare, si ha:

$$\max_{s \in [0,1]} \theta_2(s) = \theta_2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}\right) = 1.7632 \text{ [rad]} \approx 101^\circ.$$

Risulta evidente che questa piccola oscillazione non induce collisione.

A conferma dell'analisi, si riportano i risultati numerici di MATLAB relativi all'andamento delle variabili di giunto  $\theta_1(s)$  (a sinistra) e  $\theta_2(s)$  a destra), nonchè l'evoluzione stroboscopica del robot.

