SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE,
INFORMATICA E STATISTICA

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA GESTIONALE

ANNO ACCADEMICO 2016-2017

APPUNTI DALLE LEZIONI DI

RICERCA OPERATIVA

12 CFU

STEFANO LUCIDI - MASSIMO ROMA

canale A–O canale P–Z

Dipartimento di Ingegneria Informatica, Automatica e Gestionale
"A. Ruberti"

http://www.dis.uniroma1.it/∼lucidi/didattica
http://www.dis.uniroma1.it/∼roma/didattica

Prefazione

Queste note sono redatte in via prelimiare ad esclusivo uso degli studenti del corso di *"Ricerca Operativa"* da 12 crediti (CFU) del Corso di Laurea in *Ingegneria Gestionale* della Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica della SAPIENZA, Università di Roma.

Molte parti di queste note sono tratte da

1. F. Facchinei, S. Lucidi, M. Roma. *Appunti dalle lezioni di Ricerca Operativa*, SAPIENZA – Università di Roma.

2. M. Roma. *Modelli della Ricerca Operativa*, SAPIENZA – Università di Roma.

3. S. Lucidi, M. Roma. *Modelli e Algoritmi di Programmazione Lineare Intera*, SAPIENZA – Università di Roma.

4. S. Lucidi. *Appunti dalle lezioni di Ricerca Operativa*, SAPIENZA – Università di Roma.

5. M. Roma, *Appunti dalle lezioni di Laboratorio di Ricerca Operativa*, SAPIENZA – Università di Roma.

A completamento di queste note, sul sito web del corso è disponibile altro utile materiale didattico.

1
Introduzione

1.1 CHE COSA È LA RICERCA OPERATIVA

La Ricerca Operativa è una disciplina relativamente recente. Il termine *Ricerca Operativa* è stato coniato verso la fine degli anni '30 e deriva dal termine inglese *"Operational Research"* o *"Operations Research"* in americano.
La Ricerca Operativa è una disciplina che tratta dello sviluppo e dell'applicazione di metodi scientifici per la soluzione di problemi di decisione che si presentano in molteplici e diversi settori della vita reale. Si tratta di scegliere quali decisioni prendere per gestire nel modo più efficiente un sistema reale utilizzando strumenti matematici; quindi lo scopo della Ricerca Operativa è quello di fornire una base scientifica per cercare di analizzare e comprendere situazioni anche con strutture molto complesse e quindi utilizzare queste informazioni per predire il comportamento di un sistema e per migliorare le prestazioni del sistema stesso.
La necessità di un approccio quantitativo ai problemi di decisione è largamente riconosciuto in moltissimi settori della vita reale ed in particolare nei problemi di decisione che si presentano nella gestione dei sistemi di produzione e nella gestione d'impresa. Il semplice "buon senso", cioè l'impiego di una persona competente del settore che sulla base dell'esperienza acquisita nel corso degli anni gestisca il sistema non è piú sufficiente a far fronte alla sempre piú crescente complessità organizzativa, e quindi anche decisionale, della gran parte dei sistemi di produzione e servizio. In questo settore, come in molti altri, soprattutto negli ultimi anni, si è acquisita la consapevolezza della necessità di tecniche quantitative basate su sofisticati strumenti matematici e avanzati mezzi informatici che permettano di prendere delle decisioni operative sulla base delle informazioni disponibili.

La Ricerca Operativa, quindi, è la scienza che si occupa di fornire un contesto unitario a nozioni matematiche, informatiche e che partendo da basi teoriche arriva alla costruzione di modelli concreti e alla loro soluzione cioè ad un confronto diretto con la realtà. In questo senso, un altro termine inglese che solitamente si riferisce alla Ricerca Operativa – *Management Science* – evidenzia gli aspetti piú caratteristici della disciplina: *"management"* cioè la gestione e *"science"* a mettere in evidenza il carattere rigoroso tipico di una scienza.

1.2 BREVE STORIA DELLA RICERCA OPERATIVA

Il termine Ricerca Operativa ha origini "ufficiali" legate ad operazioni belliche della Seconda Guerra Mondiale. Tuttavia esistono esempi importanti di anticipazinoi dei metodi della Ricerca Operativa in anni piú lontani; il piú famoso risale a F. Taylor che nel 1885 elaborò uno studio sui metodi di produzione; prima ancora, nel 1776, G. Monge aveva studiato un problema di trasporti. Tuttavia la nascita della Ricerca Operativa è storicamente legata agli studi che negli anni immediatamente precedenti alla Seconda Guerra Mondiale vennero condotti in Gran Bretagna per risolvere problemi strategici e tattici in operazioni militari. Piú in particolare questi studi erano legati all'uso efficiente di un nuovo strumento di difesa: il radar. Infatti nel 1937 la Royal Air Force iniziò degli esperimenti di un sistema di controllo della difesa aerea basato sull'uso di una stazione radar situata a Bawdsey Research Station, nella costa est; già dai primi esperimenti si resero conto che era molto difficile gestire efficientemente le informazioni provenienti dal radar. Nel luglio 1938 furono compiuti altri esperimenti con l'aggiunta di quattro stazioni radar lungo la costa nella speranza che il sistema di controllo migliorasse sia in copertura sia in efficienza; invece non fu così ; dai nuovi esperimenti emersero seri problemi: c'era la necessità di coordinare e correlare le tante informazioni, spesso anche in conflitto tra di loro, che venivano ricevute dalle stazioni radar aggiunte. Nell'imminenza della Guerra si rese necessario tentare qualche nuovo approccio; perciò il sovrintendente della Bawdsey Research Station propose di sviluppare un programma di ricerca che riguardasse gli aspetti *operativi* del sistema e non piú solamente quelli prettamente tecnici che erano da considerare soddisfacenti. Il termine *"Operational Research"* – Ricerca nelle operazioni (militari) – fu coniato per descrivere questa nuova branca delle scienze applicate. Fu quindi selezionato un gruppo di scienziati di vari discipline per costituire un "OR team"; il progetto fu diretto dal comandante in capo della Royal Air Force, Air Chief Marshal Sir Hugh Dowding. Nell'estate del 1939 la Gran Bretagna effettuò l'ultima esercitazione pre-bellica dove si evidenziò un notevole miglioramento nelle operazioni di difesa aerea grazie al contributo del gruppo di scienziati. Nacque quindi una vera e propria sezione che piú tardi, nel 1941, prese il nome formale di "Operational Research Section". Durante il conflitto

mondiale ci furono importanti contributi strategici di questa sezione che permisero di salvare piloti e aerei impegnati nel conflitto. Nonostante gli scopi bellici, anche se di difesa, del progetto, per la prima volta in questa occasione si ebbe una convergenza di scienziati di diverse discipline con l'obiettivo di determinare la più efficiente utilizzazione di risorse limitate usando tecniche quantitative.
Al termine della guerra, alcuni degli scienziati coinvolti nel progetto formarono nuclei di ricercatori per lo sviluppo post bellico e la loro attività si estese a campi diversi da quello militare; in particolare, con l'espandersi delle iniziative industriali e con l'avvento dei computer che sono uno strumento essenziale per la risoluzione dei problemi, c'è stata un'espansione dell'utilizzo della Ricerca Operativa all'interno di diverse realtà applicative.
Negli anni '60 le tecniche della Ricerca Operativa avevano avuto una buona diffusione, ma comunque il loro utilizzo era limitato esclusivamente alle imprese piú grandi visti gli altissimi costi dei calcolatori elettronici dell'epoca; piú tardi, con la diffusione dei personal computer c'è stata una diffusione sempre piú ampia della Ricerca Operativa in molti ambiti della vita reale.

1.3 LA RICERCA OPERATIVA OGGI

La necessità dell'uso dei metodi della Ricerca Operativa all'interno di molteplici situazioni del mondo reale è stata col passare degli anni sempre piú riconosciuta con una sempre maggiore e rapida espansione delle aree di possibile applicazione. In particolare, gli ambiti di maggiore sviluppo dell'applicazione Ricerca Operativa riguardano *problemi manageriali*, *problemi gestionali*, *problemi di progettazione.* Alcuni esempi di problemi possono essere affrontati per mezzo della Ricerca Operativa sono i seguenti:

- *Problemi in ambito industriale:*
  - *pianificazione della produzione*;
    si tratta di determinare i livelli di produzione e/o l'utilizzazione di risorse; si hanno spesso problemi di *allocazione ottima di risorse* cioè problemi riguardanti la distribuzione di risorse limitate tra alternative concorrenti in modo da minimizzare il costo complessivo o massimizzare il guadagno totale; tali risorse possono essere materie prime, manodopera, tempi di lavoro su macchine, capitali investiti.
  - *gestione ottima delle scorte*;
    si tratta di organizzare un magazzino nella gestione di materiali grezzi, prodotti in lavorazione etc.; cioè di decidere quando e quanto, durante un processo produttivo, si devono immagazzinare prodotti in modo da rispettare le consegne minimizzando i costi, oppure se e quando con-

viene riordinare materiali in modo da ottenere il miglior compromesso tra costi di acquisto, di produzione e di immagazzinamento.

- *localizzazione e dimensionamento di impianti*;
  sono problemi in cui si deve decidere dove istallare impianti di produzione in modo da rifornire in modo ottimale aree distribuite su un territorio, oppure decidere dove costruire le stazioni base di una rete di telecomunicazioni (GSM/UMTS) per coprire il territorio e con quale potenza esse devono trasmettere.

• *Problemi di progettazione ottima:*

  - *progettazione di reti e loro gestione*;
    si tratta di definire i collegamenti e dimensionare le capacità di una rete di telecomunicazione, di trasmissione dati, di circuiti, in modo da garantire il traffico tra le varie origini e destinazioni e minimizzare il costo complessivo;
  - *progettazione strutturale*;
    si tratta di problemi che nascono nell'ingegneria civile, industriale, nella meccanica aeronautica, etc. e hanno come scopo quello di definire un progetto di un edificio, di un ponte in modo che meglio resistano a sollecitazioni derivanti da vari agenti (terremoti, venti forti) oppure del profilo di un'ala di un aereo in modo che, ad esempio, sia massimizzata la portanza;
  - *progettazione di sistemi ottici, progettazione di robot*;
    si vuole ottenere un progetto che risponda a requisiti tecnici prefissati massimizzando alcuni parametri legati, ad esempio, alla precisione o alla prestazione;
  - *allocazione ottima di componenti elettronici* (VLSI design);
    si tratta di disegnare una piastra madre in modo che, ad esempio, siano minimizzate le lunghezze dei percorsi dei segnali elettrici;

• *Problemi di economia e finanza:*

  - *scelta di investimenti*;
    si deve scegliere fra un vasto numero di possibilità di investimento quali realizzare rispettando i vincoli imposti da un budget finanziario e massimizzando il guadagno;
  - *composizione di un portafoglio*;
    è il problema di decidere quali titoli e con quali quote investire capitali in modo da massimizzare il ricavo oppure minizzando il rischio;

- *Problemi di organizzazione:*
  - *project planning*;
    si tratta di decidere come gestire le risorse e come sequenziare le molteplici attività di un progetto;
  - *determinazione dei turni del personale*;
    si tratta di coprire una serie di servizi rispettando i vincoli di contratto aziendale e minimizzando i costi, come, ad esempio, l'assegnamento di personale viaggiante ai treni o degli equipaggi ai voli in modo da minimizzare il numero dei viaggi necessari per far tornare il personale nella propria sede;
  - *manutenzione di beni*;
    cioè il problema di decidere quando e se effettuare la manutenzione di alcuni oggetti soggetti ad usura con il tempo, in modo da minimizzare il costo complessivo.
  - *istradamento di veicoli*;
    si deve decidere quali percorsi devono seguire i veicoli di un flotta (ad esempio di automezzi adibiti alla raccolta dei rifiuti o alla distribuzioni di prodotti ad una rete di negozi) in modo da minimizzare la distanza complessiva percorsa;
- *Problemi scientifici:*
  - *studi sulla struttura del DNA*;
    si tratta di problemi legati alla determinazione della sequenze di geni minimizzando la probabilità di errore;
  - *ricostruzione di immagini*;
    è il problema della visualizzazione delle informazioni provenienti, ad esempio, da un satellite oppure da una tomografia computerizzata, in modo da ottenere un'immagine della migliore qualità possibile;
- *Problemi di diagnostica medica.*
  - *interpretazione e analisi dei dati ottenibili da strumenti di analisi clinica.*
- *Problemi di controllo ottimo:*
  - *controllo di servomeccanismi e di sistemi di guida*;
  - *controllo di traiettorie.*

È importante evidenziare che i metodi della Ricerca Operativa sono oggi utilizzati anche in settori lontani dagli ambiti piú tradizionali come le *scienze sociali*, la *biologia*, le *scienze ambientali* e moltissimi altri.

Tuttavia, soprattutto in Italia, e soprattutto nelle realtà aziendali, gli strumenti utilizzati sono stati per anni assai rudimentali e spesso non adeguati alla crescente complessità dei sistemi di produzione. C'era spesso un notevole sforzo in termini sia finanziari sia umani per dotarsi di sistemi informativi all'avanguardia, ma raramente c'era un utilizzo di queste risorse per realizzare validi sistemi di supporto alle decisioni. Con il passare degli anni la consapevolezza dell'esigenza di tecniche quantitative per la gestione d'impresa è notevolmente cresciuta anche se non c'è ancora in certi settori una totale apertura verso l'utilizzo degli strumenti della Ricerca Operativa. Tuttavia, negli anni piú recenti, l'enorme sviluppo dei mezzi di calcolo e degli strumenti metodologici hanno portato a un grande successo della Ricerca Operativa soprattutto negli Stati Uniti. Il merito di questo successo è da ricondurre alla cosapevolezza ormai acquisita che l'incremento della potenza dei mezzi di calcolo non è certo sufficiente per risolvere tutti i problemi che si possono presentare. A confermare questo asserto si riassume di seguito un esempio dovuto a G. B. Dantzig[1] che è molto significativo: si supponga di essere a capo di un'azienda che ha 70 dipendenti e deve assegnare ciascuno di essi a 70 differenti mansioni; poiché le capacità lavorative di ogni singolo dipendente sono diverse, non è indifferente per l'azienda come effettuare l'assegnamento. Naturalmente si deve fare in modo che ciascun dipendente sia assegnato ad una sola mansione e che ciascuna mansione sia svolta esattamente da un dipendente. Il problema consiste nel confrontare le 70! possibilità che ci sono per selezionare quella migliore nel senso che permetta di ottenere il maggiore utile per l'azienda. Le possibilità sono un numero molto grande, più grande di 10^{100}. Ora si supponga di disporre di un calcolatore capace di effettuare un milione di calcoli al secondo e che sia in funzione dal tempo del Big Bang, 15 milioni di anni fà; avrebbe questo calcolatore oggi nell'anno 2000 esaminato tutte le 70! combinazioni possibili ? La risposta è no. Supponiamo allora di disporre di un calcolatore che possa effettuare un bilione di assegnamenti per ogni nano secondo; la risposta sarebbe ancora no. Supponiamo allora di riempire la superficie terrestre di calcolatori di questo tipo che lavorano in parallelo; la risposta sarebbe ancora no. Se si disponesse di 10^{40} terre ciascuna ricoperta di calcolatori di questo tipo che sono in funzione dal tempo del Big Bang fino a quando il sole si raffredderà; allora, forse, la risposta potrebbe essere si !

Da questo esempio facile da enunciare si deduce come in certe situazioni sia assolutamente impossibile esaminare tutti i casi possibili per determinare qual è il migliore. Per questo, prima dell'avvento della Ricerca Operativa, l'unica possibilità era affidarsi al buon senso di persone guidate dall'esperienza che stabilivano regole "ad hoc" di base che dovevano essere seguite per risolvere i problemi (*"ad hoc" ground-rule approach*).

[1]G. B. Dantzig, Linear Programing, *Operations Research*, vol.50, No.1, 2002, pag.42–47

A questo approccio la Ricerca Operativa contrappone un approccio assai diverso: si tratta del cosiddetto *approccio modellistico*. Esso organizza l'analisi di un problema reale in due fasi:

- la rappresentazione del problema attraverso un *modello matematico* che ne astragga gli aspetti essenziali e che schematizzi le interrelazioni esistenti tra i diversi aspetti del fenomeno che si sta studiando;
- lo sviluppo di *metodi matematici efficienti* (algoritmi di soluzione) per determinare una soluzione ottima del problema o una sua buona approssimazione.

Naturalmente per costruire correttamente un modello matematico che rappresenti un particolare fenomeno, si devono distinguere i parametri di controllo significativi da quelli non essenziali, identificando un criterio per la valutazione della qualità della soluzione. Una volta determinato il modello corretto, la Ricerca Operativa si occupa di fornire una procedura esplicita per determinare una soluzione di un problema; tale procedura può essere rappresentata da metodi matematici analitici o, come più spesso accade, da metodi numerici che determinano la soluzione del problema mediante specifici algoritmi di calcolo.
In questo contesto, il merito maggiore della Ricerca Operativa consiste nello studiare un sistema nel suo complesso; infatti, la maggior parte dei problemi reali coinvolge diverse parti di un sistema mutuamente interagenti ed è quindi essenziale studiarne l'interazione reciproca. Questa è una caratteristica distintiva della Ricerca Operativa rispetto ad altre discipline ed è quindi evidente che un aspetto caratterizzante la Ricerca Operativa sia proprio l'interdisciplinarietà; ed infatti le tecniche di cui fa uso sono numerose e provengono da diverse branche della matematica: dall'algebra lineare alla logica, dalla statistica alla teoria dei giochi, dalla teoria delle decisioni alla teoria dei sistemi. Questo ha prodotto lo sviluppo di metodologie di soluzione che rappresentano un'inusuale combinazione di tecniche e strumenti tipici di altri settori.

1.4 L'APPROCCIO MODELLISTICO

L'approccio modellistico per risolvere un problema di decisione o, più in generale, l'impiego di metodi matematici per la soluzione di problemi applicativi, viene di solito realizzato attraverso diverse fasi. Tali fasi possono essere schematizzate nel seguente modo:

- Analisi del problema
- Costruzione del modello
- Analisi del modello

- Soluzione numerica
- Validazione del modello

La prima fase consiste nell'*analisi della struttura del problema* per individuare i legami logico-funzionali e gli obiettivi.
Nella succesiva fase di *costruzione del modello*, chiamata anche *formulazione*, si descrivono in termini matematici le caratteristiche principali del problema; questa fase di costruzione verrà descritta in dettaglio nel seguito.
Segue l'*analisi del modello* che prevede la deduzione per via analitica, in riferimento a determinate classi di problemi, di alcune importanti proprietà; le principali sono:

– *esistenza* ed *unicità* della soluzione ottima;

– *condizioni di ottimalità*, cioè una caratterizzazione analitica della soluzione ottima;

– *stabilità* delle soluzioni al variare dei dati o di eventuali parametri presenti.

La successiva fase di *soluzione* avviene mediante opportuni algoritmi di calcolo e la soluzione numerica così ottenuta deve poi essere interpretata dal punto di vista applicativo in modo da evitare che abbia scarso rilievo pratico; in questo caso le eventuali cause di inaccettabilità devono essere inglobate nel modello stesso costruendo così un nuovo modello più completo del precedente. Tale "validazione" del modello può avvenire attraverso una *verifica sperimentale* oppure con metodi di *simulazione*. La definizione di un modello si configura quindi come un processo di raffinamento iterativo, che può essere schematizzato come rappresentato in Figura 1.4.1.

1.5 MODELLI DELLA RICERCA OPERATIVA

Il primo passo dell'approccio modellistico consiste nel rappresentare un problema reale attraverso un *modello*; è utile, pertanto, chiarire subito cosa si intende con questo termine. Il termine *modello* è di solito usato per indicare una struttura appositamente costruita per mettere in evidenza le caratteristiche principali di alcuni oggetti reali. Alcune volte possono essere concreti (come ad esempio i modelli rappresentanti prototipi di aerei o auto), ma più spesso, come nella Ricerca Operativa, si tratta di *modelli astratti* cioè *modelli matematici* che usano il simbolismo dell'algebra per mettere in evidenza le relazioni principali dell'oggetto che deve essere modellato. I modelli di cui si tratterà in seguito sono quindi modelli matematici, e sono costituiti da un insieme di relazioni che descrivono in modo semplificato, ma sempre rigoroso, uno o più fenomeni del mondo reale. La nozione di modello matematico per rappresentare il mondo reale non è certo

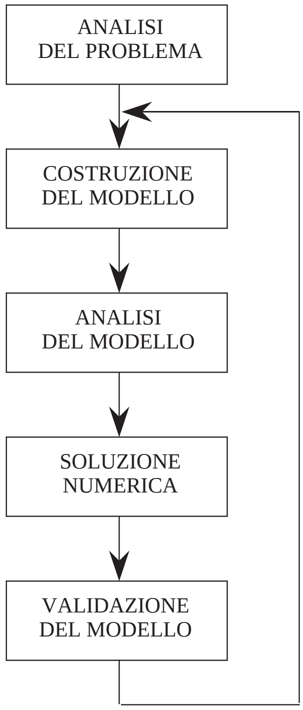

Fig. 1.4.1 Fasi dell'approccio modellistico

nuova: già Pitagora nel IV secolo a.C. tentava di costruire un modello matematico dell'Universo anche se sotto una luce più esoterica che scientifica. L'interesse per la modellistica matematica è notevolmente cresciuto negli anni più recenti e ai giorni nostri è sempre più viva la convinzione che ricorrendo a modelli matematici sia possibile analizzare i molteplici aspetti del mondo reale e studiare l'influenza che l'uomo può esercitare su di essi. Ciò ha portato ad un enorme sviluppo delle applicazioni della modellistica matematica anche al di fuori delle tradizionali applicazioni alle scienze fisiche. Si è così avuta di fatto una vasta utilizzazione di modelli matematici in settori lontani dagli ambiti più tradizionali come, ad esempio, le scienze sociali, la biologia, le scienze ambientali, la psicologia. Come esempi concreti, si pensi agli studi sulla dinamica della popolazione, sulla diffusione delle epidemie, sul risanamento ambientale. Questa notevole diffusione della modellistica matematica è anche dovuta al fatto che l'evoluzione di un modello matematico può essere rapidamente studiata grazie all'uso di moderni calcolatori elettronici.
È evidente come in molti casi le situazioni rappresentate da un modello sono molto complesse e alcune volte influenzate da fenomeni di natura aleatoria; per questa ragione, sono state definite diverse classi di modelli matematici: *modelli stocastici* che considerano grandezze che possono essere influenzate da fenomeni aleatori e *modelli deterministici* che considerano grandezze esatte; inoltre a seconda che le

interazioni tra le grandezze sono immediate o distribuite nel tempo, si parla di *modelli statici* e di *modelli dinamici*.
Nel seguito verranno analizzati i modelli deterministici che sono di fatto quelli più comunemente usati; in particolare si farà riferimento ai *modelli di programmazione matematica* nei quali è esplicitamente definito un obiettivo da minimizzare o massimizzare ed in cui le variabili sono vincolate ad appartenere ad un insieme prefissato. Si osservi che in questo contesto il termine *"programmazione"* è inteso nel senso di *"pianificazione"* e non di costruzione di programmi (codici) scritti in qualche linguaggio di programmazione.

1.5.1 Costruzione di un modello matematico

L'approccio modellistico per risolvere un problema di decisione necessita come primo passo della costruzione di un adeguato modello matematico. Infatti, come già discusso in precedenza, solo un modello costruito tenendo presente tutte le caratteristiche essenziali del fenomeno che si sta studiando permette di comprendere gli aspetti più importanti e di esercitare un intervento pratico efficace.
Nella fase di costruzione del modello matematico si deve fornire una descrizione formalizzata del problema di decisione facendo uso del linguaggio formale della matematica. Si dovrà cercare, quindi, una corrispondenza tra relazioni del mondo reale (relazioni tecnologiche, leggi fisiche, vincoli di mercato, etc.) e relazioni matematiche (equazioni, disequazioni, dipendenze logiche, etc.).

$$\boxed{\text{RELAZIONI DEL MONDO REALE}} \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\text{RELAZIONI MATEMATICHE}}$$

La costruzione di un modello richiede, quindi, scelte e valutazioni in modo da evidenziare gli aspetti più significativi del problema reale e che meglio sono suscettibili di una formalizzazione matematica. Tale procedimento di scelta spesso non è riconducibile ad un procedimento sistematico e quindi è necessario che chi costruisce il modello abbia da un lato una conoscenza approfondita del settore applicativo per evitare che le risposte ottenute dal modello abbiano scarsa rilevanza pratica; dall'altro deve avere una notevole conoscenza dei metodi matematici disponibili per la ricerca della soluzione per evitare che la formulazione matematica porti ad un problema per il quale non esistono algoritmi risolutivi utilizzabili.
È importante ribadire che un modello è definito per mezzo delle relazioni che lo costituiscono ed è quindi necessario che tali relazioni siano il più possibile indipendenti dai dati introdotti nel modello; questo perché uno stesso modello deve poter essere usato in differenti occasioni con dati (cioè costi, disponibilità di risorse, limiti tecnologici, etc.) diversi. Lo studio di questo aspetto, come già detto, rientra nella fase di analisi del modello sotto il nome di analisi della stabilità del modello rispetto ai dati introdotti.

1.5.2 Vantaggi dell'approccio modellistico

Le motivazioni che rendono molto utile la costruzione di un modello matematico sono molteplici; si riassumono di seguito le principali.

– *Possibilità di risolvere matematicamente il problema.*

  Grazie al modello è possibile analizzare matematicamente il problema ed ottenere così una soluzione che, soprattutto in riferimento a scopi di pianificazione, permette di adottare strategie che da una sola analisi strutturale del problema non apparirebbero evidenti o che a volte potrebbero essere perfino controintuitive.

– *Maggiore comprensione del problema.*

  Il modello è una rappresentazione semplificata del problema e spesso la sua costruzione consente di individuare proprietà strutturali del problema che altrimenti non sarebbero affatto evidenti.

– *Deduzione analitica di importanti proprietà.*

  Nella fase di analisi del modello è possibile dedurre per via analitica alcune importanti proprietà del problema sulla base dei risultati disponibili per la classe di problemi a cui si fa riferimento.

– *Possibilità di simulazioni.*

  Con un modello è possibile effettuare esperimenti che spesso non è possibile effettuare direttamente nella realtà; ad esempio, l'uso di un modello consente di studiare gli effetti dell'adozione di una particolare misura economica in un paese senza la necessità di sperimentarla direttamente.

1.5.3 Critiche all'approccio modellistico

Le principali critiche all'approccio modellistico e, quindi, alla costruzione di modelli per la soluzione di problemi di decisione possono essere sintetizzate nei seguenti due punti:

– Impossibilità di quantificare soddisfacentemente con opportuni valori numerici alcuni dati richiesti dal modello; questo accade, ad esempio, nel tentativo di quantificare con un costo o con un profitto alcuni valori sociali soprattutto in relazione a scopi di pianificazione.

– La qualità delle risposte che un modello produce potrebbero dipendere profondamente dall'accuratezza dei dati introdotti.

Il primo punto riguarda la possibilità di dover trattare concetti non facilmente quantificabili, ma ogni approccio scientifico può difficilmente evitare tale difficoltà; il modo migliore per superare tale problema consiste nell'incorporare tale quantificazione nel modello stesso.
La seconda critica riguarda la possibile mancanza di precisione di alcuni dei dati immessi nel modello; tale critica è meno rilevante della precedente, in quanto anche se alcuni dati introdotti sono poco accurati, è ancora possibile che la struttura del modello sia tale da garantire che la soluzione sia sufficientemente accurata.
All'estremo opposto di queste critiche si può collocare un atteggiamento di totale fiducia del modello che induca ad accettare la prima risposta prodotta dal modello senza ulteriori analisi. Tale atteggiamento, in realtà molto raro, è assai pericoloso in quanto tale risposta potrebbe rappresentare un piano operativo non accettabile nella realtà; in tal caso i motivi della non accettabilità devono essere evidenziati e incorporati in un nuovo modello modificato: si tratta, in realtà, della già citata fase di validazione del modello che quindi non può essere trascurata e che costituisce un valido mezzo per costruire modelli sempre più completi e significativi.
In conclusione, come spesso accade, l'atteggiamento corretto si colloca tra le due situazioni estreme precedentemente citate e consiste nel considerare la costruzione del modello un mezzo assai utile per affrontare un problema di decisione: rimane il fatto che la qualità delle risposte che un modello produce dipende dall'accuratezza della sua struttura e quindi non è trascurabile la fase di validazione che consente di interpretare la soluzione numerica ottenuta ed eventualmente permette di completare il modello introducendo elementi trascurati in una prima fase, in assenza dei quali la soluzione risulta non accettabile oppure di scarso rilievo dal punto di vista applicativo.

2

La Programmazione Matematica

All'interno della Ricerca Operativa, un ruolo di fondamentale importanza è svolto dalla *Programmazione Matematica* che è la disciplina che ha per oggetto lo studio dei problemi in cui si vuole minimizzare o massimizzare una funzione reale definita su $\mathbb{R}^n$ (lo spazio delle $n-$uple reali) le cui variabili sono vincolate ad appartenere ad una insieme prefissato che è descritto attraverso un numero finito di disuguaglianze o uguaglianze. Si tratta quindi di *problemi di Ottimizzazione* cioè problemi nei quali si desidera minimizzare o massimizzare una funzione in un insieme prefissato.

2.1 PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE

In termini generali, dato uno spazio X (spazio delle variabili), un insieme $S \subseteq X$ e una funzione $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$, un *problema di Ottimizzazione* (in forma di minimizzazione) può essere formulato come

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in S \end{cases} \qquad (PO)$$

e consiste nel determinare, se esiste, un punto di minimo della funzione f tra i punti dell'insieme S, ovvero un punto $x^\star \in S$ tale che $f(x^\star) \leq f(x)$ per ogni $x \in S$. Analogamente un *problema di Ottimizzazione* (in forma di massimizzazione) può essere formulato come

$$\begin{cases} \max f(x) \\ x \in S \end{cases}$$

e consiste nel determinare, se esiste, un punto di massimo della funzione f tra i punti dell'insieme S, ovvero un punto $x^\star \in S$ tale che $f(x) \leq f(x^\star)$ per ogni $x \in S$.
Si parlerà indifferentemente di problemi di massimo o di minimo in quanto vale

$$\min_{x \in S} f(x) = -\max_{x \in S} (-f(x)).$$

La funzione f viene chiamata *funzione obiettivo* e l'insieme S *insieme ammissibile* cioè l'insieme delle possibili soluzioni del problema. Un punto $x \in S$ si chiama *soluzione ammissibile.*
Comunemente, lo spazio X può coincidere con lo spazio delle n-uple reali $\mathbb{R}^n$, oppure con lo spazio delle n-uple a componenti intere $\mathbb{Z}^n$. Naturalmente i problemi di ottimizzazione che risulteranno così definiti su spazi diversi sono di natura molto differente tra loro, sia dal punto di vista delle caratterizzazioni teoriche, sia dal punto della progettazione degli algoritmi risolutivi.

2.1.1 Definizioni fondamentali

Si riportano di seguito alcune definizioni fondamentali riguardanti i problemi di Ottimizzazione (con riferimento ad un problema di minimizzazione).

Definizione 2.1.1 *Il problema di ottimizzazione (PO) si dice* inammissibile *se $S = \emptyset$, cioè se non esistono soluzioni ammissibili.*

Definizione 2.1.2 *Il problema di ottimizzazione (PO) si dice* illimitato (inferiormente) *se comunque scelto un valore $M > 0$ esiste un punto $x \in S$ tale che $f(x) < -M$*

Definizione 2.1.3 *Si dice che il problema di ottimizzazione (PO)* ammette soluzione ottima (finita) *se esiste un $x^\star \in S$ tale che risulti $f(x^\star) \leq f(x)$ per ogni $x \in S$. Il punto $x^\star$ è detto* soluzione ottima *o* minimo globale *e il corrispondente valore $f(x^\star)$ di dice* valore ottimo.

Queste definizioni sono immediatamente estendibili al caso in cui un problema di Ottimizzazione è scritto in forma di massimizzazione.

2.2 CLASSIFICAZIONE DEI PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE

All'interno dei problemi di Ottimizzazione, in base alla *struttura dell'insieme ammissibile* S, si possono distinguere le seguenti importanti classi di problemi:

- Problemi di Ottimizzazione Continua.

  Si tratta di problemi di ottimizzazione in cui lo spazio delle variabili X coincide con lo spazio delle n-uple reali $\mathbb{R}^n$, ovvero il caso in cui le variabili assumono valori reali. Inoltre si parla di problemi di ottimizzazione continua

  - *vincolata* se $S \subset \mathbb{R}^n$
  - *non vincolata* se $S = \mathbb{R}^n$.

- Problemi di Ottimizzazione Discreta.

  Si tratta di problemi di ottimizzazione in cui lo spazio delle variabili X coincide con lo spazio delle n-uple di numeri interi $\mathbb{Z}^n$, ovvero il caso in cui le variabili sono numeri interi. All'interno di questa classe si distinguono i problemi di

  - *programmazione a numeri interi* se $S \subseteq \mathbb{Z}^n$
  - *ottimizzazione booleana o combinatoria* se $S \subseteq \{0, 1\}^n$, ovvero S è sottoinsieme delle n-uple a componenti in $\{0, 1\}$.

- Problemi di Ottimizzaizone mista.

  Si tratta di problemi nei quali sono presenti sia variabili continue, sia variabili intere.

2.2.1 Problemi di Ottimizzazione Continua

In questo caso si ha una funzione $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ed $S \subseteq \mathbb{R}^n$ e possiamo formulare un generico problema di ottimizzazione continua come

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in S. \end{cases}$$

I punti soluzione di un problema di questo tipo possono essere caratterizzati come segue.

Definizione 2.2.1 *Un punto* $x^\star$ *si dice* minimo globale *di* f *su* S *se*

$$f(x^\star) \leq f(x), \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in S.$$

Definizione 2.2.2 *Un punto $x^\star$ si dice* minimo globale stretto *di f su S se*

$$f(x^\star) < f(x), \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in S, \quad x \neq x^\star.$$

Definizione 2.2.3 *Un punto $x^\star$ si dice* minimo locale *di f su S se esiste un intorno di centro $x^\star$ e raggio $\rho > 0$, $\mathcal{B}(x^\star;\rho)$ tale che*

$$f(x^\star) \leq f(x), \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in S \cap \mathcal{B}(x^\star;\rho).$$

Definizione 2.2.4 *Un punto $x^\star$ si dice* minimo locale stretto *di f su S se esiste un intorno di centro $x^\star$ e raggio $\rho > 0$, $\mathcal{B}(x^\star;\rho)$ tale che*

$$f(x^\star) < f(x), \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in S \cap \mathcal{B}(x^\star;\rho), \quad x \neq x^\star.$$

Abbiamo già detto che nel caso in cui l'insieme ammissibile S coincida con tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$, allora si parla di problema di ottimizzazione non vincolata. In realtà, può essere considerato come problema di ottimizzazione non vincolata qualsiasi problema di ottimizzazione continua in cui l'insieme ammissibile è un *insieme aperto*. Infatti, in questo caso, gli eventuali punti di minimo (o massimo) del problema sono punti interni di S e possono essere caratterizzati esclusivamente dall'andamento locale della funzione obiettivo, ovvero in un intorno del punto di ottimo, e non dalla presenza dei vincoli.
Di solito l'insieme ammissibile S viene descritto da una numero finito di disuguaglianze del tipo $g(x) \geq b$, dove g è una funzione definita su $\mathbb{R}^n$ a valori reali e $b \in \mathbb{R}$. Cioè, formalmente, date m funzioni $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ ed m scalari $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ si esprime S nella forma

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \ \mid \ g_1(x) \geq b_1, \ \ g_2(x) \geq b_2, \ \ \dots \ , \ g_m(x) \geq b_m\}.$$

Ogni disuguaglianza $g_i(x) \geq b_i$ prende nome di *vincolo* e l'insieme ammissible è quindi formato da tutti quei punti $x \in \mathbb{R}^n$ che sono soluzione del sistema di disuguaglianze

$$\begin{cases} g_1(x) & \geq & b_1 \\ g_2(x) & \geq & b_2 \\ g_3(x) & \geq & b_3 \\ & \vdots & \\ g_m(x) & \geq & b_m \end{cases}$$

Osservazione 2.2.5 In questa formulazione dell'insieme S si sono utilizzati vincoli di disuguaglianza nella forma di maggiore o uguale, ma è chiaro che questa notazione include i casi in cui i vincoli sono espressi con vincoli di disuguaglianza nella forma di minore o uguale e vincoli di uguaglianza; infatti si può sempre trasformare un vincolo di minore o uguale del tipo $g(x) \leq b$ in un vincolo di maggiore o uguale semplicemente riscrivendolo nella forma $-g(x) \geq -b$. Inoltre un vincolo di uguaglianza $g(x) = b$ può essere riscritto nella forma equivalente delle due diseguaglianze $g(x) \geq b$ e $-g(x) \geq -b$.

Quindi, senza perdere di generalità, si può riscrivere un problema di ottimizzazione continua nella forma

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \geq b_i, \quad i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Un problema di questo tipo viene chiamato *problema di Programmazione Matematica*. I punti dell'insieme ammissibile di questo tipo di problemi sono quelli per i quali tutti i vincoli sono soddisfatti cioè tutti quei punti x tali che tutte le disuguaglianze $g_i(x) \geq b_i$, $i = 1, \ldots, m$ sono verificate.

Volendo evidenziare la presenza di vincoli di uguaglianza e disuguaglianza, molto spesso l'insieme ammissibile di un generico problema di Programmazione Matematica viene scritto nella forma

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0, \quad h(x) \leq 0\},$$

dove $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ sono vettori di funzioni assegnate. Un generico problema di Programmazione Matematica può essere quindi formulato come

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g(x) \leq 0 \\ h(x) = 0. \end{cases}$$

Si formalizzano nella definizione che segue alcuni semplici concetti riguardanti i vincoli di un problema di Programmazione Matematica.

Definizione 2.2.6 *Si consideri un vincolo di disuguaglianza del tipo* $g(x) \geq b$*, con* $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $b \in \mathbb{R}$*. Esso si dice:*

— soddisfatto *in un punto* $\bar{x}$ *se* $g(\bar{x}) \geq b$*;*

— violato *in un punto* $\bar{x}$ *se* $g(\bar{x}) < b$*;*

— attivo *in un punto* $\bar{x}$ *se* $g(\bar{x}) = b$*;*

— ridondante *se con la sua eliminazione l'insieme ammissibile rimane immutato.*

I problemi di Programmazione Matematica si possono classificare in base alla *struttura delle funzioni che li definiscono*; in particolare si ha la seguente classificazione:

- Problemi di Programmazione Lineare (PL)
  La funzione obiettivo $f(x)$ e *tutte* le funzioni che definiscono i vincoli sono *lineari.*

- Problemi di Programmazione Non Lineare (PNL)
  Almeno una delle funzioni che definiscono un problema di Programmazione Matematica *non è lineare.*

Alcuni esempi di problemi di Programmazione Matematica sono i seguenti:

Esempio 2.2.7 *Si consideri una funzione obiettivo di due variabili* $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ *che si vuole minimizzare, con i vincoli* $2x_1 + x_2 \geq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$*. Si ottiene il problema*

$$\begin{cases} \min x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

che è nella forma (2.2.1) dove $g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$*,* $g_2(x_1, x_2) = x_1$*,* $g_3(x_1, x_2) = x_2$*,* $b_1 = 1$*,* $b_2 = b_3 = 0$*. L'insieme ammissibile è descritto attraverso questi tre vincoli e poiché tutte le funzioni che compaiono sono lineari nelle variabili* x_1 *e* x_2*, questo problema è un problema di Programmazione Lineare.*

Esempio 2.2.8 *Si consideri una funzione obiettivo di due variabili* $f(x_1, x_2) = (x_1 - \frac{1}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2$ *che si vuole massimizzare, con i vincoli* $x_1 + x_2 \geq 1$*,* $x_1 \leq 1$*,*

$x_2 \leq 1$. *Si ottiene il problema*

$$\begin{cases} \max(x_1 - \frac{1}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \end{cases}$$

che è un problema di Programmazione Non Lineare (quadratico).

Esempio 2.2.9 *Si consideri una funzione obiettivo di due variabili* $f(x_1, x_2) = 3x_1^3 + 7x_1^2 + x_2$ *che si vuole minimizzare, con vincoli* $x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 1$. *Si ottiene il problema*

$$\begin{cases} \min 3x_1^3 + 7x_1^2 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2} \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 1 \end{cases}$$

che è un problema di Programmazione Non Lineare che può essere facilmente ricondotto nella forma (2.2.1) riscrivendo il secondo vicolo nella forma $-x_1 - x_2 \geq -\frac{1}{2}$.

Esempio 2.2.10 *Si consideri una funzione obiettivo di due variabili* $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ *che si vuole minimizzare sulla regione ammissibile descritta dal vincolo di uguaglianza* $4x_1 - x_2 = -2$. *Il problema di Programmazione Lineare risultante è*

$$\begin{cases} \min x_1 + x_2 \\ 4x_1 - x_2 = -2 \end{cases}$$

che è un problema di Programmazione Lineare con un solo vincolo di uguaglianza.

Gli esempi appena visti, per semplicità, sono stati formulati come problemi in due variabili, in modo da permettere, fra l'altro, di comprenderne facilmente la loro struttura geometrica. Il significato geometrico di problemi di Programmazione Matematica verrà comunque trattato in dettaglio in seguito.

2.2.2 Problemi di Ottimizzazione Discreta

In questo caso $S \subseteq \mathbb{Z}^n$. Molto spesso, si scrive $S = \mathcal{F} \cap \mathbb{Z}^n$ per un opportuno insieme $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ e quindi il problema può essere riformulato come

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in \mathcal{F} \cap \mathbb{Z}^n. \end{cases}$$

2.2.3 Problemi di Ottimizzazione Mista

In questo caso, solo alcune variabili del problema sono intere. Volendo evidenziare le variabili continue e le variabili intere in un problema misto, si può riscrivere un problema di Ottimizzazione Mista rappresentanto, senza perdere di generalità, il vettore delle variabili nella forma

$$x = \begin{pmatrix} x_c \\ x_z \end{pmatrix}, \qquad \text{dove} \qquad x_c \in \mathbb{R}^{n_c}, \quad x_z \in \mathbb{Z}^{n_z}, \quad \text{con} \quad n_c + n_z = n.$$

Il sottovettore x_c rappresenta le n_c variabili continue e il sottovettore x_z rappresenta le n_z variabili discrete. Utilizzando questa notazione, un generico problema di Ottimizzazione Mista può essere riscritto come

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x_c \in \mathcal{F}_c \\ x_z \in \mathcal{F}_z \cap \mathbb{Z}^n, \end{cases}$$

con $\mathcal{F}_c \subseteq \mathbb{R}^{n_c}$ e $\mathcal{F}_z \subseteq \mathbb{R}^{n_z}$.

2.3 MODELLI DI PROGRAMMAZIONE MATEMATICA

I modelli standard più comunemente usati nella Ricerca Operativa sono i *modelli di Programmazione Matematica*, cioè modelli che possono essere rappresentati per mezzo di un problema di Programmazione Matematica. I settori applicativi all'interno dei quali sorgono problemi di questo tipo sono moltissimi: come esempi si possono citare problemi inerenti la pianificazione industriale, problemi di progettazione ottima, problemi di gestione di reti, problemi di economia e moltissimi altri.
Tuttavia, ogni lista di classi di modelli non può essere esaustiva: possono sempre presentarsi situazioni pratiche che non possono essere modellate in modo standard oppure che possono essere modellate in più di un modo standard.

La costruzione formale di un modello di Programmazione Matematica si effettua a partire da una descrizione logica e qualitativa di un problema di decisione e richiede di:

1. Associare opportune *variabili di decisione* alle grandezze reali. Tali variabili costituiscono le incognite del problema.
2. Esprimere formalmente l'*obiettivo* che si intende minimizzare o massimizzare.
3. Esprimere quantitativamente i *legami* esistenti tra le variabili e le *limitazioni* derivanti da considerazioni di carattere fisico, economico, etc. Tali legami e limitazioni definiscono i *vincoli.* L'insieme dei valori delle variabili per cui i vincoli sono soddisfatti costituisce l'*insieme ammissibile.*

A seconda della classe di problemi di Ottimizzazione entro la quale la formulazione del modello si colloca si parlerà di *modelli continui, modelli discreti, modelli misti.*

2.3.1 Esempi di modelli di Programmazione Matematica

Come primi esempi di costruzione di modelli verranno ora analizzati un semplice problema di pianificazione della produzione, un problema di pianificazione degli investimenti e un problema di progettazione industriale.

Esempio 2.3.1 *Un'industria chimica fabbrica 4 tipi di fertilizzanti,* **Tipo 1**, **Tipo 2**, **Tipo 3**, **Tipo 4**, *la cui lavorazione è affidata a due reparti dell'industria: il reparto produzione e il reparto confezionamento. Per ottenere fertilizzante pronto per la vendita è necessaria naturalmente la lavorazione in entrambi i reparti. La tabella che segue riporta, per ciascun tipo di fertilizzante i tempi (in ore) necessari di lavorazione in ciascuno dei reparti per avere una tonnellata di fertilizzante pronto per la vendita.*

	Tipo 1	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Tipo 4**
Reparto produzione	2	1.5	0.5	2.5
Reparto confezionamento	0.5	0.25	0.25	1

Dopo aver dedotto il costo del materiale grezzo, ciascuna tonnellata di fertilizzante dà i seguenti profitti (prezzi espressi in Euro per tonnellata)

	Tipo 1	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Tipo 4**
profitti netti	250	230	110	350

Determinare le quantità che si devono produrre settimanalmente di ciascun tipo di fertilizzante in modo da massimizzare il profitto complessivo, sapendo che ogni settimana, il reparto produzione e il reparto confezionamento hanno una capacità lavorativa massima rispettivamente di 100 e 50 ore.

Analisi del problema e costruzione del modello.

Si tratta di un problema di pianificazione della produzione industriale in cui le incognite, che saranno le variabili del problema, sono le quantità di fertilizzante di ciascun tipo che si devono produrre. Costruiamo un modello di Programmazione Matematica rappresentante il problema in analisi supponendo di voler pianificare la produzione settimanale.

– *Variabili di decisione.* È naturale introdurre le variabili reali x_1, x_2, x_3, x_4 rappresentanti rispettivamente le quantità di prodotto del **Tipo 1**, **Tipo 2**, **Tipo 3**, **Tipo 4** da fabbricare in una settimana.

– *Funzione Obiettivo.* Ciascuna tonnellata di fertilizzante contribuisce al profitto totale secondo la tabella data. Quindi il profitto totale sarà

$$250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4. \tag{2.3.1}$$

L'obiettivo dell'industria sarà quello di scegliere le variabili x_1, x_2, x_3, x_4 in modo che l'espressione (2.3.1) del profitto sia massimizzata. La (2.3.1) rappresenta la funzione obiettivo.

– *Vincoli.* Ovviamente la capacità produttiva della fabbrica limita i valori che possono assumere le variabili x_j, $j = 1, \dots, 4$; infatti si ha una capacità massima lavorativa in ore settimanali di ciascun reparto. In particolare per il reparto produzione si hanno a disposizione al piú 100 ore settimanali e poiché ogni tonnellata di fertilizzante di **Tipo 1** utilizza il reparto produzione per 2 ore, ogni tonnellata di fertilizzante di **Tipo 2** utilizza il reparto produzione per 1.5 ore e così via per gli altri tipi di fertilizzanti si dovrà avere

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100. \tag{2.3.2}$$

Ragionando in modo analogo per il reparto confezionamento si ottiene

$$0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50. \tag{2.3.3}$$

Le espressioni (2.3.2), (2.3.3) costituiscono i vincoli del modello. Si devono inoltre esplicitare vincoli dovuti al fatto che le variabili x_j, $j = 1, \dots 4$ rappresentando quantità di prodotto non possono essere negative e quindi vanno aggiunti i vincoli di non negatività

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0.$$

Posto $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, l'insieme ammissibile S sarà quindi così definito:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100, \\ 0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0 \end{array} \right\}$$

La formulazione finale quindi può essere scritta in questa forma

$$\begin{cases} \max\,(250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4) \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100 \\ 0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

□

Esempio 2.3.2 – CAPITAL BUDGETING. *Supponiamo di dover investire 1000 Euro sul mercato finanziario. Supponiamo inoltre che il mercato offra tre tipi diversi di investimenti* **A**, **B**, **C** *ciascuno caratterizzato da un prezzo d'acquisto e da un rendimento netto, che sono riassunti nella seguente tabella:*

	A	**B**	**C**
costo	*750*	*200*	*800*
rendimento	*20*	*5*	*10*

Si vuole decidere quali degli investimenti effettuare per massimizzare il rendimento sapendo che gli investimenti **A**, **B**, **C** *non si possono effettuare in modo parziale cioè non sono frazionabili.*

Analisi del problema e costruzione del modello.

Si tratta di un problema di pianificazione degli investimenti. Si devono definire formalmente le variabili di decisione, l'insieme delle soluzioni ammissibili e la funzione obiettivo.

– *Variabili di decisione.* Si tratta quindi di esprimere matematicamente la scelta elementare: effettuare o non effettuare l'investimento. Una scelta naturale delle variabili di decisione è la seguente:

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{non si effettua l'investimento } i\text{–esimo} \\ 1 & \text{si effettua l'investimento } i\text{–esimo} \end{cases} \qquad i = \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \tag{2.3.4}$$

– *Insieme ammissibile.* In base alla definizione delle variabili, le possibili scelte compatibili con il nostro budget sono:

(0) non si effettuano investimenti $x_A = x_B = x_C = 0$

(1) si effettua l'investimento **A**; $x_A = 1, x_B = x_C = 0$

(2) si effettua l'investimento **B**; $x_A = 0, x_B = 1, x_C = 0$

(3) si effettua l'investimento **C**; $x_A = x_B = 0, x_C = 1$

(4) si effettuano gli investimenti **A** e **B**; $x_A = x_B = 1, x_C = 0$

(5) si effettuano gli investimenti **B** e **C**; $x_A = 0, x_B = x_C = 1$.

Notiamo che le possibilità **A**, **C** e **A**, **B**, **C** non sono ammissibili in quanto il costo supera la nostra disponibilità. L'insieme ammissibile, ovvero l'insieme delle possibili scelte (0) – (5) è dato da:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Si tratta quindi di un sottoinsieme dei vettori di $\mathbb{R}^3$ a componenti 0–1 ovvero $S \subseteq \{0,1\}^3$.

– *Funzione obiettivo.* L'obiettivo che ci proponiamo è la massimizzazione del rendimento totale. Quindi dobbiamo esprimere la funzione obiettivo che corrisponde al rendimento netto relativo alla scelta di $x = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix}$ in S, cioè $f(x) = 20x_A + 5x_B + 10x_C$.

È possibile ottenere la soluzione ottima valutando esaustivamente la funzione obiettivo per ogni elemento di S, ottenendo in relazione alle possibili scelte:

(0) $f_0 = 0$

(1) $f_1 = 20$

(2) $f_2 = 5$

(3) $f_3 = 10$

(4) $f_4 = 25$

(5) $f_5 = 15$.

La soluzione ottima è ovviamente quella corrispondente alla scelta (4), cioè all'effettuare gli investimenti **A** e **B**, con valore della funzione obiettivo pari a £25.

Questo *non è un modello corretto* per due motivi:

1. *L'insieme ammissibile S è rappresentato in modo estensivo*, cioè elencando tutte le soluzioni ammissibili. In questo caso la cardinalità dell'insieme ammissibile è al più quella di $\{0,1\}^3$ cioè 2^3, ma in generale, se la dimensione del problema fosse piú grande sarebbe impossibile valutare esaustivamente le soluzioni del problema. Se, ad esempio, il numero degli investimenti fosse stato 100 (che dal punto di vista delle applicazioni reali è del tutto verosimile) la cardinalità dell'insieme ammissibile sarebbe stata 2^{100} e per la valutazione di 2^{100} possibilità anche supponendo di utilizzare un calcolatore che effettui 10^{10} valutazioni al secondo (velocità superiore a quella raggiungibile dai calcolatori attuali) occorrerebbero 10^{20} secondi, cioè 3000 miliardi di anni !

2. *Il modello non è indipendente dai dati del problema*, cioè cambiando i dati del problema (prezzi e/o rendimenti) sarebbe necessario cambiare completamente il modello.

In generale, in un modello corretto, si cerca di dare una *rappresentazione intensiva* dell'insieme ammissibile S, cioè individuare le proprietà $P(x)$ che consentono di distinguere le soluzioni ammissibili dagli elementi dell'insieme $\{0,1\}^3$ che non lo sono. Si vuole quindi scrivere l'insieme S in una forma del tipo:

$$S = \left\{x \in \{0,1\}^3 : \text{ vale la proprietà } \; P(x)\right\}.$$

Nell'esempio, la proprietà distintiva degli elementi di S è il costo complessivo che non deve essere superiore a £1000. Possiamo esprimere matematicamente questa relazione come:

$$P(x): \; 750x_A + 200x_B + 800x_C \leq 1000$$

e quindi l'insieme ammissibile si può scrivere

$$S = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix} \in \{0,1\}^3 \;\middle|\; 750x_A + 200x_B + 800x_C \leq 1000 \right\}.$$

In conclusione, il modello matematico corretto per il problema di decisione in esame è:

$$\begin{cases} \max\,(20x_A + 5x_B + 10x_C) \\ 750x_A + 200x_B + 800x_C \leq 1000 \\ x_i \in \{0,1\} \quad i = \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}. \end{cases}$$

□

Esempio 2.3.3 *Un'industria deve costruire un silos di forma cilindrica per contenere grandi quantitativi di un liquido che verrà poi distribuito in piccole confezioni pronte per la vendita al minuto. Tale silos deve essere posto in un magazzino appoggiato su una delle basi. Tale magazzino è a pianta rettangolare di dimensioni metri* 20×10 *ed ha un tetto spiovente lungo il lato di 10 metri, che ha altezza massima di metri* 5 *e altezza minima di metri* 3. *Per costruire questo silos deve essere usato del materiale plastico sottile flessibile che può essere tagliato, modellato e incollato saldamente. Sapendo che si dispone di non più di* 200 m^2 *di tale materiale plastico si costruisca un modello che permetta di determinare le dimensioni del silos (raggio di base ed altezza) in modo da massimizzare la quantità di liquido che può esservi contenuto.*

Analisi del problema e costruzione del modello.

Si tratta di determinare il dimensionamento ottimale di un contenitore cilindrico per uso industriale cercando di massimizzare il suo volume tenendo presente che deve essere contenuto in un magazzino di dimensioni fissate. Si devono innanzitutto definire formalmente le variabili di decisione, l'insieme delle soluzioni ammissibili e la funzione obiettivo.

– *Variabili di decisione.* È immediato introdurre due variabili x_1 e x_2 che rappresentano rispettivamente la lunghezza (in metri) del raggio di base e dell'altezza del contenitore cilindrico.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo è rappresentata dal volume del contenitore cilindrico ed è data da

$$\pi x_1^2 x_2.$$

– *Vincoli.* Il diametro della base non può superare le dimensioni del magazzino e quindi deve essere

$$2x_1 \leq 10.$$

La limitazione dell'altezza del contenitore varia al variare del diametro di base in quanto il tetto è spiovente. Dato che la pendenza del tetto è del 20%, dovrà risultare

$$x_2 \leq 5 - 0.2 \cdot 2x_1.$$

Inoltre disponendo solo di una quantità limitata di materiale plastico la superficie totale del contenitore cilindrico non può superare $200m^2$ e quindi deve risultare

$$2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2 \leq 200.$$

Si devono infine esplicitare i vincoli di non negatività $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Quindi l'insieme ammissibile è

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 \leq 5, \quad x_2 \leq 5 - 0.2 \cdot 2x_1, \quad 2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2 \leq 200, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

La formulazione complessiva risulta quindi

$$\begin{cases} \max \ \pi x_1^2 x_2 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 5 - 0.2 \cdot 2x_1 \\ 2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2 \leq 200 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

□

Osservazione 2.3.4 Negli Esempi 2.3.1 e 2.3.2 ora analizzati, sia la funzione obiettivo sia i vincoli sono rappresentati attraverso espressioni *lineari* nelle variabili di decisione. Quindi questi modelli hanno una forma particolare che, in generale prende nome di *Modello di Programmazione Lineare*, (PL). Questa classe di modelli è molto importante e sarà la classe di problemi che tratteremo nel seguito.

Osservazione 2.3.5 Nell'Esempio 2.3.1 abbiamo assunto che le variabili di decisione potessero assumere valori reali e quindi, in particolare, frazionari. Tale assunzione potrebbe essere vera nel caso in cui per quantità di prodotto si intenda una misura, ad esempio in litri, quintali, o altra quantità frazionabile di prodotto. Altrimenti se tale quantità rappresenta, ad esempio il numero di motori per automobile, allora le variabili x_j che danno la misura di questa quantità devono assumere *valori interi*. In tal caso, sempre nell'ipotesi che il modello sia lineare, si parla di *Modello di Programmazione Lineare Intera* (PLI). Questo è anche il caso del modello dell'Esempio 2.3.2.

Osservazione 2.3.6 A differenza degli Esempi 2.3.1 e 2.3.2, nell'Esempio 2.3.3 sia la funzione obiettivo, sia uno dei vincoli sono rappresentati attraverso espressioni *non lineari* nelle variabili di decisione. In questo caso si parla di *Modello di Programmazione Non Lineare* (PNL). La presenza di espressioni non lineari in un modello di programmazione matematica è piuttosto frequente: si pensi, ad esempio, ad una generica situazione in cui il profitto unitario che si ricava dalla vendita di un prodotto varia al variare della quantità dei prodotti venduti fino a quel momento; nella realtà, in accordo ad elementari leggi di mercato, accade molto spesso che il prezzo unitario di un prodotto possa aumentare se cresce la richiesta e quindi se una variabile x rappresenta la quantità di prodotto venduto e $p(x)$ il prezzo di vendita (dipendente da x), il profitto che si ricava dalla vendita di x prodotti sarà $p(x)x$; il temine $p(x)$ introduce una non linearità nella funzione obiettivo. Come esempio di ciò, riferendoci all'Esempio 2.3.1, se avessimo supposto che il prezzo unitario di vendita del prodotto **P1** fosse $250 + 3x_1$ cioè fosse dipendente dalla quantità di prodotto venduto x_1 il contributo al profitto complessivo dato dalla vendita di x_1 prodotti **P1** sarebbe stato $(250 + 3x_1)x_1$. Verrebbe così introdotta una non linearità data dal termine $3x_1^2$. Anche in questo caso in cui la sola funzione obiettivo è non lineare ed i vincoli continuano ad essere lineari, si parla di modelli di Programmazione Non Lineare. Tuttavia i modelli non lineari sono di solito molto più difficili da risolvere e quindi molto spesso si cerca di approssimarli con modelli lineari.

3

Modelli di Programmazione Lineare

3.1 GENERALITÀ

Come già detto nel capitolo precedente, è possibile classificare i modelli di Programmazione Matematica in base alla struttura particolare che possono avere la funzione obiettivo e i vincoli. Riprendiamo qui, espandendola, la definizione di *problemi di Programmazione Lineare* nei quali sia la funzione obiettivo, sia i vincoli sono rappresentati mediante funzioni lineari nelle variabili di decisione.

Preliminarmente, richiamiamo il concetto di *funzione lineare*.

Definizione 3.1.1 *Una funzione reale di n variabili reali* $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *si dice* lineare *se valgono le seguenti condizioni:*

i) *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *si ha* $\qquad f(x+y) = f(x) + f(y);$

ii) *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *risulta* $\qquad f(\lambda x) = \lambda f(x).$

Una immediata conseguenza di questa definizione è che una funzione è lineare se e solo se può essere scritta nella forma

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{3.1.1}$$

con $c_1, \ldots, c_n$ costanti reali. Infatti è immediato verificare che una funzione della forma (3.1.1) soddisfa la Definizione 3.1.1; d'altra parte, se una funzione $f(x)$ è lineare cioè se soddisfa la Definizione 3.1.1, allora si può scrivere nella forma (3.1.1); infatti se indichiamo con $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$ allora risulta $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ dove le x_i sono le componenti del vettore x. Quindi utilizzando la linearità si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n) = f(x_1e_1) + f(x_2e_2) + \cdots + f(x_ne_n) = \\ &= x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \cdots x_nf(e_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \end{aligned}$$

dove $c_i = f(e_i)$ per $i = 1, \ldots, n$. □

Quindi

$$x_1 + 4x_2 - 3.5x_3$$
$$-2x_1 + (\sin 4)x_2 + \pi x_3 - 4x_5,$$

sono funzioni lineari, mentre

$$(x_1)^2 + 4x_2 - 3.5x_3$$
$$x_1 + 4x_2 - 3.5e^{x_3}$$
$$-2x_1 + \sin x_2 + \pi x_3 - 4x_5,$$

non sono funzioni lineari.

3.2 STRUTTURA DI UN MODELLO DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

Esaminiamo ora la struttura di un generico modello di Programmazione Lineare. Un modello di Programmazione Lineare è caratterizzato da

- una singola *funzione obiettivo lineare* da minimizzare o massimizzare che può essere quindi scritta nella forma

$$f(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j.$$

- un numero finito di *vincoli lineari* che, supponendo siano m, possono essere scritti nella forma

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \ldots & +a_{1n}x_n & \geq b_1 \\ a_{21}x_1+ & \ldots & +a_{2n}x_n & \geq b_2 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \ldots & +a_{mn}x_n & \geq b_m. \end{array}$$

Introducendo il vettore $c \in \mathbb{R}^n$, definito $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$ e $x \in \mathbb{R}^n$ definito $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ la funzione obiettivo può essere scritta in notazione vettoriale

$$c^T x.$$

Inoltre, introducendo la matrice $(m \times n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e il vettore $b = (b_1, \dots, b_m)^T$ la formulazione completa di un generico problema di Programmazione Lineare può essere scritta nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b. \end{cases}$$

Osservazione 3.2.1 Come già osservato in relazione ad un generico problema di Programmazione Matematica, (cfr. Osservazione 2.2.5) non si perde di generalità formulando un generico problema di Programmazione Lineare con vincoli di sola diseguaglianza nella forma di maggiore o uguale. Infatti, ogni vincolo di disuguaglianza nella forma di minore o uguale e ogni vincolo di uguaglianza può essere ricondotto a questa forma con semplici operazioni algebriche.

Per esempio,

$$\begin{array}{lll} \max & x_1 + x_2 & \\ & x_1 + x_2 & \geq \; 1 \\ & x_1 + x_2 & \leq \; 3 \\ & x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, & \end{array}$$

e

$$\begin{array}{lll} \min & 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 & \\ & x_1 + x_2 - x_4 & = \; 1 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 & \leq \; 3 \\ & x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \;\; x_4 \geq 0, & \end{array}$$

sono problemi di PL.

Le applicazioni della Ricerca Operativa che possono essere formulate mediante l'uso di modelli di Programmazione Lineare sono molto frequenti e importanti. In riferimento alle applicazioni di tipo economico la funzione obiettivo ha di solito il significato di profitto (da massimizzare) oppure di costo (da minimizzare). Profitti e costi sono ottenuti come somma dei *profitti* e *costi marginali* cioè di quelli relativi a ciascuna unità di prodotto. Quando è richiesta la massimizzazione di un profitto, il modello contiene, di solito, vincoli che esprimono limitazioni superiori sulle risorse (vincoli di capacità produttiva, disponibilità di materie prime); se invece è richiesta la minimizzazione di un costo sono di solito presenti vincoli sulla domanda (richieste di mercato) che impongono limitazioni inferiori alle variabili.

È possibile la presenza di *vincoli di continuità* che esprimono conservazione o riduzione di masse o volumi ed hanno spesso la forma di vincoli di uguaglianza.

I modelli di Programmazione Lineare hanno un impiego molto generale non limitato ad applicazioni economiche o progettuali; ad esempio, essi sono usati come elementi base di procedimenti di soluzione di problemi piú complessi: è il caso di alcuni algoritmi di ottimizzazione discreta che sono basati sulla soluzione di una successione di problemi di Programmazione Lineare.

3.3 GENERALITÀ SUI MODELLI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

Mettiamo ora in evidenza le caratteristiche che un problema reale deve possedere per poter essere formulato come modello di Programmazione Lineare ed i pregi dei modelli di Programmazione Lineare.
Innanzitutto, chiariamo che le ipotesi che vengono assunte nel formulare un problema come modello di Programmazione Lineare sono le seguenti:

- *proporzionalità*: il contributo di una variabile di decisione alla funzione obiettivo e ai vincoli è proporzionale secondo una costante moltiplicativa alla quantità rappresentata dalla variabile stessa;
- *additività*: il contributo delle variabili di decisione alla funzione obiettivo e ai vincoli è dato dalla somma dei contributi di ogni singola variabile.
- *continuità*: ogni variabile di decisione può assumere tutti i valori reali nell'intervallo di ammissibilità, e quindi le variabili possono assumere valori frazionari.

In relazione ad applicazioni reali queste ipotesi non rappresentano una grossa restrizione nel senso che sono molti gli ambiti e i problemi che sono ben rappresentati da un modello di Programmazione Lineare; si tenga comunque presente che esistono casi significativi in cui queste ipotesi non sono soddisfatte e quindi in questi casi è necessario considerare Modelli di Programmazione Non Lineare.

La particolare attenzione dedicata ai modelli di Programmazione Lineare deriva, comunque, dai numerosi vantaggi che essa presenta e che possono essere così sintetizzati:

1. *Generalità e flessibilità.*

   I modelli di Programmazione Lineare possono descrivere moltissime situazioni reali anche assai diverse tra loro e quindi hanno un carattere di universalità e di adattabilità alle diverse realtà applicative e anche quando l'ipotesi di linearità non è accettabile, il modello lineare costituisce una buona base di partenza per successive generalizzazioni.

2. *Semplicità.*

   I modelli di Programmazione Lineare sono espressi attraverso il linguaggio dell'algebra lineare e quindi sono facilmente comprensibili anche in assenza di conoscenze matematiche piú elevate.

3. *Efficienza degli algoritmi risolutivi.*

   Come accennato in precedenza i modelli reali hanno dimensioni molto elevate ed è quindi indispensabile l'uso del calcolatore che con opportuni programmi di calcolo possa rapidamente fornire una soluzione numerica. Relativamente ai modelli di Programmazione Lineare esistono programmi molto efficienti e largamente diffusi che sono in grado di risolvere rapidamente problemi con migliaia di vincoli e centinaia di migliaia di variabili.

4. *Possibilità di analisi qualitative.*

   I modelli di Programmazione Lineare permettono di ottenere, oltre la soluzione numerica del problema, anche ulteriori informazioni relative alla dipendenza della soluzione da eventuali parametri presenti, che possono avere significative interpretazioni economiche.

3.4 CLASSI DI MODELLI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

Lo scopo di questo paragrafo è quello di illustrare alcune classi di problemi di Programmazione Lineare tipici che si incontrano frequentemente nelle applicazioni reali. Questa divisione in classi ha uno scopo esclusivamente didattico al fine di fornire una esposizione sistematica di esempi di modelli di Programmazione Lineare di tipo generale. Nella realtà, nella maggior parte dei casi, i problemi che si presentano non sono riconducibili ad una classe specifica, ma possono essere costituiti da molteplici elementi. Tuttavia, la trattazione per grandi classi di problemi dovrebbe fornire strumenti utili per la modellizzazione di problemi reali. Tenendo presente questa osservazione, nel seguito esamineremo tre grandi classi di modelli di Programmazione Lineare che rappresentano situazioni molto diffuse del mondo reale; si tratta dei

- *modelli di allocazione ottima di risorse*,
- *modelli di miscelazione*,
- *modelli di trasporto.*

Per ciascuna classe di modelli verranno presentati alcuni esempi e una formulazione generale. Tale divisione in "classi" di problemi ha il solo scopo permettere una descrizione schematica di alcune situazioni tipiche che possono essere rappresentate attraverso problemi di Programmazione Lineare. È chiaro che nella realtà i problemi si presentano nelle forme piú diverse e sta a colui che costruisce il modello fornirne una rappresentazione il piú possible completa e significativa del problema in analisi.

3.4.1 Modelli di allocazione ottima di risorse

Si tratta di modelli che considerano il problema di come dividere (allocare) risorse limitate tra varie esigenze in competizione fra di loro. Il generico termine *"risorse"* può rappresentare, ad esempio, disponibilità di macchinari, materie prime, mano d'opera, energia, tempi macchina, capitali, etc.

Esempio 3.4.1 *Un colorificio produce due tipi di coloranti* **C1** *e* **C2** *utilizzando 3 preparati base in polvere* **P1**, **P2**, **P3** *che vengono sciolti in acqua. La differente concentrazione dei preparati base dà origine ai due diversi tipi di coloranti. Le quantità (in ettogrammi) di preparati base necessarie per produrre un litro di colorante di ciascuno dei due tipi è riportato nella seguente tabella*

	C1	**C2**
P1	*1*	*1*
P2	*1*	*2*
P3	-	*1*

Ogni giorno la quantità di ciascuno dei preparati base (in ettogrammi) della quale il colorificio può disporre è la seguente

P1	**P2**	**P3**
750	*1000*	*400*

Il prezzo di vendita del colorante **C1** *è di 7 Euro al litro, mentre il colorante* **C2** *viene venduto a 10 Euro al litro. Determinare la strategia ottimale di produzione giornaliera in modo da massimizzare i ricavi ottenuti dalla vendita dei due coloranti.*

Formulazione.
Si vuole costruire il modello di Programmazione Lineare che rappresenti il problema in analisi considerando le limitazioni date dalle produzioni effettivamente realizzabili.
È immediato associare le variabili di decisione ai quantitativi di coloranti prodotti. Siano, quindi, rispettivamente x_1 e x_2 i quantitativi (in litri) da produrre giornalmente dei due coloranti.
Nel formulare il modello di Programmazione Lineare si deve verificare che siano soddisfatte le ipotesi fondamentali:

- *Proporzionalità.*

  I consumi dei preparati base e i ricavi ottenibili sono proporzionali ai quantitativi di coloranti prodotti. Ad esempio, per produrre una quantità x_2 di colorante **C2** si consumano $2x_2$ ettogrammi di **P2** e dalla vendita di x_2 litri di **C2** si ricavano $10x_2$ Euro indipendentemente dalla quantità prodotta e venduta dell'altro tipo di colorante.

- *Additività.*

  I consumi dei preparati base e i ricavi rispettivamente associati alla produzione dei due coloranti sono additivi, nel senso che per produrre x_1 litri di colorante **C1** e x_2 di **C2** si consumano $x_1 + 2x_2$ ettogrammi di preparato di base **P2** e si ricavano $7x_1 + 10x_2$ Euro.

- *Continuità.*

  Ogni variabile introdotta nel modello può assumere tutti i valori reali nell'intervallo di ammissibilità.

– *Variabili.* Come già detto, prendiamo come variabili di decisione x_1 e x_2, rispettivamente i quantitativi (in litri) di colorante **C1** e **C2** da produrre giornalmente.
– *Funzione obiettivo.* È rappresentata dal profitto totale che per le ipotesi fatte è dato (in Euro) da $7x_1 + 10x_2$.
– *Vincoli.* Poiché il consumo di preparati base non può essere superiore alla disponibilità si deve avere

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 750 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 1000 \\ x_2 &\leq 400. \end{aligned}$$

Inoltre si deve esplicitare il vincolo di non negatività sulle variabili

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Quindi la formulazione finale è

$$\begin{cases} \max\,(7x_1 + 10x_2) \\ x_1 + x_2 \leq 750 \\ x_1 + 2x_2 \leq 1000 \\ x_2 \leq 400 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

□

Esempio 3.4.2 *Una azienda automobilistica produce tre diversi modelli di autovettura: un modello economico, uno normale ed uno di lusso. Ogni autovettura viene lavorata da tre robot:* **A**, **B** *e* **C**. *I tempi necessari alla lavorazione sono riportati, in minuti, nella tabella seguente insieme al profitto netto realizzato per autovettura*

	Economica	**Normale**	**Lusso**
A	*20*	*30*	*62*
B	*31*	*42*	*51*
C	*16*	*81*	*10*
Prezzo	*1000*	*1500*	*2200*

I robot **A** *e* **B** *sono disponibili per 8 ore al giorno mentre il robot* **C** *è disponibile per 5 ore al giorno. Il numero di autovetture di lusso prodotte non deve superare il 20% del totale mentre il numero di autovetture economiche deve costituire almeno il 40% della produzione complessiva. Supponendo che tutte le autovetture prodotte vengano vendute, formulare un problema di Programmazione Lineare che permetta di decidere le quantità giornaliere (non necessariamente intere) da produrre per ciascun modello in modo tale da massimizzare i profitti rispettando i vincoli di produzione.*

Formulazione.
È un problema di allocazione ottima di risorse e può essere formulato in termini di Programmazione Lineare nel seguente modo.

– *Variabili.* Indichiamo con x_1, x_2, x_3, rispettivamente il numero di autovetture (assunte non necessariamente intere) del modello economico, normale e di lusso da produrre giornalmente.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo è data dal profitto globale ottenuto dalla vendita delle automobili e quindi può essere scritta

$$1000x_1 + 1500x_2 + 2200x_3.$$

– *Vincoli.* Ci sono due tipologie di vincoli da considerare:

- i vincoli sulla capacità produttiva; poiché il robot **A** è disponibile giornalmente per 8 ore, cioè per 480 minuti si ha il vincolo

  $$20x_1 + 30x_2 + 62x_3 \leq 480.$$

  Ragionando in modo analogo si ottengono i vincoli relativi alla disponibilità dei robot **B** e **C**, e quindi si ottengono i seguenti vincoli:

  $$31x_1 + 42x_2 + 51x_3 \leq 480$$

$$16x_1 + 81x_2 + 10x_3 \leq 300.$$

- i vincoli sul numero totale dei singoli tipi di autovetture da fabbricate giornalmente che possono essere scritti nella forma

$$x_3 \leq 0.2\,(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$x_1 \geq 0.4\,(x_1 + x_2 + x_3)\,.$$

Si devono inoltre esplicitare i vincoli di non negatività

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0.$$

Quindi la formulazione completa può essere scritta

$$\begin{cases} \max\,(1000x_1 + 1500x_2 + 2200x_3) \\ 20x_1 + 30x_2 + 62x_3 \leq 480 \\ 31x_1 + 42x_2 + 51x_3 \leq 480 \\ 16x_1 + 81x_2 + 10x_3 \leq 300 \\ x_3 \leq 0.2\,(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1 \geq 0.4\,(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

$\square$

Osservazione 3.4.3 Nel modello precedente sono state utilizzate variabili di decisione *continue* associate a quantità che possono essere considerate indivisibili (autovetture). Questa ipotesi potrebbe risultare impropria, tuttavia permette di formulare il problema come Problema di Programmazione Lineare (e non di Programmazione Lineare Intera, cioè come un problema piú “trattabile”). D’altra parte, in generale, tale ipotesi può non far perdere validità al modello soprattutto se i valori assunti dalle variabili di decisione sono relativamente molto grandi. Ogni approssimazione a valori interi del valore ottimo delle variabili, ovviamente, fa perdere l’ottimalità della soluzione così ottenuta, ma in molti casi tale soluzione approssimata può essere efficacemente utilizzata nella pratica.

Esempio 3.4.4 *Si consideri la stessa azienda dell’esempio precedente con la sola differenza che, questa volta, i tre modelli di autovetture possono essere prodotte utilizzando uno qualsiasi dei tre robot senza richiedere quindi che per avere un’autovettura finita sia necessaria la lavorazione di tutti i tre robot.*

Formulazione.
– *Variabili.* Indichiamo con x_{ij} , con $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3$, il numero di autovetture del modello j-esimo da produrre giornalmente con il robot i-esimo.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo diventa:

$$1000(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 1500(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 2200(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

– *Vincoli.*

- I vincoli sulla capacità produttiva si esprimono:

$$20x_{11} + 30x_{12} + 62x_{13} \le 480.$$

$$31x_{21} + 42x_{22} + 51x_{23} \le 480$$

$$16x_{31} + 81x_{32} + 10x_{33} \le 300.$$

- i vincoli sul numero totale dei singoli tipi di autovetture da fabbricare assumono la forma:

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \le 0.2 \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_{ij}$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \ge 0.4 \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_{ij}.$$

Si devono inoltre esplicitare i vincoli di non negatività

$$x_{ij} \ge 0 \qquad i = 1, 2, 3, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Quindi la formulazione finale è la seguente:

$$\begin{cases} \max\left(1000(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 1500(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 2200(x_{13} + x_{23} + x_{33})\right) \\ 20x_{11} + 30x_{12} + 62x_{13} \le 480 \\ 31x_{21} + 42x_{22} + 51x_{23} \le 480 \\ 16x_{31} + 81x_{32} + 10x_{33} \le 300 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \le 0.2\,(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \ge 0.4\,(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\ x_{ij} \ge 0 \qquad i = 1, 2, 3, \qquad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

□

Formulazione generale di un problema di allocazione ottima di risorse

Per costruire uno schema generale di formulazione per questo tipo di problemi si assuma di disporre di m risorse $\mathbf{R_1}, \mathbf{R_2}, \ \dots \ , \mathbf{R_m}$ e di voler fabbricare n diversi prodotti $\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}, \ \dots \ , \mathbf{P_n}$.

Le risorse possono essere sia umane (mano d'opera) sia materiali (disponibilità di macchinari o di materie prime). Il problema della pianificazione delle risorse consiste nel determinare le quantità da fabbricare di ciascun prodotto $\mathbf{P_1}, \dots, \mathbf{P_n}$ in modo da massimizzare il profitto rispettando i vincoli sulle risorse disponibili o sui livelli di produzione richiesti.

Si indichi con $a_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ la quantità della risorsa $\mathbf{R_i}$ necessaria per fabbricare una unità del prodotto $\mathbf{P_j}$. Si può così costruire la seguente tabella

	$\mathbf{P_1}$	$\cdots$	$\mathbf{P_j}$	$\cdots$	$\mathbf{P_n}$
$\mathbf{R_1}$	a_{11}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{R_i}$	a_{i1}	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	a_{in}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{R_m}$	a_{m1}	$\cdots$	a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}

Supponiamo che ciascuna risorsa $\mathbf{R_i}$ non possa superare un valore prefissato $b_i, \quad i = 1, \dots, m$

$\mathbf{R_1}$	$\mathbf{R_2}$	$\cdots$	$\mathbf{R_m}$
b_1	b_2	$\cdots$	b_m

e che nella vendita di ciascuna unità di prodotto $\mathbf{P_j}$ si ricavi un profitto netto $c_j, \quad j = 1, \dots, n$

$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\cdots$	$\mathbf{P_n}$
c_1	c_2	$\cdots$	c_n.

È utile ribadire le ipotesi già esposte in precedenza le quali devono valere in generale per la costruzione di modelli di Programmazione Lineare: *proporzionalità, additività, continuità* cioè i consumi delle risorse e i ricavi ottenibili sono proporzionali ai quantitativi di prodotto fabbricati; i consumi globali di risorse e i ricavi totali si ottengono come somma dei consumi e dei ricavi marginali; le variabili possono assumere valori frazionari.

Formulazione 1: risorse concorrenti.

Esaminiamo prima la situazione in cui il bene fabbricato per essere finito e pronto per la vendita deve utilizzare tutte le risorse, anche se in misura diversa.

– *Variabili di decisione.* Si introducono le variabili di decisione $x_1, x_2, \dots, x_n$ rappresentanti (in un'opportuna unità di misura) la quantità di ciascun prodotto $\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}, \ \dots \ , \mathbf{P_n}$. Queste saranno le incognite del problema. Tali variabili di decisione sono i cosiddetti *livelli di attività*. Introducendo come spazio delle variabili lo spazio delle $n-$uple reali $\mathbb{R}^n$ si può considerare un $x \in \mathbb{R}^n$ definendo $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$.

– *Funzione obiettivo*. Per le ipotesi fatte la funzione obiettivo (da massimizzare) può essere scritta

$$z = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

Introducendo $c \in \mathbb{R}^n$, definito $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$ la funzione obiettivo può essere scritta in notazione vettoriale

$$z = c^T x.$$

– *Vincoli*. Si devono introdurre i seguenti vincoli:

- Vincoli di capacità produttiva:

  tenendo conto delle limitazioni delle risorse si hanno i seguenti m vincoli

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \ldots & +a_{1n}x_n & \leq b_1 \\ a_{21}x_1+ & \ldots & +a_{2n}x_n & \leq b_2 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \ldots & +a_{mn}x_n & \leq b_m. \end{array}$$

- Vincoli di non negatività:

  le variabili devono essere non negative in quanto esse rappresentano livelli di produzione e quindi si hanno i vincoli

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Introducendo la matrice $(m \times n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e il vettore $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$ la formulazione completa del problema può essere scritta nella forma

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

È una formulazione generale (con solo vincoli di disuguaglianza e vincoli di non negatività) in cui si può porre un generico problema di allocazione ottima di risorse.

Nella pratica, potrebbe essere necessario imporre ulteriori vincoli:

- Vincoli di domanda
  - limitazioni inferiori sulle variabili x_i cioè
  $$x_i \geq l_i \qquad i = 1, \ldots, n$$
  con $l_i \geq 0$ per assicurare che i prodotti siano fabbricati in quantità significative. In questo caso, per ogni indice i per il quale $l_i > 0$ il vincolo di non negatività $x_i \geq 0$ è ridondante.
  - limitazioni superiori sulle variabili, cioè
  $$x_i \leq u_i \qquad i = 1, \ldots, n$$
  dovute ad eventuali possibilità limitate di assorbimento dei prodotti da parte del mercato.

  Introducendo le notazioni vettoriali $l = (l_1, \ldots, l_n)^T$ e $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$ questi vincoli possono essere scritti nella forma $l \leq x \leq u$, $x \in \mathbb{R}^n$.
- Vincoli di interezza.

  Se inoltre non ha senso considerare i prodotti quantità divisibili allora si deve definire un modello di programmazione a numeri interi. Cioè nel caso in cui non si possa supporre che i livelli di attività siano frazionari (ad es. se i prodotti sono quantità indivisibili come motori, lavatrici etc.), allora si deve aggiungere il vincolo che le quantità x_i siano intere.

Formulazione 2: risorse alternative.

Si consideri ora invece la situazione in cui il bene fabbricato per essere finito e pronto per la vendita necessita esclusivamente di una risorsa. Nella pratica questo può accadere se, ad esempio, ciascun reparto in cui può essere suddivisa un'industria è in grado di produrre autonomamente ciascuno dei prodotti, ovvero la lavorazione di un prodotto avviene esclusivamente in uno dei reparti disponibili.

– *Variabili di decisione.* Si introducono le variabili di decisione x_{ij} rappresentanti la quantità di prodotto $\mathbf{P_j}$ da fabbricare utilizzando la risorsa $\mathbf{R_i}$.

– *Funzione obiettivo.* Per le ipotesi fatte la funzione obiettivo (da massimizzare) può essere scritta
$$c_1 \sum_{i=1}^{m} x_{i1} + c_2 \sum_{i=1}^{m} x_{i2} + \ldots + c_n \sum_{i=1}^{m} x_{in} = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij}.$$

– *Vincoli.* I vincoli di capacità produttiva sono della forma
$$\begin{array}{cccc}
a_{11}x_{11}+ & \ldots & +a_{1n}x_{1n} & \leq b_1 \\
a_{21}x_{21}+ & \ldots & +a_{2n}x_{2n} & \leq b_2 \\
\vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_{m1}+ & \ldots & +a_{mn}x_{mn} & \leq b_m.
\end{array}$$

Infine si devono esplicitare i vincoli di non negatività della variabili cioè $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Come si può facilmente osservare la matrice A dei coefficienti delle disequazioni lineari che descrivono i vincoli è rimasta immutata rispetto alla matrice considerata nella formulazione del caso delle risorse concorrenti già vista, ma c'è una sostanziale differenza nelle variabili.

Modelli multi–plant

Si tratta di problemi di pianificazione della produzione in cui modelli di grandi dimensioni sono ottenuti come combinazione di modelli piú piccoli. Tali modelli combinati sono sicuramente piú efficaci dei sottomodelli dai quali essi sono costituiti. Esaminiamo un esempio di questa situazione.

Esempio 3.4.5 *Un'industria manifatturiera possiede due impianti di produzione e fabbrica due tipi di prodotti* $\mathbf{P_1}$ *e* $\mathbf{P_2}$ *utilizzando due macchine utensili: una per la levigatura e una per la pulitura. Per avere un prodotto finito è necessaria l'utilizzazione di entrambe le macchine. Il primo impianto ha una disponibilità massima settimanale di 80 ore della macchina per la levigatura e di 60 ore della macchina per la pulitura. Le disponibilità massime orarie delle due macchine nel secondo impianto sono rispettivamente di 60 e 75 ore settimanali. La tabella che segue riporta, per ciascun prodotto, il numero di ore di lavorazione necessarie su ciascuna macchina per ottenere un prodotto finito (poiché le macchine possedute dal secondo impianto sono piú vecchie, i tempi di utilizzo sono maggiori)*

	Impianto 1		Impianto 2	
	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$
levigatura	*4*	*2*	*5*	*3*
pulitura	*2*	*5*	*5*	*6*

Inoltre ciascuna unità di prodotto utilizza 4 Kg di materiale grezzo. Il profitto netto ottenuto dalla vendita di una unità di prodotto $\mathbf{P_1}$ *e* $\mathbf{P_2}$ *è rispettivamente di 10\$ e 15\$.*

(a) *Costruire un modello lineare che permetta di massimizzare il profitto complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti in ciascun impianto sapendo che settimanalmente l'industria dispone di 75 Kg di materiale grezzo nel primo impianto e di 45 Kg di materiale grezzo nel secondo impianto.*

(b) *Costruire un modello lineare che permetta di massimizzare il profitto complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti supponendo che l'industria non allochi a priori 75 Kg di materiale grezzo nel primo impianto e di 45 Kg di materiale grezzo nel secondo impianto, ma lasci al modello la decisione di come ripartire tra i due impianti 120 Kg complessivi disponibili di questo materiale grezzo.*

Formulazione

– *Variabili.* Si introducono le variabili x_1 e x_2 associate alla quantità di prodotto $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ fabbricato settimanalmente dal primo impianto e le variabili x_3 e x_4 associate alla quantità di prodotto $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ fabbricato settimanalmente dal secondo impianto.

Formulazione del caso (a)

Questo caso, nella pratica, corrisponde a costruire due modelli indipendenti: uno riferito al primo impianto, uno riferito al secondo impianto. Una "risorsa" (il materiale grezzo) è già allocata a priori.

Impianto 1: La formulazione relativa al primo impianto è:

$$\begin{cases} \max(10x_1 + 15x_2) \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 75 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Impianto 2: La formulazione relativa al secondo impianto è:

$$\begin{cases} \max(10x_3 + 15x_4) \\ 4x_3 + 4x_4 \leq 45 \\ 5x_3 + 3x_4 \leq 60 \\ 5x_3 + 6x_4 \leq 75 \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Formulazione del caso (b)

Questo caso corrisponde a costruire un unico modello comprendente entrambi gli impianti. L'allocazione della "risorsa" data dal materiale grezzo è lasciata al modello stesso.

La formulazione relativa a questo caso è:

$$\begin{cases} \max\ (10x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 15x_4) \\ \quad 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leq 120 \\ \quad 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ \quad 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ \quad 5x_3 + 3x_4 \leq 60 \\ \quad 5x_3 + 6x_4 \leq 75 \\ \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0 \end{cases}$$

□

Osservazione 3.4.6 Nel caso (b) si richiede al modello di ripartire i 120 Kg di materiale grezzo piuttosto che effettuare un'allocazione arbitraria a priori, quindi ci si può aspettare una maggiore efficienza nell'allocazione di queste risorse nel caso (b). Un confronto delle soluzioni ottime di questi problemi conferma questa intuizione: infatti nel caso (a), ottimizzando la produzione dell'impianto 1 e quella dell'impianto 2, si ottiene un guadagno complessivo di $225\$ + 168.75\$ = 393.75\$$, mentre nel caso (b) si ottiene un guadagno di 404.15$.

Osservazione 3.4.7 Si osservi la particolare struttura della matrice dei coefficienti dei vincoli che è tipica dei problemi di questo tipo

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Una matrice con questa struttura si chiama *matrice a blocchi*. Una siffatta struttura permette di utilizzare metodi particolari per la soluzione del problema. Infatti possono essere utilizzate *tecniche di decomposizione* che consentono di risolvere efficientemente anche problemi di questo tipo anche di dimensioni molto elevate. Si osservi che le tecniche di decomposizione non consistono nella suddivisione del problema in sottoproblemi, ma piuttosto con tale termine ci si riferisce a procedure computazionali specifiche che pur considerando il problema complessivo sfruttano la sua particolare struttura. L'importanza della decomposizione non è soltanto computazionale ma ha anche una significativa interpretazione economica; infatti essa corrisponde a considerare una pianificazione decentralizzata.

Modelli multiperiodo

Si tratta di problemi di allocazione ottima di risorse limitate analoghi a quelli già trattati, ma dove la pianificazione è effettuata su un orizzonte temporale composto da piú periodi elementari; si richiede, cioè, di estendere la programmazione mensile della produzione di un'azienda in modo da ottenere un piano di produzione semestrale con possibilità di giacenze al termine di ciascun mese. L'esempio che segue riporta una semplice situazione di questo tipo.

Esempio 3.4.8 *Si consideri l'industria manifatturiera vista nel precedente Esempio 3.4.5 nel caso in cui abbia solamente il primo impianto di produzione. In questo caso si deve programmare la produzione dei due prodotti* $\mathbf{P_1}$ *e* $\mathbf{P_2}$ *nelle due successive settimane sapendo che nella prima settimana si potranno vendere al piú 12 prodotti* $\mathbf{P_1}$ *e 4 prodotti* $\mathbf{P_2}$*, mentre nella seconda si potranno vendere* *al piú 8 prodotti* $\mathbf{P_1}$ *e 12 prodotti* $\mathbf{P_2}$. *Inoltre nella prima settimana c'è la possibiltà di produrre piú prodotti rispetto a quelli che si possono vendere, immagazzinando i prodotti in eccesso prevedendo un loro utilizzo nella settimana successiva. Costruire un modello lineare che permetta di massimizzare il profitto complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti nelle due settimane sapendo che settimanalmente l'industria dispone di 75 Kg di materiale grezzo e tenendo conto che il costo di immagazzinamento di un prodotto (sia di tipo* $\mathbf{P_1}$ *sia di tipo* $\mathbf{P_2}$*) è di 2 \$. Si ricorda che il profitto netto ottenuto dalla vendita di 1 unità di prodotto* $\mathbf{P_1}$ *e* $\mathbf{P_2}$ *è rispettivamente di 10\$ e 15\$.*

Formulazione

– *Variabili.* Si introducono le variabili x_1 e x_2 associate alla quantità di prodotti $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ fabbricati nella prima settimana, le variabili x_3 e x_4 associate alla quantità di prodotti $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ fabbricati nella seconda settimana e le variabili y_1 e y_2 che indicano le quantità di prodotti $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ fabbricati nella prima settimana ed immagazzinati per venderli nella seconda.

– *Funzione obiettivo.* Nella prima settimana saranno vendute le quantità (x_1-y_1) di prodotto $\mathbf{P_1}$ e (x_2-y_2) di prodotto $\mathbf{P_2}$, nella seconda le quantità (x_3+y_1) di prodotto $\mathbf{P_1}$ e (x_4+y_2) di prodotto $\mathbf{P_2}$. Tenendo conto dei costi di immagazzinamento si ottiene la seguente funzione obiettivo:

$$\begin{gathered}10(x_1-y_1)+15(x_2-y_2)+10(x_3+y_1)+15(x_4+y_2)-2(y_1+y_2)=\\10(x_1+x_3)+15(x_2+x_4)-2(y_1+y_2).\end{gathered}$$

– *Vincoli.* In questo problema si hanno nuovamente quattro tipologie di vincoli:

- i vincoli sulle capacità produttive nelle due settimane:

$$\begin{array}{ccccccc}4x_1 & + & 4x_2 & & & & \leq 75\\4x_1 & + & 2x_2 & & & & \leq 80\\2x_1 & + & 5x_2 & & & & \leq 60\\ & & & 4x_3 & + & 4x_4 & \leq 75\\ & & & 4x_3 & + & 2x_4 & \leq 80\\ & & & 2x_3 & + & 5x_4 & \leq 60\end{array}$$

- vincoli che rappresentano il fatto che, alla fine della prima settimana, una parte dei prodotti può essere immagazzinata

$$x_1-y_1\leq 12$$

$$x_2-y_2\leq 4$$

- vincoli che rappresentano il fatto che il numero dei prodotti disponibili nella seconda settimana non deve superare le richieste del mercato

$$y_1 + x_3 \leq 8$$

$$y_2 + x_4 \leq 12$$

- vincoli che rappresentano la non negatività delle variabili

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

La formulazione relativa a questo problema è:

$$\begin{cases} \max \Big(10(x_1 + x_2) + 15(x_3 + x_4) - 2(y_1 + y_2) \Big) \\ \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 75 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ 4x_3 + 4x_4 \leq 75 \\ 4x_3 + 2x_4 \leq 80 \\ 2x_3 + 5x_4 \leq 60 \\ x_1 - y_1 \leq 12 \\ x_2 - y_2 \leq 4 \\ x_3 + y_1 \leq 8 \\ x_4 + y_2 \leq 12 \\ \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Osservazione 3.4.9 Se non si fosse prevista la possibilità di poter immagazzinare dei prodotti non venduti, si sarebbe dovuto massimizzare separatamente i profitti ottenuti dalla vendita dei prodotti fabbricati nella prima e nella seconda settimana risolvendo i seguenti problemi:

$$\begin{cases} \max(10x_1 + 15x_2) \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 75 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ 0 \leq x_1 \leq 12 \\ 0 \leq x_2 \leq 4, \end{cases} \qquad \begin{cases} \max(10x_1 + 15x_2) \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 75 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ 0 \leq x_1 \leq 8 \\ 0 \leq x_2 \leq 12. \end{cases}$$

In questo caso si sarebbe ottenuto un guadagno complessivo di 180\$ + 212\$ = 392\$. Mentre la soluzione ottima del modello di Programmazione Lineare, descritto precedentemente e che prevedeva anche la possibilità di poter immagazzinare i prodotti non venduti, porta ad un guadagno di 429.1\$. Questo mette in evidenza la convenienza di effettuare una programmazione complessiva sulle due settimane, prevedendo la possibilità di produrre nella prima settimana di piú di quanto si possa vendere e considerando anche le spese relative all'immagazzinamento dei prodotti non venduti.

Osservazione 3.4.10 Si osservi che i primi sei vincoli del precedente modello multiperiodo presentano una struttura particolare. Infatti possono essere rappresentati da una matrice *a blocchi* (in particolare nell'esempio considerato tutti i blocchi sono uguali). Il fatto di avere la maggior parte dei vincoli con una struttura a blocchi è una caratteristica di tutti i modelli multiperiodo. Come detto per i modelli multi-plan, questa particolare struttura può essere sfruttata attraverso l'uso di tecniche di decomposizione in modo da risolvere efficientemente anche problemi di questo tipo di grosse dimensioni.

Esaminiamo ora un altro modello multiperiodo.

Esempio 3.4.11 *Una fabbrica produce due tipi di pneumatici A e B ed ha una gestione trimestrale della produzione. Per i prossimi tre mesi deve soddisfare il seguente ordine (espresso in numero di pneumatici richiesti ciascun mese)*

	tipo A	**tipo B**
ottobre	*16000*	*14000*
novembre	*7000*	*4000*
dicembre	*4000*	*6000*

Per la produzione di questi pneumatici la fabbrica dispone di due linee di produzione **L1** *e* **L2**. *Per avere un pneumatico finito e pronto per essere venduto, è necessaria la lavorazione di materiale grezzo su solo una delle due linee di produzione. Il numero di ore in cui le linee di produzione sono disponibili ciascun mese sono riportate nella seguente tabella*

	L1	**L2**
ottobre	*2000*	*3000*
novembre	*400*	*800*
dicembre	*200*	*1000*

I tempi necessari per produrre questi pneumatici varia a seconda del tipo e della linea di produzione usata. Tali tempi sono riportati nella seguente tabella (in ore)

	L1	**L2**
tipo A	*0.10*	*0.12*
tipo B	*0.12*	*0.18*

Il costo di ogni ora di lavorazione su una linea di produzione è uguale per entrambe le linee ed è pari a 6 euro. Il costo del materiale grezzo necessario per produrre ciascun pneumatico è di euro 2.50 per il tipo A e di euro 4.00 per il tipo B.

Nel primo e nel secondo mese del trimestre è possibile produrre più di quanto richiesto nello stesso mese; la produzione in eccesso deve essere immagazzinata per essere usata nel mese successivo. Ogni mese, il costo di tale immagazzinamento è di euro 0.35 per ciascun pneumatico immagazzinato. Si assuma che all'inizio del trimestre non ci sia nessun prodotto immagazzinato e analogamente alla fine del trimestre non rimanga nessun prodotto immagazzinato.
Costruire un modello lineare che permetta di pianificare la produzione trimestrale minimizzando il costo complessivo trascurando l'interezza dei prodotti.

Formulazione.
Si tratta di un problema di allocazione ottima di risorse nel quale si deve tenere presente la possibilità dell'immagazzinamento del prodotto in eccesso (allocazione ottima multiperiodo).

– *Variabili.* Si introducono le variabili A_{Li}^{ott}, A_{Li}^{nov}, A_{Li}^{dic} che indicano la quantità di pneumatici di tipo A prodotti dalla $i-$esima linea produzione $(i = 1, 2)$ rispettivamente nei mesi di ottobre, novembre e dicembre. Analogamente B_{Li}^{ott}, B_{Li}^{nov}, B_{Li}^{dic} indicheranno le quantità di pneumatici di tipo B prodotti dalla $i-$esima linea di produzione $(i = 1, 2)$ rispettivamente nei mesi di ottobre, novembre e dicembre. Si indichino inoltre con A_{im}^{ott}, A_{im}^{nov}, B_{im}^{ott}, B_{im}^{nov} le quantità di pneumatici di tipo A e B da immagazzinare nei mesi di ottobre e novembre.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare è data dal costo complessivo di produzione. Poiché un'ora di lavorazione su una linea di produzione costa 6 euro, e poiché i tempi di lavorazione cambiano a seconda della linea di produzione utilizzata, per produrre ciascun pneumatico di tipo A si spende euro 0.60 se si utilizza la linea **L1** e euro 0.72 se si utilizza la linea **L2**. Analogamente, il costo di ciascun pneumatico del tipo B è di euro 0.72 se si utilizza la macchina 1, e di euro 1.08 se si utilizza la linea **L2**. Quindi tenendo conto del costo del materiale grezzo e dell'immagazzinamento, il costo complessivo sarà

$$0.6(A_{L1}^{ott} + A_{L1}^{nov} + A_{L1}^{dic}) + 0.72(A_{L2}^{ott} + A_{L2}^{nov} + A_{L2}^{dic}) +$$

$$+0.72(B_{L1}^{ott} + B_{L1}^{nov} + B_{L1}^{dic}) + 1.08(B_{L2}^{ott} + B_{L2}^{nov} + B_{L2}^{dic}) +$$

$$+2.50(A_{L1}^{ott} + A_{L1}^{nov} + A_{L1}^{dic} + A_{L2}^{ott} + A_{L2}^{nov} + A_{L2}^{dic}) +$$

$$+4.00(B_{L1}^{ott} + B_{L1}^{nov} + B_{L1}^{dic} + B_{L2}^{ott} + B_{L2}^{nov} + B_{L2}^{dic}) +$$

$$+0.35(A_{im}^{ott} + A_{im}^{nov} + B_{im}^{ott} + B_{im}^{nov}).$$

– *Vincoli.* I vincoli dovuti alla disponibilità limitata delle macchine sono

$$\begin{aligned} 0.10A_{L1}^{ott} + 0.12B_{L1}^{ott} &\leq 2000 \\ 0.10A_{L1}^{nov} + 0.12B_{L1}^{nov} &\leq 400 \\ 0.10A_{L1}^{dic} + 0.12B_{L1}^{dic} &\leq 200 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0.12A_{L2}^{ott} + 0.18B_{L2}^{ott} &\leq 3000\\
0.12A_{L2}^{nov} + 0.18B_{L2}^{nov} &\leq 800\\
0.12A_{L2}^{dic} + 0.18B_{L2}^{dic} &\leq 1000.
\end{aligned}$$

Si hanno inoltre i seguenti vincoli dovuti alla richiesta e all'immagazzinamento:

$$\begin{aligned}
A_{L1}^{ott} + A_{L2}^{ott} &= 16000 + A_{im}^{ott}\\
A_{L1}^{nov} + A_{L2}^{nov} + A_{im}^{ott} &= 7000 + A_{im}^{nov}\\
A_{L1}^{dic} + A_{L2}^{dic} + A_{im}^{nov} &= 4000
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{L1}^{ott} + B_{L2}^{ott} &= 14000 + B_{im}^{ott}\\
B_{L1}^{nov} + B_{L2}^{nov} + B_{im}^{ott} &= 4000 + B_{im}^{nov}\\
B_{L1}^{dic} + B_{L2}^{dic} + B_{im}^{nov} &= 6000.
\end{aligned}$$

Si hanno infine i vincoli di non negatività sulle variabili. Quindi il modello finale è:

$$\begin{cases}
\min\Big(3.1(A_{L1}^{ott} + A_{L1}^{nov} + A_{L1}^{dic}) + 3.22(A_{L2}^{ott} + A_{L2}^{nov} + A_{L2}^{dic}) +\\
\quad +4.72(B_{L1}^{ott} + B_{L1}^{nov} + B_{L1}^{dic}) + 5.08(B_{L2}^{ott} + B_{L2}^{nov} + B_{L2}^{dic}) +\\
\quad +0.35(A_{im}^{ott} + A_{im}^{nov} + B_{im}^{ott} + B_{im}^{nov})\Big)\\
0.10A_{L1}^{ott} + 0.12B_{L1}^{ott} \leq 2000\\
0.10A_{L1}^{nov} + 0.12B_{L1}^{nov} \leq 400\\
0.10A_{L1}^{dic} + 0.12B_{L1}^{dic} \leq 200\\
0.12A_{L2}^{ott} + 0.18B_{L2}^{ott} \leq 3000\\
0.12A_{L2}^{nov} + 0.18B_{L2}^{nov} \leq 800\\
0.12A_{L2}^{dic} + 0.18B_{L2}^{dic} \leq 1000\\
A_{L1}^{ott} + A_{L2}^{ott} = 16000 + A_{im}^{ott}\\
A_{L1}^{nov} + A_{L2}^{nov} + A_{im}^{ott} = 7000 + A_{im}^{nov}\\
A_{L1}^{dic} + A_{L2}^{dic} + A_{im}^{nov} = 4000\\
B_{L1}^{ott} + B_{L2}^{ott} = 14000 + B_{im}^{ott}\\
B_{L1}^{nov} + B_{L2}^{nov} + B_{im}^{ott} = 4000 + B_{im}^{nov}\\
B_{L1}^{dic} + B_{L2}^{dic} + B_{im}^{nov} = 6000\\
A_{Li}^{ott} \geq 0, A_{Li}^{nov} \geq 0, A_{Li}^{dic} \geq 0,\ i = 1,2\\
B_{Li}^{ott} \geq 0, B_{Li}^{nov} \geq 0, B_{Li}^{dic} \geq 0,\ i = 1,2.
\end{cases}$$

□

3.4.2 Modelli di miscelazione

Nei modelli di allocazione ottima le risorse devono essere ripartite mentre nei modelli di miscelazione le risorse devono essere combinate tra di loro. I modelli di miscelazione decidono come combinare (miscelare) tali risorse in maniera da soddisfare al meglio determinati obiettivi rispettando opportune richieste.

Esempio 3.4.12 *Un'industria conserviera deve produrre succhi di frutta mescolando polpa di frutta e dolcificante ottenendo un prodotto finale che deve soddisfare alcuni requisiti riguardanti il contenuto di vitamina C, di sali minerali e di zucchero. La polpa di frutta e il dolcificante vengono acquistati al costo rispettivamente di 4 Euro e 6 Euro ogni ettogrammo. Inoltre dalle etichette si ricava che 100 grammi di polpa di frutta contengono 140 mg di vitamina C, 20 mg di sali minerali e 25 grammi di zucchero, mentre 100 grammi di dolcificante contengono 10 mg di sali minerali, 50 grammi di zucchero e non contengono vitamina C. I requisiti che il prodotto finale (cioè il succo di frutta pronto per la vendita) deve avere sono i seguenti: il succo di frutta deve contenere almeno 70 mg di vitamina C, almeno 30 mg di sali minerali e almeno 75 grammi di zucchero. Si devono determinare le quantità di polpa di frutta e di dolcificante da utilizzare nella produzione del succo di frutta in modo da minimizzare il costo complessivo dell'acquisto dei due componenti base.*

Formulazione.
Si vuole costruire un modello di Programmazione Lineare che rappresenti il problema in analisi tenendo presente i requisiti di qualità richiesti. Si verifica facilmente che le ipotesi fondamentali di un modello di Programmazione Lineare sono soddisfatte.

– *Variabili.* È naturale associare la variabili di decisione alle quantità di polpa di frutta e di dolcificante da utilizzare per la produzione del succo di frutta. Quindi siano x_1 e x_2 rispettivamente le quantità espresse in ettogrammi di polpa di frutta e di dolcificante che devono essere utilizzate.

– *Funzione obiettivo.* È rappresentata dal costo complessivo dell'acquisto dei due componenti base e quindi è data (in centesimi di Euro) da $400x_1 + 600x_2$. Questa espressione naturalmente deve essere minimizzata.

– *Vincoli.* Poiché un ettogrammo di polpa contiene 140 mg di vitamina C e il dolcificante non contiene vitamina C, il primo vincolo da considerare riguardante il contenuto di vitamina C del succo di frutta si può scrivere nella forma

$$140x_1 \geq 70.$$

Analogamente per rispettare il requisito sul contenuto di sali minerali del succo di frutta si dovrà imporre il vincolo

$$20x_1 + 10x_2 \geq 30.$$

Infine il vincolo sul contenuto di zucchero del succo di frutta si può esprimere nella forma

$$25x_1 + 50x_2 \geq 75.$$

Infine si deve esplicitare il vincolo di non negatività sulle variabili cioè

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Quindi la formulazione finale è

$$\begin{cases} \min(400x_1 + 600x_2) \\ 140x_1 \geq 70 \\ 20x_1 + 10x_2 \geq 30 \\ 25x_1 + 50x_2 \geq 75 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

□

Esempio 3.4.13 – Il problema della dieta a costo minimo
Una dieta prescrive che giornalmente devono essere assimilate quantità predeterminate di calorie, proteine e calcio, intese come fabbisogni minimi giornalieri, disponendo di cinque alimenti base (pane, latte, uova, carne, dolce). Tali fabbisogni minimi sono di 2000 calorie, 50 g. di proteine, 700 mg. di calcio. Dalle tabelle dietetiche si ricavano i seguenti contenuti di calorie (in cal.), proteine (in g.), calcio (in mg.) per ogni singola porzione di ciascun alimento, intendendo come porzione una quantità espressa in grammi e quindi frazionabile.

	Pane	**Latte**	**Uova**	**Carne**	**Dolce**
calorie	*110*	*160*	*180*	*260*	*420*
proteine	*4*	*8*	*13*	*14*	*4*
calcio	*2*	*285*	*54*	*80*	*22*

I costi (in Euro) e il numero massimo di porzioni tollerate giornalmente sono i seguenti

	Pane	**Latte**	**Uova**	**Carne**	**Dolce**
costo	*2*	*3*	*4*	*19*	*20*
porz.	*4*	*8*	*3*	*2*	*2*

Determinare una dieta a costo minimo che soddisfi le prescrizioni richieste.

Formulazione.
Poiché si è supposto che le porzioni siano frazionabili ed inoltre valgono le ipotesi di linearità, si può costruire un modello di Programmazione Lineare per rappresentare il problema in analisi.

– *Variabili.* È ovvio introdurre le variabili x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 indicanti le quantità di porzioni dei singoli alimenti da includere giornalmente nella dieta.

– *Funzione obiettivo.* È rappresentata dal costo complessivo ed è quindi data da

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 19x_4 + 20x_5.$$

– *Vincoli.* Poiché sono prescritti i fabbisogni minimi giornalieri, si avranno i seguenti vincoli:

$$\begin{array}{rcc} \text{calorie} & \longrightarrow & 110x_1 + 160x_2 + 180x_3 + 260x_4 + 420x_5 \geq 2000 \\ \text{proteine} & \longrightarrow & 4x_1 + 8x_2 + 13x_3 + 14x_4 + 4x_5 \geq 50 \\ \text{calcio} & \longrightarrow & 2x_1 + 285x_2 + 54x_3 + 80x_4 + 22x_5 \geq 700 \end{array}$$

Inoltre i vincoli sul numero massimo di porzioni giornaliere di ciascun alimento e di non negatività

$$0 \leq x_1 \leq 4,\ 0 \leq x_2 \leq 8,\ 0 \leq x_3 \leq 3,\ 0 \leq x_4 \leq 2,\ 0 \leq x_5 \leq 2.$$

La formulazione completa sarà quindi

$$\begin{cases} \min\,(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 19x_4 + 20x_5) \\ 110x_1 + 160x_2 + 180x_3 + 260x_4 + 420x_5 \geq 2000 \\ 4x_1 + 8x_2 + 13x_3 + 14x_4 + 4x_5 \geq 50 \\ 2x_1 + 285x_2 + 54x_3 + 80x_4 + 22x_5 \geq 700 \\ 0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 8, 0 \leq x_3 \leq 3, 0 \leq x_4 \leq 2, 0 \leq x_5 \leq 2. \end{cases}$$

Se inoltre si vuole supporre, ad esempio, che nella dieta sia presente almeno una porzione di dolce e due di latte si dovranno imporre i vincoli $x_5 \geq 1$ e $x_2 \geq 2$ da aggiungere alla precedente formulazione. In questo caso, i vincoli già presenti $x_5 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ sono ridondanti. □

Formulazione generale di un problema di miscelazione

Formalmente, supponiamo di disporre di n sostanze diverse che indichiamo con $\mathbf{S_1}, \mathbf{S_2}, \ldots, \mathbf{S_n}$ ciascuna delle quali contenga una certa quantità di ciascuno degli m componenti utili che indichiamo con $\mathbf{C_1}, \mathbf{C_2}, \ldots, \mathbf{C_m}$. Supponendo che ogni sostanza $\mathbf{S_j}$ abbia costo unitario c_j, $j = 1, \ldots, n$

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{S_1} & \mathbf{S_2} & \cdots & \mathbf{S_n} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{array}$$

si desidera ottenere la miscela piú economica che soddisfi alcuni requisiti qualitativi, cioè contenga una quantità non inferiore a b_i di ciascun $\mathbf{C_i}$, $i = 1, \ldots, m$

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{C_1} & \mathbf{C_2} & \cdots & \mathbf{C_m} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m. \end{array}$$

Si indichi con $a_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ la quantità di componente $\mathbf{C_i}$ presente nella sostanza $\mathbf{S_j}$. Si può così costruire la seguente tabella

	$\mathbf{S_1}$	$\cdots$	$\mathbf{S_j}$	$\cdots$	$\mathbf{S_n}$
$\mathbf{C_1}$	a_{11}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{C_i}$	a_{i1}	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	a_{in}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{C_m}$	a_{m1}	$\cdots$	a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}

Formulazione.
Supponendo che valgano le ipotesi di proporzionalità, additività ed inoltre assumendo che le quantità di sostanze da utilizzare siano frazionabili, si può formulare questo problema in termini di un problema di Programmazione Lineare.

– *Variabili.* È naturale introdurre le variabili di decisione $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rappresentanti la quantità di ciascuna sostanza $\mathbf{S_1}, \mathbf{S_2}, \ldots, \mathbf{S_n}$ da utilizzare nella miscela. Queste saranno le incognite del problema. Introducendo come spazio delle variabili lo spazio delle $n-$uple reali $\mathbb{R}^n$ si può considerare un $x \in \mathbb{R}^n$ definendo $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$.

– *Funzione obiettivo.* Per le ipotesi fatte, la funzione obiettivo può essere scritta

$$z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j.$$

Introducendo $c \in \mathbb{R}^n$, definito $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$, la funzione obiettivo può essere scritta in notazione vettoriale

$$z = c^T x.$$

– *Vincoli.* Si devono introdurre i seguenti vincoli:

- Vincoli di qualità.

  Tenendo conto del fatto che la miscela deve contenere una quantità non inferiore a b_i di ciascun componente $\mathbf{C_i}$ si dovrà avere

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

- Vincoli di non negatività.

  Si devono infatti considerare i vincoli di non negatività sulle variabili cioè $x_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Introducendo la matrice $(m \times n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e il vettore $b = (b_1, \dots, b_m)^T$ la formulazione completa del problema può essere scritta nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Nella pratica, potrebbe essere necessario introdurre ulteriori vincoli:

- possono essere presenti limitazioni superiori o inferiori sulle variabili cioè $x_j \geq L$, $x_j \leq M$, $j = 1, \dots, n$;
- se è richiesto anche che la miscela contenga una quantità non superiore ad un valore d_i di ciascun componente $\mathbf{C_i}$ si dovrà aggiungere alla formulazione un altro vincolo di qualità:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq d_i, \quad i = 1, \dots, m;$$

- in alcuni casi si richiede che una certa sostanza appartenga alla miscela solo se un'altra sostanza vi appartiene (o non vi appartiene). Questi vincoli richiedono l'uso di variabili booleane come descritto in seguito.

□

Esempio 3.4.14 *Il prodotto finale di una fabbrica è ottenuto raffinando materie prime grezze e miscelandole insieme. Queste materie prime possono essere di due categorie: naturali e sintetizzate. In particolare, sono disponibili tre materie prime naturali (***N1, N2, N3***) e due materie prime sintetizzate (***S1, S2***). Le materie prime naturali e quelle sintetizzate richiedono differenti linee di produzione. Ogni settimana è possibile raffinare non più di 500 quintali di materie prime naturali e non più di 300 quintali di materie prime sintetizzate. Si assume che non ci sia perdita di peso durante la raffinazione e che si possa trascurare il costo di raffinazione. Inoltre esiste una restrizione tecnologica sulla gradazione del prodotto finale: nell'unità di misura in cui questa gradazione è misurata, essa deve essere tra 2 e 7; si assume che tale gradazione nella miscela finale dipenda linearmente dalle singole gradazioni delle materie prime componenti. Nella tabella che segue è riportato il costo (in euro) per quintale e la gradazione delle materie prime grezze.*

	N1	**N2**	**N3**	**S1**	**S2**
costo	*300*	*190*	*250*	*200*	*230*
grad.	*6.0*	*1.9*	*8.5*	*5.0*	*3.5*

Il prodotto finale viene venduto a 350 euro per quintale. Determinare come va pianificata la produzione settimanale per massimizzare il profitto netto.

Formulazione.

– *Variabili.* Introduciamo le variabili di decisione x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 rappresentanti le quantità (in quintali) di **N1**, **N2**, **N3**, **S1**, **S2** che devono essere comprate e raffinate in una settimana. Inoltre introduciamo una ulteriore variabile y che indica la quantità di prodotto finale che deve essere fabbricato.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da massimizzare sarà data dal profitto netto cioè da

$$350y - 300x_1 - 190x_2 - 250x_3 - 200x_4 - 230x_5.$$

– *Vincoli.* Sono presenti tre tipi di vincoli

· capacità di raffinamento

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 500$$

$$x_4 + x_5 \leq 300;$$

· limitazioni sulla gradazione

$$6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 \leq 7y$$

$$6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 \geq 2y;$$

· vincolo di continuità

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = y.$$

Questo vincolo di continuità esprime il fatto che il peso finale del prodotto deve essere uguale alla somma dei pesi degli ingredienti.

Inoltre si devono esplicitare i vincoli di non negatività delle variabili.

La formulazione finale risulta quindi

$$\begin{cases} \max\,(-300x_1 - 190x_2 - 250x_3 - 200x_4 - 230x_5 + 350y) \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\ x_4 + x_5 \leq 300 \\ 6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 - 7y \leq 0 \\ 6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 - 2y \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - y = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

□

Osservazione 3.4.15 Un errore comune è quello di scrivere i vincoli sulla gradazione

$$6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 \leq 7$$

$$6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 \geq 2.$$

Queste relazioni sono evidentemente dimensionalmente errate: il primo membro ha le dimensioni di *gradazione* $\times$ *quantità* mentre il secondo membro ha le dimensioni della *gradazione*. Tuttavia, invece delle variabili x_i in queste due disuguaglianze si potevano usare le variabili x_i/y per rappresentare le *proporzioni degli ingredienti*, piuttosto che le *quantità assolute* x_i; ovviamente, in questo caso si dovevano modificare anche le altre espressioni. Comunque, l'uso delle variabili x_i/y è ovviamente possibile solo nel caso in cui la quantità di prodotto fabbricato è non nulla, cioè $y \neq 0$.

Modelli di input–output

I modelli di miscelazione possono essere visti come modelli piú generali in cui le sostanze $\mathbf{S_j}$ e i componenti utili $\mathbf{C_i}$ sono genericamente definiti come *"input"* e *"output"*; per ogni input j si deve decidere la quantità x_j da utilizzare incorrendo in un costo c_jx_j e creando $a_{ij}x_j$ unità di output i. Lo scopo è quello di determinare la combinazione a più basso costo di input che fornisce, per ogni output i, una quantità di unità di output compresa tra valori prefissati. Nei modelli di miscelazione analizzati fino ad ora, gli input sono dati dalle sostanze che devono essere mescolate, gli output sono dati dalle qualità della miscela risultante.

Un esempio di questa generalizzazione è dato dai problemi di *assegnazione di personale a turni* che rappresentano problemi di fondamentale importanza in diversi settori applicativi; in questo caso gli output possono corrispondere alle ore lavorate in un certo giorno i e, per ogni turno lavorativo j, a_{ij} rappresenta il numero di ore che una persona assegnata al turno j lavorerà il giorno i (ponendo $a_{ij} = 0$ se la persona assegnata al turno j non lavora il giorno i); le c_j rappresentano il salario di una persona assegnata al turno j e x_j il numero di persone assegnate a quel turno. In questo contesto, la funzione obiettivo diventa il costo totale dei salari mensile, mentre i vincoli diventano quelli dovuti al fatto che ogni giorno i, il numero totale di ore lavorative fornite dalle persone che lavorano quel giorno deve essere pari ad almeno un valore prefissato b_i. Supponendo di voler considerare n giorni e m possibili turni, un modello di Programmazione Lineare che rappresenti questa situazione è dato da

$$\min \quad c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & \geq b_1 \\ a_{21}x_1+ & \dots & +a_{2n}x_n & \geq b_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n & \geq b_m \\ x_j \geq 0, & j=1,\dots,n. \end{array}$$

In questo caso però, a differenza degli altri casi di miscelazione visti fino ad ora, l'assunzione di continuità delle variabili non è molto plausibile e potrebbe risultare necessario introdurre il vincolo di interezza sulle variabili.
Il concetto di modello di "input–output" fu una delle prime applicazioni della Programmazione Lineare nelle analisi economiche.

Si riporta, di seguito, un semplice esempio di assegnamento di personale a turni di lavoro.

Esempio 3.4.16 *Un catena di ristoranti opera sette giorni alla settimana e richiede il seguente numero minimo di camerieri:*

Lun.	**Mar.**	**Mer.**	**Giov.**	**Ven.**	**Sab.**	**Dom.**
52	*50*	*47*	*55*	*70*	*40*	*40*

Ciascun cameriere lavora seguendo turni cosí definiti: cinque giorni lavorativi ogni settimana e due di riposo; inoltre sono possibili al piú quattro giorni consecutivi di lavoro seguiti da uno di riposo; inoltre uno solo dei due giorni del fine settimana (sabato o domenica) deve far parte del turno di lavoro. I turni risultanti sono sei e sono schematizzati nella tabella che segue (dove "L" indica giornata lavorativa e "R" riposo):

TURNI:	1^o	2^o	3^o	4^o	5^o	6^o	7^o	8^o
Lun.	L	R	L	L	L	L	L	L
Mar.	L	L	R	L	L	R	L	L
Mer.	L	L	L	R	L	L	R	L
Giov.	L	L	L	L	R	L	L	R
Ven.	R	L	L	L	L	L	L	L
Sab.	L	R	L	R	L	R	L	R
Dom.	R	L	R	L	R	L	R	L

Il salario settimanale di un cameriere è pari a 250 Euro se assegnato ad un turno che non comprende la domenica, mentre è pari a 270 Euro se il turno comprende anche la domenica. Il gestore di questa catena di ristoranti vuole minimizzare il costo che deve sostenere per retribuire i camerieri in modo da soddisfare le richieste giornaliere.

Formulazione.

–*Variabili.* Si associano le variabili di decisione x_j al numero di camerieri assegnati al turno j, $j = 1, \dots, 8$.

–*Funzione obiettivo.* È data dal salario complessivo dei camerieri e quindi può essere espressa nella forma

$$250x_1 + 270x_2 + 250x_3 + 270x_4 + 250x_5 + 270x_6 + 250x_7 + 270x_8.$$

–*Vincoli.* I vincoli sono dovuti al fatto che ogni giorno c'è una richiesta minima di camerieri. Osservando ogni giorno quale turno prevede il lavoro o il riposo si ottengono i seguenti vincoli

$$\begin{aligned}
x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &\geq 52\\
x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + +x_7 + x_8 &\geq 50\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_8 &\geq 47\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 &\geq 55\\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &\geq 70\\
x_1 + x_3 + x_5 + x_7 &\geq 40\\
x_2 + x_4 + x_6 + x_8 &\geq 40
\end{aligned}$$

Si deve inoltre esplicitare la non negatività delle variabili $x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, 8$ e l'interezza $x_j \in \mathbf{Z}$, $j = 1, \dots, 8$.

La formulazione completa sarà quindi

$$\begin{cases}
\min\,(250x_1 + 270x_2 + 250x_3 + 270x_4 + 250x_5 + 270x_6 + 250x_7 + 270x_8)\\
x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 52\\
x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_7 + x_8 \geq 50\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_8 \geq 47\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 \geq 55\\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 70\\
x_1 + x_3 + x_5 + x_7 \geq 40\\
x_2 + x_4 + x_6 + x_8 \geq 40\\
x_j \geq 0, x_j \in \mathbf{Z}, \quad i = 1, \dots, 8
\end{cases}$$

□

È chiaramente riconoscibile questa formulazione come un modello di miscelazione; è sufficiente, infatti, introdurre la matrice A che definisce i vincoli di un problema di miscelazione nel seguente modo:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se nel posto } (i,j) \text{ della tabella c'è la lettera “L”}\\ 0 & \text{se nel posto } (i,j) \text{ della tabella c'è la lettera “R”.}\end{cases}$$

3.4.3 Modelli di trasporto

Si tratta di problemi in cui si hanno un certo numero di località (origini) ciascuna delle quali ha una quantità fissata di merce disponibile e un certo numero di clienti residenti in altre località (destinazioni) i quali richiedono quantitativi precisi di merce. Quindi conoscendo il costo unitario del trasporto della merce da ciascuna località origine a ciascuna località destinazione è necessario pianificare i trasporti, cioè la quantità di merce che deve essere trasportata da ciascuna località origine a ciascuna località destinazione in modo da soddisfare l'ordine dei clienti minimizzando il costo complessivo derivante dai trasporti.

Esempio 3.4.17 *Un'industria dell'acciaio dispone di due miniere* $\mathbf{M_1}$ *e* $\mathbf{M_2}$ *e di tre impianti di produzione* $\mathbf{P_1}$ $\mathbf{P_2}$ $\mathbf{P_3}$. *Il minerale estratto deve essere giornalmente trasportato agli impianti di produzione soddisfacendo le rispettive richieste. Le miniere* $\mathbf{M_1}$ *e* $\mathbf{M_2}$ *producono giornalmente rispettivamente 130 e 200 tonnellate di minerale. Gli impianti richiedono giornalmente le seguenti quantità (in tonnellate) di minerale*

$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$
80	*100*	*150*

Il costo (in euro) del trasporto da ciascuna miniera a ciascun impianto di produzione di una tonnellata di minerale è riportato nella seguente tabella

	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$
$\mathbf{M_1}$	*10*	*8*	*21*
$\mathbf{M_2}$	*12*	*20*	*14*

Formulare un modello che descriva il trasporto dalle miniere agli impianti di produzione in modo da minimizzare il costo globale del trasporto.

Analisi del problema.
È un problema di trasporti con 2 origini ($\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$) e 3 destinazioni ($\mathbf{P_1}$ $\mathbf{P_2}$ $\mathbf{P_3}$). Si noti che risulta $130+200 = 330$ e $80+100+150 = 330$, ovvero la somma delle disponiblità uguaglia la somma delle richieste.

Formulazione.

– *Variabili.* Associamo le variabili di decisione alle quantità di minerale che deve essere trasportato; indichiamo con x_{ij} $\; i = 1,2, \;\; j = 1,2,3,$ le quantità (in tonnellate) di minerale da trasportare giornalmente da ciascuna miniera $\mathbf{M_i}$ a ciascun impianto di produzione $\mathbf{P_j}$.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare è data dalla somma dei costi dei trasporti cioè da

$$z = 10x_{11} + 8x_{12} + 21x_{13} + 12x_{21} + 20x_{22} + 14x_{23}.$$

– *Vincoli.* I vincoli di origine esprimono il fatto che la somma della quantità di minerale trasportato dalla miniera $\mathbf{M_i}$ deve essere uguale alla disponibilità giornaliera della miniera stessa:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 130 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 200. \end{aligned}$$

I vincoli di destinazione esprimono il fatto che la somma delle quantità di minerale trasportato all'impianto di produzione $\mathbf{P_j}$ deve essere pari alla richiesta giornaliera di tale impianto:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= 80 \\ x_{12} + x_{22} &= 100 \\ x_{13} + x_{23} &= 150. \end{aligned}$$

Infine si devono considerare i vincoli di non negatività $x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3$.
La formulazione completa è quindi

$$\begin{cases} \min\,(10x_{11} + 8x_{12} + 21x_{13} + 12x_{21} + 20x_{22} + 14x_{23}) \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 130 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 200 \\ x_{11} + x_{21} = 80 \\ x_{12} + x_{22} = 100 \\ x_{13} + x_{23} = 150 \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

□

Formulazione generale di un problema di trasporti

Sono definite m località *origini* indicate con $\mathbf{O_1}, \ldots, \mathbf{O_m}$, e n località *destinazioni* indicate con $\mathbf{D_1}, \ldots, \mathbf{D_n}$. Ogni origine $\mathbf{O_i}$, $(i = 1, \ldots, m)$ può fornire una certa disponibilità $a_i \geq 0$ di merce che deve essere trasferita dalle origini alle destinazioni

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{O_1} & \cdots & \mathbf{O_m} \\ a_1 & \cdots & a_m. \end{array}$$

Ad ogni destinazione $\mathbf{D_j}$, $(j = 1, \ldots, n)$ è richiesta una quantità $b_j \geq 0$ di merce.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D_1} & \cdots & \mathbf{D_n} \\ b_1 & \cdots & b_n. \end{array}$$

Supponiamo che il costo del trasporto di una unità di merce da $\mathbf{O_i}$ a $\mathbf{D_j}$ sia pari a c_{ij}. Tali costi nella realtà sono spesso collegati alle distanze tra origini e destinazioni.
Il problema consiste nel pianificare i trasporti in modo da soddisfare le richieste delle destinazioni minimizzando il costo del trasporto complessivo nella seguente ipotesi:

- la disponibilità complessiva uguaglia la richiesta complessiva, cioè

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j; \tag{3.4.1}$$

si escludono possibilità di giacenze nelle origini, cioè tutta la merce prodotta in una origine deve essere trasportata in una delle destinazioni; si escludono possibilità di giacenze nelle destinazioni, cioè la quantità totale che arriva in una destinazione $\mathbf{D_j}$ deve uguagliare la richiesta b_j.

Formulazione.
Si vuole dare una formulazione del problema in esame in termini di un problema di programmazione lineare supponendo quindi che siano verificate le ipotesi di linearità e continuità.

– *Variabili.* Per ogni coppia di origine e destinazione $\mathbf{O_i}$, $\mathbf{D_j}$ si introducono le variabili di decisione x_{ij} rappresentanti la quantità di merce da trasportare da $\mathbf{O_i}$, a $\mathbf{D_j}$. Si tratta di mn variabili

	$\mathbf{D_1}$	$\cdots$	$\mathbf{D_j}$	$\cdots$	$\mathbf{D_n}$
$\mathbf{O_1}$	x_{11}	$\cdots$	x_{1j}	$\cdots$	x_{1n}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{O_i}$	x_{i1}	$\cdots$	x_{ij}	$\cdots$	x_{in}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{O_m}$	x_{m1}	$\cdots$	x_{mj}	$\cdots$	x_{mn}

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare sarà data da costo totale del trasporto e quindi da

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$$

– *Vincoli.* Per le ipotesi fatte, si avranno due tipi di vincoli:

- vincoli di origine

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, \ldots, m; \tag{3.4.2}$$

impongono che tutta la merce prodotta in una origine sia trasportata alle destinazioni; si tratta di m vincoli;

- vincoli di destinazione

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, \ldots, n; \tag{3.4.3}$$

impongono che la quantità totale di merce che arriva in ciascuna delle destinazioni uguaglia la richiesta; si tratta si n vincoli.

Si devono infine considerare i vincoli di non negatività delle variabili

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, m.$$

Si è così ottenuta una formulazione del problema dei trasporti con mn variabili e $m + n + mn$ vincoli:

$$\begin{cases} \min \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \right) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, \ldots, m \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, \ldots, n \\ x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{3.4.4}$$

Osservazione 3.4.18 È chiaro che per le ipotesi fatte dovrà risultare

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Esaminiamo, ora, un risultato che è una condizione necessaria e sufficiente affinché un generico problema dei trasporti scritto nella forma (3.4.4) con $a_i \geq 0$ e $b_j \geq 0$ abbia soluzione; tale risultato chiarisce perché nella formulazione classica del problema dei trasporti si adotta l'ipotesi (3.4.1) cioè che la disponibilità complessiva uguagli la richiesta complessiva.

Teorema 3.4.1 *Condizione necessaria e sufficiente affinché esista una soluzione ammissibile per problema (3.4.4), è che risulti*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{3.4.5}$$

Dimostrazione: Dimostriamo innanzitutto la necessità, cioè che se esiste una soluzione ammissibile che denotiamo con $\bar{x}_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, allora la condizione (3.4.5) deve essere verificata; poiché $\bar{x}_{ij}$ deve soddisfare i vincoli, dalle equazioni dei vincoli nella (3.4.4) si ottiene

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

e sottraendo membro a membro si ha

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = 0$$

che è la (3.4.5).
Dimostriamo ora la sufficienza; supponiamo quindi che valga la (3.4.5) e poniamo

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A.$$

Si vuole allora dimostrare che esiste una soluzione ammissibile; infatti, sia $\bar{x}_{ij} := \dfrac{a_i b_j}{A}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$; allora $\bar{x}_{ij}$ ora definito è una soluzione ammissibile per il problema dei trasporti. Infatti risulta innanzitutto $\bar{x}_{ij} \geq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$ per la non negatività degli a_i e dei b_j; inoltre

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{a_i \sum_{j=1}^{n} b_j}{A} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{b_j \sum_{i=1}^{m} a_i}{A} = b_j$$

e quindi $\bar{x}_{ij}$ soddisfando i vincoli del problema è una soluzione ammissibile. □

Il teorema appena dimostrato garantisce quindi che, se è soddisfatta l'ipotesi (3.4.1) allora il problema dei trasporti ammette sempre soluzione.

Osservazione 3.4.19 La soluzione ammissibile del teorema, ovviamente, *non è l'unica soluzione* ammissibile del problema.

Riportiamo di seguito, senza dimostrazione, un altro risultato di fondamentale importanza nella trattazione del problema dei trasporti.

Teorema 3.4.2 *Se nel problema dei trasporti le a_i, $i = 1, \dots, m$ e le b_j, $j = 1, \dots, n$ sono intere e se il problema ammette soluzione ottima, allora ha una soluzione ottima intera.*

Passiamo, ora, ad analizzare alcune varianti della formulazione classica del problema dei trasporti; può infatti accadere che non tutte le rotte di trasporto siano disponibili: se non è possibile il trasporto da una certa origine $\mathbf{O_i}$ ad una destinazione $\mathbf{D_j}$ si pone, per convenzione, $c_{ij} = \infty$. Oppure possono esistere rotte di trasporto in cui vi sono limitazioni sulle quantità massima di merci trasportabili. Infine, si può supporre che la disponibilità complessiva possa essere superiore alla domanda cioè

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{3.4.6}$$

In tal caso, possono essere ammesse giacenze nelle origini e/o nelle destinazioni; se si accetta di avere giacenze nelle origini, allora i vincoli di origine diventano

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \qquad i = 1, \dots, m;$$

se si accetta di avere giacenze nelle destinazioni, allora i vincoli di destinazione diventano

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j \qquad j = 1, \dots, n.$$

nel caso in cui vale la (3.4.6), per porre il problema dei trasporti nella sua formulazione classica, cioè con vincoli di uguaglianza, si può introdurre una destinazione fittizia che abbia una richiesta pari a

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

ponendo uguale a zero il costo per raggiungere questa destinazione fittizia da qualsiasi origine.

4
Modelli di Programmazione Lineare Intera

Come è stato già osservato in precedenza, quando tutte le variabili di un problema di Programmazione Lineare sono vincolate ad assumere valori interi, si parla di Programmazione Lineare Intera. Moltissimi problemi reali possono essere rappresentati da modelli di Programmazione Lineare Intera; tipicamente si tratta di problemi in cui le variabili di decisione rappresentano quantità indivisibili (come il numero di automobili, di persone addette a certe mansioni, etc.) oppure sono problemi caratterizzati dalla necessità di scegliere tra un numero finito di alternative diverse. In quest'ultimo caso, in particolare, si avranno problemi di Programmazione Lineare 0–1, cioè problemi in cui le variabili sono binarie e assumono valore 0 oppure 1.

4.1 VARIABILI INTERE PER RAPPRESENTARE QUANTITÀ INDIVISIBILI

Un numero molto elevato di problemi reali è caratterizzato dalla indivisibilità del bene da produrre o della risorsa da utilizzare. Di qui la necessità di rappresentare tali problemi attraverso modelli di Programmazione Lineare con variabili intere. Questo tipo di problemi riguardano molte applicazioni reali: dai problemi in ambito industriale come la distribuzione dei beni e il sequenziamento delle attività produttive, ai problemi economici come la gestione ottima di un portafoglio titoli; dai problemi di progettazione ottima ai problemi inerenti la biologia e la fisica delle alte energie.
Esempi di modelli di Programmazione Lineare Intera caratterizzati da varibili di decisione associate a quantità indivisibili sono già stati presi in esame all'interno della trattazione dei modelli di Programmazione Lineare. Una situazione tipica

è data dall'Esempio 3.4.2 in cui il bene da produrre è rappresentato da autovetture che sono ovviamente indivisibili; quindi la formulazione di Programmazione Lineare già fornita per questo esempio in realtà, per essere aderente alla situazione reale, deve essere integrata con la presenza del vincolo di interezza sulle varibili che rappresentano i livelli di produzioni delle autovetture. Analogamente l'introduzione del vincolo di interezza sulle variabili è indispensabile quando viene meno una delle ipotesi fondamentali della Programmazione Lineare cioè la continuità delle variabili; in questo caso i modelli di Programmazione Lineare Intera sono uno strumento essenziale per rappresentare situazioni del mondo reale di questo tipo.

4.2 VARIABILI BINARIE PER RAPPRESENTARE SCELTE ALTERNATIVE

Si supponga di dover modellare il fatto che un certo evento possa verificarsi oppure no. La natura binaria del problema suggerisce l'idea di modellare questa dicotomia per mezzo di un variabile binaria $\delta \in \{0, 1\}$; si porrà $\delta = 1$ se l'evento si verifica e $\delta = 0$ altrimenti.

4.2.1 Problemi di assegnamento

Un generico problema di assegnamento consiste nel determinare il modo ottimale di assegnare lavori a persone o, più in generale, di assegnare *mezzi* (persone, macchine, etc.) ad *attività*.
Supponiamo che n persone $\mathbf{P_1}$,...,$\mathbf{P_n}$, debbano svolgere n lavori $\mathbf{L_1}$,..., $\mathbf{L_n}$; ciascun lavoro deve essere svolto esattamente da una persona e ciascuna persona deve svolgere esattamente un lavoro. Naturalmente le persone hanno diversi livelli di esperienza, competenza ed abilità e quindi si può introdurre un costo dell'assegnamento della persona i al lavoro j; indichiamo tale costo con c_{ij} e supponiamo che sia noto. Questo costo può, ad esempio, essere interpretato come tempo medio impiegato dalla persona i ad eseguire il lavoro j.
Il problema consiste, quindi, nell'assegnare i lavori alle persone minimizzando il costo totale di realizzazione di tutti i lavori.
Questo tipo di problemi sorge in molte situazioni pratiche: esempi tipici sono i problemi di assegnamento del personale all'interno di una azienda e i problemi di assegnare determinati mezzi di trasporto ad alcune particolari linee. Un esempio di problema di assegnamento è stato già considerato nell'Introduzione (pagina 6) quando si è brevemente analizzato il caso dell'assegnamento di 70 dipendenti a 70 mansioni diverse.

Esaminiamo, ora, un esempio.

Esempio 4.2.1 *Una compagnia finanziaria necessita di ricoprire tre lavori* **LAV1***,* **LAV2***,* **LAV3***, che richiedono differenti abilità ed esperienza. Sono disponibili tre candidati* **C1***,* **C2***,* **C3***, che possono essere assunti con il medesimo salario. A causa delle loro differenti capacità, il costo di assegnazione di ciascun candidato che la compagnia deve sostenere dipende dal tipo di lavoro al quale è assegnato. La stima di tale costo riferito a ciascun candidato se fosse assegnato a ciascuno dei tre lavori è riportato nella tabella seguente*

	LAV1	**LAV2**	**LAV3**
C1	*5*	*4*	*7*
C2	*6*	*7*	*3*
C3	*8*	*11*	*2*

Si desidera assegnare ogni candidato esattamente ad un lavoro in modo da minimizzare il costo complessivo che la compagnia deve sostenere.

Formulazione.
L'esempio in esame è di piccole dimensioni: infatti ci sono solamente $3! = 6$ possibili assegnazioni.

– *Variabili.* Per ogni lavoro e per ogni persona, introduciamo le variabili binarie

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il candidato } i \text{ è assegnato al lavoro } j \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare sarà

$$5x_{11} + 4x_{12} + 7x_{13} + 6x_{21} + 7x_{22} + 3x_{23} + 8x_{31} + 11x_{32} + 2x_{33}.$$

– *Vincoli.* Come già osservato nel caso generale, si devono considerare i seguenti vincoli

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \dots, 3.$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \dots, 3.$$

La formulazione completa si può scrivere

$$\begin{cases} \min(5x_{11} + 4x_{12} + 7x_{13} + 6x_{21} + 7x_{22} + 3x_{23} + \\ \quad +8x_{31} + 11x_{32} + 2x_{33}) \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\ x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i,j = 1,\ldots,3. \end{cases}$$

Formulazione generale di un problema di assegnamento

Esaminiamo, ora, una formulazione in termini di programmazione lineare per un generico problema di assegnamento. Supponiamo che n persone $\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}$, debbano svolgere n lavori $\mathbf{L_1},\ldots,$ $\mathbf{L_n}$ e che ciascun lavoro deve essere svolto esattamente da una persona e ciascuna persona deve svolgere esattamente un lavoro. Sia c_{ij} il costo dell'assegnamento della persona i al lavoro j; si devono assegnare i lavori alle persone minimizzando il costo totale di realizzazione di tutti i lavori.

Formulazione.

– *Variabili.* Per ogni lavoro i e per ogni persona j, $(i,j = 1,\ldots,n)$ introduciamo le seguenti variabili binarie

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la persona } i \text{ è assegnata al lavoro } j \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si tratta di n^2 variabili:

	$\mathbf{L_1}$	$\cdots$	$\mathbf{L_j}$	$\cdots$	$\mathbf{L_n}$
$\mathbf{P_1}$	x_{11}	$\cdots$	x_{1j}	$\cdots$	x_{1n}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{P_i}$	x_{i1}	$\cdots$	x_{ij}	$\cdots$	x_{in}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{P_n}$	x_{n1}	$\cdots$	x_{nj}	$\cdots$	x_{nn}

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare sarà data dal costo totale cioè da

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

Naturalmente, se le c_{ij} anziché essere dei costi fossero i valori utili ricavati dall'assegnamento della persona i al lavoro j, allora la funzione obiettivo andrebbe massimizzata.

– *Vincoli.* (Vincoli di assegnamento.) Poiché esattamente una persona deve essere assegnata al lavoro j, allora si avranno i seguenti n vincoli

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Inoltre, poiché ciascuna persona deve essere assegnata ad una sola attività, si avranno altri n vincoli

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, n.$$

La formulazione completa sarà, quindi, data da

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad i, j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Osservazione 4.2.2 Osservando la formulazione ottenuta si può facilmente dedurre che la struttura di un problema di assegnamento è del tutto simile a quella del problema dei trasporti (cfr. Paragrafo 3.4.3) in cui si ha lo stesso numero di origini e di destinazioni. La differenza sostanziale sta nel fatto che in un problema di assegnamento le variabili sono binarie, $x_{ij} \in \{0, 1\}$ mentre in un problema dei trasporti le variabili sono reali non negative $x_{ij} \geq 0$. D'altra parte, per il Teorema 3.4.2, se in un problema dei trasporti i termini noti dei vincoli sono interi, se esiste soluzione ottima allora esiste soluzione ottima intera del problema dei trasporti. Quindi, poiché in un problema di assegnamento tali termini noti sono pari ad 1, i vincoli $x_{ij} \in \{0, 1\}$, $i, j = 1, \ldots, n$ possono essere riscritti nella forma $0 \leq x_{ij} \leq 1$, $i, j = 1, \ldots, n$. Inoltre, poiché i vincoli $x_{ij} \leq 1$ sono implicati dai vincoli di assegnamento, si possono scrivere semplicemente i vincoli $x_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, \ldots, n$ e comunque avere la garanzia che se esiste una soluzione ottima allora esiste una soluzione ottima intera 0–1. Quindi un problema di assegnamento può essere considerato equivalente al problema

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ x_{ij} \geq 0, \qquad i,j = 1,\ldots,n \end{cases}$$

cioè può essere riscritto come un particolare problema di Programmazione Lineare avente la struttura medesima del problema dei trasporti.

È possibile effettuare una generalizzazione del problema dell'assegnamento per categorie di lavori. Infatti, frequentemente ci sono molti lavori identici che richiedono la stessa qualifica; tali lavori possono essere raggruppati in categorie di attività. Assumiamo quindi che esistano n categorie di attività e denotiamo con b_j il numero di lavori raggruppati nella $j-$esima categoria. Anche le persone possono essere raggruppate in categorie di persone aventi lo stesso valore; assumiamo che esistano m di queste categorie di persone e sia a_i il numero di persone poste nella $i-$esima categoria. Denotiamo con c_{ij} il valore utile ottenuto assegnando una persona della categoria i ad un lavoro della categoria j. Assumiamo che $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Introducendo le variabili x_{ij} rappresentanti il numero di persone della stessa categoria i assegnate ad un lavoro della categoria j, questo generale problema di assegnamento può essere formulato in termini di un problema di programmazione lineare nel seguente modo:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1,\ldots,m \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1,\ldots,n \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,\ldots,m \quad j = 1,\ldots,n. \end{cases}$$

Esempio 4.2.3 *Una compagnia aerea cerca di pianificare le proprie linee aeree creando un aereoporto centrale e cercando di avere un elevato numero di voli in arrivo in questo aereoporto in una certa fascia oraria ed un elevato numero di partenze nella fascia oraria immediatamente successiva. Questo permette ai passeggeri di avere un elevato numero di combinazioni tra città di partenza e città di destinazione con una sola coincidenza e al più un cambio di aereo nell'aereoporto centrale. Il fine è quello di creare una tale struttura in modo da minimizzare i cambi di aerei e quindi il movimento di bagagli nell'aereoporto centrale. Supponiamo che la compagnia aerea abbia cinque voli che arrivano tra le 8 e le 8.30 nell'aereoporto centrale e che poi gli stessi aerei partono per altre diverse destinazioni tra le 8.40 e le 9.20. La tabella che segue riporta il numero medio di passeggeri che arrivano con uno dei voli in arrivo* **A1***,* **A2***,* **A3***,* **A4***,* **A5** *e che ripartono con i voli in partenza* **P1***,* **P2***,* **P3***,* **P4***,* **P5***, ovvero passeggeri che non cambiano aereo*

	P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**
A1	*15*	*20*	*8*	*16*	*12*
A2	*17*	*9*	*15*	*25*	*12*
A3	*12*	*32*	*16*	*9*	*20*
A4	-	*15*	*9*	*7*	*30*
A5	-	-	*35*	*10*	*18*

Il volo **A4** *arriva troppo tardi e non permette di prendere il volo in partenza* **P1***; analogamente il volo* **A5** *non permette coincidenze con i voli in partenza* **P1** *e* **P2***. Supponendo che tutti gli aerei sono identici, il problema consiste nell'assegnare ciascun aereo in arrivo ad uno dei voli in partenza in modo da massimizzare il numero delle persone che non devono cambiare aereo.*

Formulazione.

Il problema in analisi può essere formulato come problema di assegnamento.

– *Variabili.* Introduciamo le variabili di decisione x_{ij} definite come segue

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'aereo del volo } \mathbf{Ai} \text{ è assegnato al volo } \mathbf{Pj} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

– *Funzione obiettivo.* Definiamo come funzione obiettivo il numero di passeggeri che non devono cambiare aereo:

$$\begin{aligned} & 15x_{11} + 20x_{12} + 8x_{13} + 16x_{14} + 12x_{15} + \\ + \quad & 17x_{21} + 9x_{22} + 15x_{23} + 25x_{24} + 12x_{25} + \\ + \quad & 12x_{31} + 32x_{32} + 16x_{33} + 9x_{34} + 20x_{35} + \\ + \quad & 15x_{42} + 9x_{43} + 7x_{44} + 30x_{45} + \\ + \quad & 35x_{53} + 10x_{54} + 18x_{55}. \end{aligned}$$

Tale funzione deve naturalmente essere massimizzata.

– *Vincoli.* I vincoli saranno

$$\begin{aligned}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15} &= 1\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25} &= 1\\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35} &= 1\\
x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45} &= 1\\
x_{53}+x_{54}+x_{55} &= 1\\
x_{11}+x_{21}+x_{31} &= 1\\
x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} &= 1\\
x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53} &= 1\\
x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54} &= 1\\
x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+x_{55} &= 1.
\end{aligned}$$

Quindi la formulazione completa sarà

$$\begin{cases}
\max\Big(15x_{21}+20x_{22}+8x_{23}+16x_{24}+12x_{25}+\\
\quad +17x_{11}+9x_{12}+15x_{13}+25x_{14}+12x_{15}+\\
\quad +12x_{31}+32x_{32}+16x_{33}+9x_{34}+20x_{35}+\\
\quad +15x_{42}+9x_{43}+7x_{44}+30x_{45}+\\
\quad +35x_{53}+10x_{54}+18x_{55}\Big)\\
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=1\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=1\\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=1\\
x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}=1\\
x_{53}+x_{54}+x_{55}=1\\
x_{11}+x_{21}+x_{31}=1\\
x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1\\
x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}=1\\
x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}=1\\
x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+x_{55}=1\\
x_{ij}\geq 0 \quad i,j=1,\dots,5.
\end{cases}$$

Una soluzione ottima di questo problema è la seguente:

$$x_{11}=1, x_{24}=1, x_{32}=1, x_{45}=1, x_{53}=1$$

e le altre variabili nulle; il valore ottimo della funzione obiettivo è 137.
Osservando questa soluzione si può notare come ciascun aereo in arrivo sia stato assegnato al volo in partenza che permette di mantenere sullo stesso aereo il maggior numero di passeggeri eccetto che per il volo in arrivo **A1**: infatti l'aereo

in arrivo con il volo **A1** è stato assegnato al volo in partenza **P1** e quindi il numero dei passeggeri che non devono cambiare aereo è 15 contro ad esempio un numero di 20 o 16 passeggeri che sarebbero rimasti sullo stesso aereo se questo fosse stato assegnato rispettivamente al volo in partenza **P2** o **P4**.

4.2.2 Problemi di Knapsack binario

Il problema del "knapsack", nella sua versione originaria, può essere descritto come segue: dato un insieme di n oggetti di dimensioni diverse e differenti valori, si vuole determinare un sottoinsieme di questi oggetti da inserire in una "bisaccia" (knapsack) di capacità limitata in modo da massimizzare il valore trasportato.
In questo caso l'evento da modellare è l'inserimento dell'oggetto nella "bisaccia"; è quindi intuitivo introdurre una variabile binaria $x_i \in \{0,1\}$, $i = 1,\dots,n$ che assuma valore 1 se l'i-esimo oggetto è inserito nella "bisaccia", 0 se invece non è inserito.
Più in generale, supponiamo di avere n progetti e un budget disponibile per la loro realizzazione. Il problema consiste nello scegliere un sottoinsieme dei progetti in modo da massimizzare la somma dei valori senza superare il limite imposto dal budget nell'ipotesi che ciascun progetto scelto deve essere realizzato completamente e non è accettata una realizzazione parziale del progetto.

Esempio 4.2.4 *Si supponga di disporre di un capitale di 18 mila euro e di poterle investire in 4 progetti diversi. Nel primo progetto si debbono investire 8 euro per ricavarne 40, nel secondo si debbono investire 6 euro per ricavarne 24, nel terzo progetto si debbono investire 5 euro per ricavarne 15, infine nel quarto progetto si debbono investire 4 euro per ricavarne 8. Formulare il problema di PLI che consente di scegliere l'insieme di progetti che massimizza il profitto rispettando i vincoli di disponibilità di capitale.*

Formulazione.

– *Variabili.* Le variabili di decisione sono definite, per $i = 1, 2, 3, 4$ come segue

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se si sceglie il progetto } i \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da massimizzare è

$$40x_1 + 24x_2 + 15x_3 + 8x_4.$$

– *Vincoli.* I vincoli esprimono il fatto che il costo degli investimenti non può superare il budget disponibile, cioè

$$8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 18.$$

Complessivamente il problema si scrive:

$$\begin{cases} \max 40x_1 + 24x_2 + 15x_3 + 8x_4 \\ 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 18 \\ x_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,\dots,4 \end{cases}$$

□

Formulazione generale di un problema di knapsack binario.

In generale, supponiamo di avere n progetti tali che l'i-esimo progetto ha costo di realizzazione a_i ed un valore pari c_i, $i = 1,\dots,n$; supponiamo inoltre che esista un budget b disponibile per la realizzazione dei progetti. Il problema consiste nello scegliere un sottoinsieme dei progetti in modo da massimizzare la somma dei valori senza superare il limite imposto dal budget.

L'evento da modellare, in questo caso, è la realizzazione del singolo progetto. Ciò può essere effettuato introducendo n variabili binarie nel seguente modo.

– *Variabili.* Introduciamo le variabili $x_i \in \{0,1\}$, $i = 1,\dots,n$, tali che

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'}i\text{-esimo progetto è realizzato} \\ 0 & \text{se l'}i\text{-esimo progetto non è realizzato.} \end{cases}$$

– *Funzione obiettivo.* È data dal valore complessivo cioè da

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i.$$

– *Vincoli.* Non si deve superare il budget disponibile e quindi si deve imporre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b.$$

La formulazione complessiva può essere quindi scritta

$$\begin{cases} \max \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ x \in \{0,1\}^n. \end{cases}$$

Tuttavia, in generale, questi problemi di scelta tra sottoprogetti possono avere più vincoli: si pensi al caso in cui il budget sia mensile e si voglia pianificare per più di un mese; in questo caso il problema è detto *knapsack multidimensionale*.

4.2.3 Problemi di "Capital Budgeting" (pianificazione degli investimenti)

I problemi di pianificazione degli investimenti rappresentano una delle problematiche di maggiore importanza all'interno delle problematiche finanziarie. Anche all'interno delle realtà aziendali, la politica degli investimenti è strettamente legata alla pianificazione finanziaria e ai processi di spesa. Di solito gli investimenti sono valutati attraverso il cosiddetto *indice di redditività* di ciascun investimento e una strategia di scelta degli investimenti dettata dal buon senso è quella di ordinare gli investimenti in base a tali indici e scegliendo gli investimenti nell'ordine stabilito cercano di non violare il vincolo sul budget disponibile ed eventuali altri vincoli. Ovviamente una formulazione di un modello di Programmazione Lineare 0–1 che rappresenti il problema permette invece di ottenere una soluzione ottima del problema
Il modello di Programmazione Lineare Intera che descrive il problema della pianificazione degli investimenti viene denominato *modello di "Capital Budgeting"* ed è stato proposto alla fine degli anni '50 dagli economisti Manne e Markowitz; quest'ultimo fu poi insignito del premio Nobel per l'Economia.
In sintesi il problema della pianificazione degli investimenti può essere così descritto: siano dati n progetti di investimento da realizzare o meno. Si fissa un orizzonte temporale T entro il quale si vuole effettuare l'analisi (ad esempio, $T = 1$ anno). T si suddivide in t periodi $T = \{1, \ldots, t\}$ (ad esempio, un anno può essere diviso in quattro trimestri, ovvero $t = 4$). Ciascun progetto di investimento i-esimo, $i = 1, \ldots, n$ è caratterizzato da un vettore $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{it})^T$ del *flusso di cassa*, ovvero a_{ij} rappresenta il flusso di cassa (positivo o negativo) generato dall'i-esimo progetto nel periodo j-esimo. Si assume che il flusso di cassa positivo corrisponda ad una spesa, mentre un flusso di cassa negativo corrisponda ad un guadagno. Quindi se, ad esempio, il flusso di cassa relativo ad un certo progetto su un orizzonte temporale di quattro periodi è pari a $(4,\ 3,\ -2,\ -7)$, allora la realizzazione del progetto richiede spese di 4 e 3 nei primi due periodi e poi fornisce un guadagno di 2 e 7 rispettivamente nel terzo e quarto periodo. Fra l'altro, questa struttura è tipica dei flussi di cassa. La spesa totale sarebbe $4+3-2-7 = -2$, ovvero un guadagno complessivo di 2. Ora, per ogni $i = 1, \ldots, n$ denotiamo con

$$c_i = -\sum_{j=1}^{t} a_{ij}$$

l'indice di redditività del progetto i-esimo, dove il segno meno è necessario per far corrispondere c_i al valore del guadagno. Inoltre, per ogni periodo $j = 1, \ldots, t$ c'è un budget limitato denotato con b_j. Il problema consiste nel determinare un sottoinsieme di progetti da realizzare in modo da avere guadagno massimo. Si assume inoltre che i progetti non sono frazionabili, cioè non possono essere realizzati parzialmente.

Formulazione.

– *Variabili.* Introduciamo le variabili $x_i \in \{0,1\}$ $i = 1, \ldots, n$, così definite:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'}i\text{-esimo progetto è realizzato} \\ 0 & \text{se il } i\text{-esimo progetto non è realizzato.} \end{cases}$$

– *Funzione obiettivo.* È data dal valore complessivo cioè da

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i.$$

– *Vincoli.* Per ogni periodo $j \in T$ non si deve superare il budget b_j disponibile e quindi per ogni $j = 1, \ldots, t$ si deve imporre

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j.$$

Si ha quindi un vincolo di "knapsack" per ogni periodo $j = 1, \ldots, t$.

La formulazione complessiva può essere quindi scritta

$$\begin{cases} \max \displaystyle\sum_{j=i}^{n} c_i x_i & \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j & j = 1, \ldots, t \\ x \in \{0,1\}^n. & \end{cases}$$

Osservazione 4.2.5 Se fossero possibili realizzazioni parziali di alcuni progetti, le variabili corrispondenti non sarebbero vincolate ad appartenere all'insieme $\{0,1\}$, ma sarebbero appartenenti all'intervallo $[0,1]$ e rappresenterebbero il livello di realizzazione del progetto; in questo caso si avrebbe un problema di Programmazione Lineare Mista

Osservazione 4.2.6 Altri vincoli che realizzano delle condizioni logiche sono facilmente introducibili nella formulazione. Ad esempio:

- la realizzazione di un particolare progetto (ad esempio il 5^o)

$$x_5 = 1;$$

- la realizzazione di *esattamente* uno dei progetti 1^o, 3^o e 11^o:

$$x_1 + x_3 + x_{11} = 1;$$

- la realizzazione di *almeno* due dei progetti 1^o, 3^o e 11^o:

$$x_1 + x_3 + x_{11} \geq 2;$$

- la realizzazione di *al piú* due dei progetti 1^o, 3^o e 11^o:

$$x_1 + x_3 + x_{11} \leq 2.$$

4.3 VARIABILI BINARIE COME VARIABILI INDICATRICI

Un altro classico uso di variabili $0-1$, consiste nell'indicare le relazioni di dipendenza tra alcune grandezze di un problema; cioè, in questo caso, le variabili binarie vengono utilizzate come *variabili indicatrici*.
Supponiamo che la variabile $x_i \geq 0$ rappresenti una grandezza del problema e di conoscere un limite superiore di tale variabile, cioè un valore M positivo maggiore del più grande valore che può assumere la x_i. Allora, può essere necessario imporre la condizione:

$$x_i > 0 \Rightarrow \delta = 1 \tag{4.3.1}$$

oppure la condizione equivalente $\delta = 0 \Rightarrow x_i = 0$ (si ricordi che era assunto che $x_i \geq 0$). L'implicazione (4.3.1) può essere modellata con il vincolo

$$x_i - M\delta \leq 0.$$

Tuttavia, in altri casi, può essere necessario imporre la condizione

$$\delta = 1 \Rightarrow x_i > 0 \tag{4.3.2}$$

(che è equivalente a $x_i = 0 \Rightarrow \delta = 0$, poiché, per ipotesi, $x_i \geq 0$). La condizione logica (4.3.2) non si può facilmente rappresentare con un vincolo. Supponiamo, ad esempio, che in un problema di miscelazione una variabile x_i rappresenti la quantità di un ingrediente da includere nella miscela e quindi si ha $x_i \geq 0$; si può usare una variabile indicatrice $\delta \in \{0,1\}$ per distinguere tra il caso in cui $x_i = 0$ e $x_i > 0$. La condizione logica (4.3.2) afferma che se $\delta = 1$ allora l'ingrediente rappresentato da x deve apparire nella miscela, ma non fornisce nessuna indicazione sulla quantità dell'ingrediente. In realtà, è più verosimile imporre una condizione logica del tipo

$$\delta = 1 \Rightarrow x_i \geq \varepsilon > 0 \tag{4.3.3}$$

cioè se $\delta = 1$ allora la variabile x_i assume un valore almeno pari ad ε.
La (4.3.3) è rappresentabile dal vincolo

$$x - \varepsilon\delta \geq 0. \tag{4.3.4}$$

Riepilogando possiamo considerare il seguente schema: se x_i è una variabile non negativa e $\delta \in \{0,1\}$ ed inoltre $x_i < M$ e $\varepsilon > 0$, allora

$$x_i - M\delta \leq 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x_i > 0 \Rightarrow \delta = 1 \\ \delta = 0 \Rightarrow x_i = 0 \end{cases}$$

$$x_i - \varepsilon\delta \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \delta = 1 \Rightarrow x_i \geq \varepsilon \\ x_i = 0 \Rightarrow \delta = 0. \end{cases}$$

Analizziamo, ora, un esempio di miscelazione in cui applichiamo quanto appena esposto.

Esempio 4.3.1 *Sia data la seguente tavola di valori nutrizionali che riporta il tipo di alimento, il costo unitario, le unità di sostanze (proteine, carboidrati, grassi, vitamine, calcio) per unità di alimento*

	costo	**prot.**	**carb.**	**grassi**	**vitam.**	**calcio**
1	*0.15*	*0*	*7*	*1*	*1*	*0*
2	*0.23*	*1*	*0*	*3*	*1*	*4*
3	*0.79*	*5*	*0*	*4*	*0*	*1*
4	*0.47*	*2*	*2*	*1*	*3*	*0*
5	*0.52*	*0*	*3*	*0*	*2*	*1*

Formulare un problema di PLI che permetta di trovare una dieta di costo minimo sapendo che si devono assumere almeno 3 unità di proteine, 10 unità di carboidrati, 2 unità di grasso, 3 unità di vitamine e 2 unità di calcio e sapendo che se è presente l'alimento 1 la dieta non può contenere l'alimento 5.

Formulazione.

È un classico problema di miscelazione; le quantità di alimenti presenti nella dieta si suppongono frazionabili. A causa della presenza di una condizione logica, è necessario utilizzare, in aggiunta alle variabili del problema, una variabile $0-1$ per modellarla cioè per esprimere con un vincolo il legame tra la presenza nella dieta dell'alimento 1 e dell'alimento 5.

– *Variabili di decisione.* Introduciamo come variabili del problema le unità di alimenti presenti nella dieta, x_i con $i = 1, \ldots, 5$. Inoltre, introduciamo la variabile booleana $\delta \in \{0, 1\}$.

– *Vincoli.* Si hanno i seguenti vincoli:

- Vincoli di qualità: la dieta deve contenere alcuni valori minimi di sostanze nutrizionali; dalla tabella si ottiene che deve essere

$$x_2 + 5x_3 + 2x_4 \geq 3$$

$$7x_1 + 2x_4 + 3x_5 \geq 10$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 \geq 3$$

$$4x_2 + x_3 + x_5 \geq 2$$

- Vincolo logico: se nella dieta è presente l'alimento 1 allora non deve esserci l'alimento 5. Vogliamo quindi definire dei vincoli che consentano di esprimere le seguenti condizioni logiche

$$\begin{array}{rcl} x_1 > 0 & \Rightarrow & \delta = 1 \\ \delta = 1 & \Rightarrow & x_5 = 0 \end{array}$$

  Secondo quanto descritto, ciò può essere modellato introducendo i vincoli

$$x_1 - M\delta \leq 0$$

$$x_5 - M(1-\delta) \leq 0$$

  dove M è un numero positivo maggiore del più grande valore che possono assumere le variabili.

- Vincoli di non negatività: Si tratta di quantità di alimenti, e quindi deve essere

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, 5.$$

– *Funzione obiettivo.* È il costo da minimizzare ed è data da

$$0.15x_1 + 0.23x_2 + 0.79x_3 + 0.47x_4 + 0.52x_5.$$

Complessivamente la formulazione di PLI per questo problema può essere scritta

$$\begin{cases} \min\,(0.15x_1 + 0.23x_2 + 0.79x_3 + 0.47x_4 + 0.52x_5) \\ x_2 + 5x_3 + 2x_4 \geq 3 \\ 7x_1 + 2x_4 + 3x_5 \geq 10 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 \geq 3 \\ 4x_2 + x_3 + x_5 \geq 2 \\ x_1 - M\delta \leq 0 \\ x_5 - M(1-\delta) \leq 0 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 5 \\ \delta \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

□

4.3.1 Problema del costo fisso

Esaminiamo un altro esempio di applicazione di variabili indicatrici: *il problema del costo fisso*. Nei modelli di PL la funzione obiettivo è una funzione lineare nelle variabili di decisione che, di solito, rappresentano livelli di attività. Questa ipotesi, in molti problemi pratici, non è verosimile: può infatti accadere che il costo di un'attività abbia un costo iniziale (set-up), ad esempio l'acquisto di un macchinario, che esiste solo se quell'attività è svolta a livello non nullo.
In riferimento ad un'applicazione industriale, indichiamo con c il costo della manifattura per unità di prodotto, con $f \geq 0$ il costo di set-up (costo fisso) e con $x \geq 0$ la quantità di prodotto da fabbricare.
Quindi se $x = 0$ il costo totale è ovviamente nullo; se $x > 0$ allora il costo totale è dato da $cx + f$. Quindi la funzione obiettivo è data dall'espressione

$$f(x) = \begin{cases} cx + f & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Tale funzione ha una discontinuità nell'origine e quindi non è lineare (Figura 4.3.1).

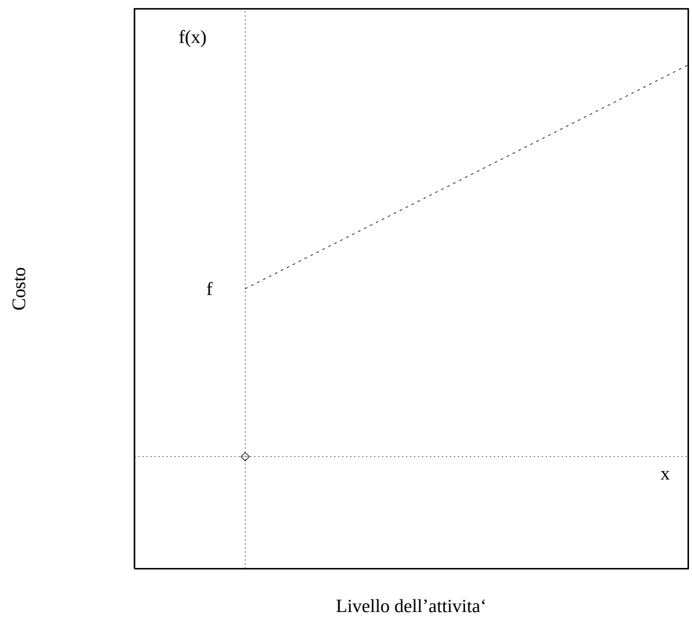

Fig. 4.3.1 Problema del costo fisso.

Per formulare questo problema in termini di programmazione lineare, introduciamo una variabile indicatrice $\delta \in \{0, 1\}$ tale che, se il prodotto rappresentato dalla x è fabbricato in una qualsiasi quantità allora $\delta = 1$; se il prodotto non è fabbricato allora $\delta = 0$. Dobbiamo, quindi modellare con un vincolo le condizioni logiche

$$x > 0 \Rightarrow \delta = 1 \tag{4.3.5}$$

$$x = 0 \Rightarrow \delta = 0. \tag{4.3.6}$$

L'implicazione (4.3.5) si realizza introducendo il vincolo

$$x - M\delta \leq 0$$

dove M è un numero positivo maggiore del più grande valore che può assumere la x. Per realizzare l'implicazione (4.3.6), si dovrebbe introdurre un vincolo del tipo $x - \varepsilon\delta \geq 0$ con $\varepsilon > 0$; in realtà, ciò non è necessario perché, come vedremo, la condizione (4.3.6) discende direttamente dal fatto che ci troviamo in un problema di minimizzazione. Infatti, il problema può essere formulato come

$$\min\,(cx + f\delta)$$

con vincolo aggiuntivo

$$x - M\delta \leq 0$$

con $x \geq 0$ e $\delta \in \{0, 1\}$.
Dalla struttura della funzione discende immediatamente che se $x = 0$ allora, poiché si tratta di un problema di minimo, all'ottimo deve essere $\delta = 0$, essendo $f \geq 0$. Quindi non è necessario introdurre nella formulazione la condizione logica (4.3.6).

Si può facilmente generalizzare il problema del costo fisso al caso di n attività. Supponiamo che x_i, $i = 1, \ldots, n$ rappresenti il livello al quale viene svolta ciascuna attività. Supponiamo che il costo della i-esima attività sia dato da

$$\begin{cases} c_i x_i + f_i & \text{se} \quad x_i > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x_i = 0 \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n$$

dove $f_i \geq 0$ è il costo fisso dell'attività i-esima e deve essere pagato solo se l'attività i viene svolta ad un livello non nullo.
Il corrispondente problema di ottimizzazione è:

$$\min\ z(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{i \in I(x)} f_i$$

dove $I(x) = \{i \in \{1, \ldots, n\} : x_i > 0\}$ e quindi è una funzione discontinua nell'origine, non lineare. Per formularlo come problema di PLI, si introduce per ogni $i = 1, \ldots, n$ una variabile $\delta_i \in \{0, 1\}$ tale che

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'attività } i \text{ è svolta a livello non nullo} \\ 0 & \text{se l'}i\text{-esima attività non è svolta.} \end{cases}$$

Si vuole quindi che siano verificate le seguenti condizioni logiche

$$x_i > 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_i = 1, \qquad\qquad x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_i = 0.$$

Analogamente al caso precedente, il problema può essere formulato

$$\min \left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \delta_i f_i \right)$$

con vincoli aggiuntivi

$$x_i - M\delta_i \le 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

e con

$$x_i \ge 0, \quad \delta_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \ldots, n.$$

È chiaro che se $x_i = 0$, allora all'ottimo $\delta_i = 0$ perché $f_i \ge 0$ e quindi la condizione logica $x_i = 0 \Rightarrow \delta_i = 0$ è automaticamente verificata. Inoltre, se $x_i > 0$ allora $\delta_i = 1$ e quindi il suo costo fisso si aggiungerà al valore della funzione costo nella funzione obiettivo. È quindi evidente che una soluzione ottima del problema iniziale è anche ottima per il problema trasformato.

Esempio 4.3.2 *In una centrale elettrica sono a disposizione tre generatori e ogni giorno si deve decidere quali usare di giorno e quali di notte per assicurare una produzione di almeno 4000 megawatts di giorno e di almeno 2800 megawatts di notte. L'uso di un generatore comporta la presenza di personale tecnico che sorvegli il suo funzionamento; tale personale viene retribuito in maniera diversa tra il giorno e la notte e a seconda del tipo di generatore; tali costi di attivazione sono riportati nella tabella che segue (in euro) insieme al costo (in euro) per ogni megawatt prodotta e alla massima capacità di produzione in megawatts per ogni singolo periodo (giorno/notte).*

	Costo attivazione		**Costo per**	**Capacità**
	giorno	**notte**	**megawatt**	**max**
Generatore A	*750*	*1000*	*3*	*2000*
Generatore B	*600*	*900*	*5*	*1700*
Generatore C	*800*	*1100*	*6*	*2500*

Formulare un modello di PLI che permetta di rappresentare il problema in analisi.

Formulazione.
È un problema di costo fisso e può essere formulato in termini di Programmazione Lineare Intera come appena descritto in generale. Per brevità di notazione, chiameremo 1^o periodo il giorno e 2^o periodo la notte.

– *Variabili.* Indichiamo con x_{A_i}, x_{B_i} e x_{C_i}, $i = 1, 2$, i megawatts generati rispettivamente dai generatori A, B e C nel periodo i. Inoltre, per ottenere una formulazione lineare, è necessario introdurre sei variabili $0 - 1$, δ_{A_i}, δ_{B_i} e δ_{C_i}, $i = 1, 2$, definite come segue :

$$\delta_{A_i} = \begin{cases} 1 & \text{se il generatore A è attivato nell'}i\text{-esimo periodo} \\ 0 & \text{se nell'}i\text{-esimo periodo il generatore A non è attivato} \end{cases} \qquad i = 1, 2.$$

Analoga è la definizione per le altre variabili δ_{B_i} e δ_{C_i}, $i = 1, 2$.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare può esser scritta

$$3x_{A_1} + 3x_{A_2} + 5x_{B_1} + 5x_{B_2} + 6x_{C_1} + 6x_{C_2} + 750\delta_{A_1} +$$

$$+1000\delta_{A_2} + 600\delta_{B_1} + 900\delta_{B_2} + 800\delta_{C_1} + 1100\delta_{C_2}.$$

– *Vincoli.* Si devono considerare i vincoli sulla richiesta cioè

$$x_{A_1} + x_{B_1} + x_{C_1} \geq 4000$$

$$x_{A_2} + x_{B_2} + x_{C_2} \geq 2800.$$

Inoltre, per quanto esposto nel caso generale si devono considerare i vincoli

$$x_{A_i} - 2000\delta_{A_i} \leq 0 \qquad i = 1, 2$$

$$x_{B_i} - 1700\delta_{B_i} \leq 0 \qquad i = 1, 2$$

$$x_{C_i} - 2500\delta_{C_i} \leq 0 \qquad i = 1, 2.$$

Quindi la formulazione complessiva può essere scritta

$$\begin{cases} \min\Big(3x_{A_1} + 3x_{A_2} + 5x_{B_1} + 5x_{B_2} + 6x_{C_1} + 6x_{C_2} + \\ \quad +750\delta_{A_1} + 1000\delta_{A_2} + 600\delta_{B_1} + 900\delta_{B_2} + 800\delta_{C_1} + 1100\delta_{C_2}\Big) \\ x_{A_1} + x_{B_1} + x_{C_1} \geq 4000 \\ x_{A_2} + x_{B_2} + x_{C_2} \geq 2800 \\ x_{A_1} - 2000\delta_{A_1} \leq 0 \\ x_{B_1} - 1700\delta_{B_1} \leq 0 \\ x_{C_1} - 2500\delta_{C_1} \leq 0 \\ x_{A_2} - 2000\delta_{A_2} \leq 0 \\ x_{B_2} - 1700\delta_{B_2} \leq 0 \\ x_{C_2} - 2500\delta_{C_2} \leq 0 \\ x_{A_i} \geq 0, x_{B_i} \geq 0, x_{C_i} \geq 0, \qquad i = 1, 2 \\ \delta_{A_i} \in \{0, 1\}, \delta_{B_i} \in \{0, 1\}, \delta_{C_i} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, 2. \end{cases}$$

□

4.3.2 Problemi di "lot sizing" (gestione della scorte)

I modelli multiperiodo esaminati nel paragrafo 3.4.1 rientrano in una classe di modelli per la programmazione della produzione che va sotto il nome di *Modelli per la gestione della scorte ("lot sizing")* che anche da un punto di vista storico costituiscono un argomento centrale della Ricerca Operativa
Attualmente negli USA alcune indagini hanno evidenziato che il 50% delle aziende americane di produzione utilizzano strumenti matematici per la gestione ottima delle scorte. C'è la necessita di integrare la fase produttiva con quella della gestione delle scorte. L'utilizzazione di scorte nei processi produzione ha numerosi vantaggi:

- *economia di scala* che si possono conseguire aumentando i volumi produttivi minimizzando l'incidenza dei costi fissi;
- *flessibiltà della produzione*: si riesce a far fronte con le scorte all'eventuale andata fuori servizio di qualche linea di produzione;
- *equipartizione dei carichi di lavori* sull'intero orizzonte produttivo.

Un problema di "lot sizing" si può formalizzare nel seguente modo: si tratta di pianificare la fabbricazione di un bene in assegnato un orizzonte temporale costituito da un insieme finito di periodi di controllo $T = \{1, \ldots, t\}$. Per ogni periodo $i \in \{1, \ldots, t\}$ è nota la richiesta di questo bene (che deve essere soddisfatta esattamente) che indichiamo con d_i. Sono noti i costi unitari c_i, $i = 1, \ldots, t$ di produzione del bene in ciascun periodo ed inoltre in ogni periodo, ad eccezione dell'ultimo, è possibile immagazzinare quantità di questo bene che andrà a fare parte della quantità di bene disponibile nel periodo successivo. Anche il costo di stockaggio unitario è assegnato ed è pari a b_i. La novità rispetto ai modelli multiperiodo consiste nella presenza di costi di setup corrispondenti all'avviamento della produzione in ciascun periodo; si tratta di costi fissi che non dipendono dalle quantità prodotte e vengono sostenuti solamente se si produce qualcosa nel periodo; indichiamo con f_i questi costi fissi.
Il problema consiste nel determinare le quantità di bene da produrre in ciascun periodo e le quantià da immagazzinare in modo da soddisfare le richieste minizzando il costo complessivo dato dalla somma dei costi di produzione e di stockaggio tenendo conto che all'inzio del primo periodo non c'è nessuna scorta disponibile e che nell'ultimo periodo non si può effettuare alcuno stockaggio.

Formulazione.

– *Variabili.* Indichiamo con x_i, $i = 1, \ldots, t$ il livello di produzione nel periodo i-esimo, cioè le quantità del bene da produrre in quel periodo. Indichiamo inoltre con s_i, $i = 1, \ldots, t-1$ le quantità di bene che vengono immagazzinate nel periodo

i. Inoltre, per $i = 1, \ldots, t$ introduciamo le seguenti variabili $0 - 1$:

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se nell'}i\text{–esimo periodo c'è produzione} \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

Il problema può essere efficacemente rappresentato come in Figura 4.3.2

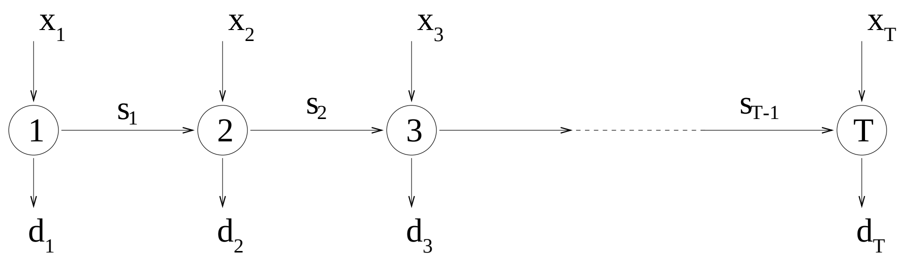

Fig. 4.3.2 Un problema di "Lot sizing"

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo sarà data dalla somme dei costi di produzione e dei costi di stockaggio e quindi può essere scritta nella forma

$$\sum_{i=1}^{t} c_i x_i + \sum_{i=1}^{t-1} b_i s_i + \sum_{i=1}^{t} f_i \delta_i$$

– *Vincoli.* I vincoli del problema sono i seguenti già esaminati nel caso di modelli multiperiodo:

$$\begin{array}{rcll} x_1 & = & d_1 + s_1 & \\ s_{i-1} + x_i & = & d_i + s_i, & i = 2, \ldots, t-1 \\ s_{t-1} + x_t & = & d_t & \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, & \ldots & , x_t \geq 0, & \\ s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, & \ldots & , s_{t-1} \geq 0 & \end{array}$$

Inoltre si devono considerare i vincoli relativi alla presenza dei costi fissi, ovvero i vincoli

$$x_i - M\delta_i \leq 0 \qquad i = 1, \ldots, t$$

dove M, ad esempio, può essere scelta pari a $\sum_{i=1}^{t} d_i$, cioè pari a quanto viene richiesto durante l'intero orizzonte temporale.

Quindi la formulazione complessiva di un problema di "lot sizing" si può scrivere come

$$
\begin{cases}
\min \left(\sum\limits_{t=1}^{t} c_i x_i + \sum\limits_{i=1}^{i-1} b_i s_i + \sum\limits_{i=1}^{t} f_i \delta_i \right) \\
x_1 - s_1 = d_1 \\
s_{i-1} + x_i - s_i = d_i \qquad i = 2, \ldots, t-1 \\
s_{t-1} + x_t = d_t, \\
\\
x_i - M\delta_i \leq 0 \qquad i = 1, \ldots, t \\
\\
x_1 \geq 0, \ldots, \quad x_t \geq 0, \\
s_1 \geq 0, \ldots, \quad s_{t-1} \geq 0 \\
\delta_1 \in \{0,1\}, \quad \ldots, \quad \delta_i \in \{0,1\}.
\end{cases}
$$

□

Esempio 4.3.3 *Un'industria deve pianificare la produzione di un unico prodotto per i prossimi tre mesi. La domanda mensile che il mercato è in grado di assorbire è nel primo, nel secondo e nel terzo mese pari rispettivamente a 120, 150 e 90 tonnellate. Questa industria dispone di magazzini e quindi ha la possibilità di stoccare le quantità prodotte nel primo o nel secondo mese, ma al termine del trimestre non intende lasciare scorte in magazzino. Lo stoccaggio ha un costo unitario (in migliaia di Euro per tonnellata) pari a 2. Infine per la produzione di ciascuna tonnellata di prodotto l'industria deve sostenere un costo (variabile nei tre mesi) pari a 10, 12 e 11 migliaia di Euro rispettivamente nel primo, nel secondo e nel terzo mese. Si deve determinare quanto produrre mensilmente e quanto stoccare nei primi due mesi in modo da minizzare il costo complessivo.*

Formulazione.
È un problema di "lot sizing" che può essere formulato come segue.

– *Variabili.* Indichiamo con x_1, x_2 e x_3 le quantità in tonnellate di prodotto da fabbricare rispettivamente nel primo nel secondo e nel terzo mese. Inoltre indichiamo con s_1 e s_2 le quantità di prodotto da stoccare rispettivamente nel primo e nel secondo mese.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo è data dal costo complessivo che deve essere minizzato e quindi è data da

$$10x_1 + 12x_2 + 11x_3 + 2s_1 + 2s_2.$$

– *Vincoli.* I vincoli sono dati dalle seguenti espressioni;

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 120 + s_1 \\
x_2 + s_1 &= 150 + s_2 \\
x_3 + s_2 &= 90
\end{aligned}
$$

Infine si devono esplicitare i vincoli di non negatività sulle variabili.

Quindi la formulazione complessiva è:

$$\begin{cases} \min\,(10x_1 + 12x_2 + 11x_3 + 2s_1 + 2s_2) \\ x_1 = 120 + s_1 \\ x_2 + s_1 = 150 + s_2 \\ x_3 + s_2 = 90 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0. \end{cases}$$

□

4.3.3 Problemi di localizzazione di impianti

Si tratta di problemi che nascono nell'ambito della pianificazione industriale che possono essere schematizzati nel seguente modo: sono date n aree $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, distribuite in un territorio. In ciascuna di esse è possibile costruire una fabbrica che produce merce. Per ciascuna area $\mathbf{A_i}$, $i = 1, \ldots n$ è nota la massima capacità produttiva p_i, $i = 1, \ldots, n$ che una fabbrica avrebbe se fosse localizzata in $\mathbf{A_i}$. Sia inoltre f_i il costo fisso di costruzione della fabbrica nell'area $\mathbf{A_i}$. Sono inoltre dati m siti $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_m$, ove risiedono clienti ai quali deve essere trasportate la merce prodotta. Per ciascun sito $\mathbf{C}_j$ è assegnato un quantitativo r_j, $j = 1, \ldots, m$, di una data merce richiesta presso il sito $\mathbf{C}_j$. Tale richiesta deve essere soddisfatta esattamente. Per soddisfare questa richiesta possono essere costruite $q \leq n$ fabbriche che producono la merce. Esistono altri costi fissi dovuti alla eventuale costruzione di una strada dall'area $\mathbf{A}_i$ al sito $\mathbf{C}_j$, per ogni $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots m$; indicheremo questi costi fissi con f_{ij}. Siano inoltre c_{ij} il costo necessario per trasportare una unità di merce dalla fabbrica costruita nell'area $\mathbf{A}_i$ al sito $\mathbf{C}_j$ e M_{ij} il quantitativo massimo di merce trasportabile. Il problema consiste nel determinare quante fabbriche e su quali aree costruirle, insieme a quali strade di collegamento costruire, in modo da soddisfare le richieste di i siti minimizzando i costi di costruzione delle fabbriche, delle strade di collegamento e il costo del trasporto della merce una volta che le costruzioni delle fabbriche sono state ultimate determinando al tempo stesso il piano per il trasporto della merce per soddisfare tutte le richieste.

Questo problema può essere formulato come problema di Programmazione Lineare Intera nel seguente modo: si introducono le seguenti variabili

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se una fabbrica è costruita sull'area } \mathbf{A}_i \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se una strada è costruita da } \mathbf{A}_i \text{ a } \mathbf{C}_j \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si introducono inoltre le variabili x_{ij} che rappresentano la quantità di merce trasportata dalla fabbrica costruita nell'area $\mathbf{A}_i$ al sito $\mathbf{C}_j$.

I vincoli sono innanzitutto i vincoli di richiesta

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = r_j \quad \text{per ogni} \quad j = 1, \dots, m.$$

Inoltre per ogni $i = 1, \dots, m$, si vuole che se $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} > 0$ allora $\delta_i = 1$. Questa implicazione si realizza con i vincoli

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - p_i \delta_i \leq 0 \qquad i = 1, \dots, n.$$

Ragionando analogamente si ottengono i vincoli

$$x_{ij} - M_{ij} y_{ij} \leq 0 \qquad i = 1, \dots n, \quad j = 1, \dots m.$$

Infine dovrà essere

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \leq q.$$

Si devono poi esplicitare i vincoli $x_{ij} \geq 0$ e $\delta_i \in \{0, 1\}$, $y_{ij} \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots n$, $j = 1, \dots m$.
La funzione obiettivo si può quindi scrivere

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} f_i \delta_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_{ij} y_{ij}.$$

Esaminiamo, ora, un esempio molto semplice di problema di localizzazione di impianti.

Esempio 4.3.4 *Una compagnia di distribuzione deve rifornire i suoi clienti* $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{C_3}$, $\mathbf{C_4}$ *e* $\mathbf{C_5}$ *che sono dislocati in località diverse di una regione. Per ottimizzare il rifornimento la compagnia vuole costruire un numero di depositi non superiore a due disponendo di tre possibili zone dove costruirli. A seconda della zona in cui vengono costruiti, i tre possibili depositi hanno un costo di costruzione e una capacità massima diversi. La tabella che segue riporta questi costi in migliaia di euro e queste capacità in tonnellate.*

	Costo costruzione	**Capacità massima**
Deposito 1	*10000*	*180*
Deposito 2	*15000*	*230*
Deposito 3	*13000*	*500*

Il quantitativo di merce (in tonnellate) richiesto da ciascun cliente è riportato nella tabella che segue insieme ai costi (in migliaia di euro) del trasporto di una unità di merce da ciascuno dei possibili depositi a ciascun cliente.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Richiesta	*91*	*170*	*135*	*153*	*110*
Deposito 1	*15*	*13*	*27*	*9*	*7*
Deposito 2	*12*	*21*	*34*	*21*	*3*
Deposito 3	*7*	*10*	*2*	*17*	*12*

Costruire un modello lineare che rappresenti il problema in analisi per soddisfare esattamente la richiesta minimizzando il costo complessivo trascurando la possibilità di costruire ulteriori collegamenti rispetto a quelli esistenti e supponendo che non ci siano limitazioni sulle quantità massime di merci trasportabili.

Formulazione.
È un problema che rientra nello schema generale di un problema di localizzazione di impianti e quindi può essere formulato in termini di Programmazione Lineare Intera come appena descritto nel caso generale.

– *Variabili.* È sufficiente introdurre le variabili binarie

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se è costruito l'}i\text{−esimo deposito} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e le variabili x_{ij} che rappresentano la quantità di merce da trasportare dal deposito i−esimo alla zona j−esima.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare sarà

$$\begin{aligned} &15x_{11} + 13x_{12} + 27x_{13} + 9x_{14} + 7x_{15} + 12x_{21} + 21x_{22} + 34x_{23} + 21x_{24} + 3x_{25} \\ &\qquad +7x_{31} + 10x_{32} + 2x_{33} + 17x_{34} + 12x_{35} + 10000\delta_1 + 15000\delta_2 + 13000\delta_3. \end{aligned}$$

– *Vincoli.* I vincoli da considerare sono innanzitutto i vincoli di richiesta

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 91, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 170, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 135, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i4} = 153, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i5} = 110.$$

Inoltre

$$\sum_{j=1}^{5} x_{1j} - 180\delta_1 \leq 0,$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{2j} - 230\delta_2 \leq 0,$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{3j} - 500\delta_3 \leq 0.$$

Poiché non si possono costruire più di due depositi, si deve poi imporre che

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq 2.$$

Naturalmente devono essere anche esplicitati i vincoli

$$x_{ij} \geq 0 \quad \delta_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3,4,5.$$

Quindi la formulazione complessiva è:

$$\begin{cases} \min\Big(15x_{11} + 13x_{12} + 27x_{13} + 9x_{14} + 7x_{15} + 12x_{21} + 21x_{22} + 34x_{23} \\ \quad +21x_{24} + 3x_{25} + 7x_{31} + 10x_{32} + 2x_{33} + 17x_{34} + 12x_{35} \\ \quad +10000\delta_1 + 15000\delta_2 + 13000\delta_3\Big) \\ \sum_{i=1}^3 x_{i1} = 91 \\ \sum_{i=1}^3 x_{i2} = 170 \\ \sum_{i=1}^3 x_{i3} = 135 \\ \sum_{i=1}^3 x_{i4} = 153 \\ \sum_{i=1}^3 x_{i5} = 110 \\ \sum_{j=1}^5 x_{1j} - 180\delta_1 \leq 0 \\ \sum_{j=1}^5 x_{2j} - 230\delta_2 \leq 0 \\ \sum_{j=1}^5 x_{3j} - 500\delta_3 \leq 0 \\ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq 2 \\ x_{ij} \geq 0 \quad \delta_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

□

4.4 VARIABILI BINARIE PER INDICARE IL SODDISFACIMENTO DI VINCOLI

Un altro uso importante delle variabili binarie consiste nell'indicare lo stato di una certa relazione tra le variabili di un problema di Programmazione Lineare, ad esempio lo stato di un vincolo. Si tratta di una generalizzazione di quanto già visto nel paragrafo 4.3 quando abbiamo introdotto variabili binarie per rappresentare attraverso vincoli lineari implicazioni logiche tra il valore assunto da una variabile reale $x \geq 0$ e una variabile indicatrice binaria $\delta \in \{0,1\}$, ad esempio del tipo

$$x > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \delta = 1.$$

Ora consideriamo la necessità di costruire un modello lineare per rappresentare espressioni logiche più articolate, ad esempio del tipo

$$\phi(x) > \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \delta = 1,$$

dove ϕ è una funzione delle variabili di decisione $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ presenti nel modello e α un particolare scalare. Ad esempio, $\phi(x) \geq \alpha$ potrebbe rappresentare un vincolo del modello e in questo caso una variabile binaria $\delta \in \{0,1\}$ potrebbe avere il ruolo di indicare se un vettore x soddisfa quel vincolo. È chiaro che prendendo $\phi(x) = x$ e $\alpha = 0$ otteniamo quanto già visto nel paragrafo 4.3.

Sia $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Supponiamo di voler creare un modello lineare per la seguente implicazione logica:

$$\phi(x) > \alpha \quad \Rightarrow \quad \delta = 1 \tag{4.4.1}$$

che ovviamente è equivalente a

$$\delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(x) \leq \alpha \tag{4.4.2}$$

In pratica, si vuole imporre che quando la funzione $\phi(x)$ assume valori più grandi dello scalare α, la variabile binaria δ sia posta uguale ad uno. Per realizzare questa relazione è più semplice fare riferimanto alla implicazione equivalente (4.4.2). Pertanto si deve definire un vincolo lineare che

(1) se $\delta = 0$ impone la relazione $\phi(x) \leq \alpha$;

(2) se $\delta = 1$ non viene introdotta alcuna restrizione aggiuntiva.

Un tale vincolo può essere facilmente realizzato se si conosce uno scalare M tale che la relazione

$$\phi(x) \leq M \tag{4.4.3}$$

è sempre verificata qualunque sia x appartenente all'insieme ammissibile del modello considerato. Nella pratica la conoscenza di un tale scalare M non è una assunzione restrittiva. Infatti molto spesso alcuni vincoli del modello permettono di identificare facilmente una costante che soddisfa la (4.4.3) per ogni x che soddisfa tali vincoli. In alternativa si può scegliere per M un valore molto grande in modo tale che, in pratica, la (4.4.3) sia sempre soddisfatta.
Un vincolo che realizza i precedenti punti (1) e (2), può essere ottenuto facilmente aggiungendo alla (4.4.3) un termine che si annulla se $\delta = 1$ e che fa comparire la disuguagliaza $\phi(x) \leq \alpha$ se $\delta = 0$. In particolare si può definire il seguente vincolo:

$$\phi(x) \leq M + (\alpha - M)(1 - \delta). \tag{4.4.4}$$

Nel caso particolare in cui $\alpha = 0$ si ottiene

$$\phi(x) \leq M\delta, \tag{4.4.5}$$

che realizza l'implicazione

$$\phi(x) > 0 \;\Rightarrow\; \delta = 1 \quad \text{(o equivalentemente} \quad \delta = 0 \;\Rightarrow\; \phi(x) \leq 0).$$

Passiamo, ora, ad esaminare il "viceversa" delle implicazioni logiche (4.4.1)–(4.4.2), ovvero

$$\phi(x) \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad \delta = 0 \tag{4.4.6}$$

che è equivalente a

$$\delta = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(x) > \alpha. \tag{4.4.7}$$

Anche in questo caso per realizzare la precedenti implicazioni logiche è più semplice fare riferimento all'implicazione (4.4.7). Tuttavia le disuguaglianze strette creano problemi sia dal punto di vista teorico, in quanto potrebbero portare a definire insiemi ammissibili non chiusi, e sia dal punto di vista pratico, poiché numericamente può essere difficile capire se due quantità sono distinte se la loro differenza è estremamente piccola. Quindi si preferisce considerare la seguente implicazione:

$$\delta = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(x) \geq \alpha + \varepsilon, \tag{4.4.8}$$

dove $\varepsilon > 0$ è uno scalare sufficientemente piccolo.

In maniera simmetrica rispetto al caso precedente, l'implicazione (4.4.8) si può rappresentare con un vincolo lineare se si conosce una scalare m tale che la relazione

$$\phi(x) \geq m \tag{4.4.9}$$

è sempre verificata qualunque sia x appartenente all'insieme ammissibile del modello considerato. Infatti ripetendo ragionamenti simili a quelli fatti per definire il vincolo (4.4.4), possiamo scrivere il seguente vincolo

$$\phi(x) \geq m + (\alpha + \varepsilon - m)\delta. \tag{4.4.10}$$

Nel caso particolare che $\alpha = 0$ e $m = 0$ si ottiene

$$\phi(x) \geq \varepsilon\delta, \tag{4.4.11}$$

che realizza l'implicazione

$$\phi(x) < \varepsilon \ \Rightarrow \ \delta = 0 \quad (\text{o equivalentemente} \quad \delta = 1 \ \Rightarrow \ \phi(x) \geq \varepsilon).$$

In conclusione riportiamo il seguente schema riepilogativo che riporta sinteticamente i due casi ora trattati:

$$\phi(x) \leq M + (\alpha - M)(1 - \delta) \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \phi(x) > \alpha & \Rightarrow \quad \delta = 1 \\ \delta = 0 & \Rightarrow \quad \phi(x) \leq \alpha \end{cases}$$

$$\phi(x) \geq m + (\alpha + \varepsilon - m)\delta \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \phi(x) \leq \alpha & \Rightarrow \quad \delta = 0 \\ \delta = 1 & \Rightarrow \quad \phi(x) \geq \alpha + \varepsilon. \end{cases}$$

Esempio 4.4.1 *Date le variabili continue x_1, x_2 e x_3 tali che*

$$0 \leq x_i \leq 10 \quad i = 1, 2, 3,$$

introdurre dei vincoli lineari che assicurino che al più solamente due variabili siano diverse da zero.

Introducendo delle variabili $\delta_i \in \{0,1\}$, con $i = 1,2,3$, si possono innanzitutto realizzare le implicazioni

$$x_i > 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_i = 1.$$

Per quando appena detto e tenendo conto che in questo caso si può scegliere $M = 10$, si possono introdurre i seguenti vincoli

$$x_i \leq 10\delta_i, \qquad i = 1,2,3.$$

Poi, per assicurare che solamente due delle variabili x_i siano strettamente positive basta aggiungere il vincolo che

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq 2.$$

□

Esempio 4.4.2 *Usare una variabile* $0-1$ *per indicare se il vincolo*

$$3x_1 + 5x_2 \leq 2$$

è verificato oppure no, sapendo che x_1 *e* x_2 *sono variabili continue tali che*

$$0 \leq x_1 \leq 1 \quad e \quad 0 \leq x_2 \leq 1.$$

Soluzione.
Introducendo la variabile $\delta \in \{0,1\}$, si vogliono modellare le condizioni

(1) $\delta = 1 \quad \Rightarrow \quad 3x_1 + 5x_2 \leq 2$

(2) $3x_1 + 5x_2 \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \delta = 1.$

Per modellare la (1) si può scegliere $\phi(x) = 3x_1 + 5x_2$, $\alpha = 2$ e prendendo $M = 8$ si può utilizzare la (4.4.4) riscritta nella forma $\phi(x) \leq M + (\alpha - M)\delta$ (ovvero sostituendo δ con $1-\delta$). Si ha quindi

$$3x_1 + 5x_2 + 6\delta \leq 8.$$

Per modellare la (2) scritta nella forma equivalente $\delta = 0 \Rightarrow 3x_1 + 5x_2 > 2$ si può utilizzare la (4.4.10) con $\alpha = 2$, prendendo $m = 0$ e scegliendo, ad esempio, la tolleranza $\epsilon = 0.1$. Si ottiene cosı il vincolo:

$$3x_1 + 5x_2 + 2.1\delta \geq 2.1.$$

□

Esempio 4.4.3 *Usare una variabile* $0-1$ *per indicare che una funzione* $\phi(x)$ *delle variabili del problema presenti la seguente alternativa*

$$\phi(x) = 0 \quad \text{oppure} \quad \alpha_{min} \leq \phi(x) \leq \alpha_{max}.$$

dove $\alpha_{min} \leq \alpha_{max}$ sono due dati scalari.

Soluzione.
Prima di tutto si deve introdurre una variabile $\delta \in \{0,1\}$ ed un vincolo che permettano di identificare il fatto che $\phi(x)$ assuma valori positivi.

Si può utilizzare la $\phi(x) \leq M\delta$ scegliendo $M = \alpha_{max}$ ovvero

$$\phi(x) \leq \alpha_{max}\delta.$$

Per assicurare che quando $\phi(x) > 0$ si abbia $\phi(x) \geq \alpha_{min}$ basta imporre la seguente implicazione

$$\delta = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(x) \geq \alpha_{min}.$$

Analogamente, prendendo $m = 0$ nella (4.4.10) si ha:

$$\phi(x) \geq \alpha_{min}\delta.$$

In conclusione l'alternativa richiesta può essere ottenuta dalle relazioni:

$$\alpha_{min}\delta \leq \phi(x) \leq \alpha_{max}\delta.$$

$\square$

Osservazione 4.4.4 Se si hanno N vincoli ed altrettante variabili $\delta_i \in \{0,1\}$ che indichino la condizione logica

$$\delta_i = 1 \quad \Rightarrow \quad i-\text{esimo vincolo soddisfatto},$$

si può facilmente imporre che, al più, solamente un numero limitato di vincoli siano soddisfatti, oppure imporre che almeno un certo numero di essi siano soddisfatti. Infatti, si può richiedere che almeno k vincoli siano soddisfatti imponendo il vincolo:

$$\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_N \geq k$$

mentre si può richiedere che al più k siano soddisfatti imponendo la seguente relazione

$$\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_N \leq k.$$

4.4.1 Variabili binarie per indicare il soddisfacimento di vincoli disgiuntivi

Nell'usuale definizione di problemi di ottimizzazione si assume che tutti i vincoli debbano essere soddisfatti simultaneamente da una soluzione ammissibile. Tuttavia in molte applicazioni può accadere che solo un sottoinsieme dei vincoli debba essere soddisfatto e che tale sottoinsieme sia specificato dal valore che assume un'opportuna variabile di decisione. In questo caso si dice che i vincoli sono *disgiuntivi.*
Come esempio di questo uso delle variabili binarie, analizziamo una importante classe di problemi.

4.4.2 Problemi di "scheduling" (sequenziamento)

Si tratta di problemi di produzione in cui si deve decidere l'ordine di processamento di una sequenza di lavori su una macchina in grado di eseguire un lavoro alla volta (capacità unitaria). Si deve quindi esprimere la condizione disgiuntiva

"il lavoro i-esimo precede il lavoro j-esimo"

"il lavoro j-esimo precede il lavoro i-esimo".

Questo tipo di problema si presenta spesso in ambito industriale e nei sistemi di elaborazione.
Formalmente si ha la seguente situazione: siano dati n lavori *indipendenti* (il tempo di esecuzione di ciascun lavoro non dipende da quando viene eseguito rispetto agli altri lavori) e *indivisibili* (ciascun lavoro deve essere completato prima di poter eseguire il successivo).
Supponiamo inoltre che ciascun lavoro sia presente nel sistema fin dall'inizio, cioè che la macchina possa iniziare la lavorazione di un qualunque lavoro in qualsiasi istante.
Sia noto $p_i, \;\; i = 1, \ldots, n$ il tempo di processamento di ciascun lavoro sulla macchina.
Il problema consiste nel determinare la sequenza di lavorazione dei lavori sulla macchina, cioè gli istanti $t_i, \;\; i = 1, \ldots, n$ in cui la macchina inizia la lavorazione del lavoro i-esimo, in modo da ottimizzare un opportuno criterio.
Avendo introdotto le variabili t_i indicanti gli istanti di tempo in cui la macchina inizia a processare l'i-esimo lavoro, formulare un problema di scheduling significa determinare i vincoli sulle variabili t_i in modo che esse rappresentino sequenze effettivamente realizzabili sulla macchina.

Formulazione.
– *Variabili.* Introduciamo formalmente le seguenti variabili: per indicare se il lavoro i precede il lavoro j o viceversa, per ogni $1 \le i < j \le n$, si introducono le

variabili $0-1$ così definite

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il lavoro } i \text{ precede il lavoro } j \\ 0 & \text{se il lavoro } j \text{ precede il lavoro } i. \end{cases}$$

Si introducono, inoltre, le variabili temporali $t_i, \;\; i = 1, \dots, n$ indicanti gli istanti di tempo di inizio dei lavori.

– *Vincoli.* Come già osservato, la macchina ha capacità unitaria e deve completare un lavoro prima di iniziarne un altro. Quindi uno solo dei due vincoli "il lavoro i-esimo precede il lavoro j-esimo", oppure "il lavoro j-esimo precede il lavoro i-esimo" deve essere soddisfatto.
Se il lavoro i è iniziato sulla macchina prima del lavoro j, si deve avere

$$t_j \geq t_i + p_i.$$

Se invece il lavoro j inizia prima del lavoro i, allora si deve avere

$$t_i \geq t_j + p_j.$$

Si devono, quindi, esplicitare le seguenti condizioni logiche:

$$y_{ij} = 1 \quad \Rightarrow \quad t_i - t_j \leq -p_i \tag{4.4.12}$$

$$y_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_j - t_i \leq -p_j. \tag{4.4.13}$$

Se M è un limite superiore sia per $t_i - t_j + p_i$ sia per $t_j - t_i + p_j$, allora usando la (4.4.5), prendendo $\phi(x) = t_i - t_j + p_i$, e sostituendo δ con $1 - \delta$, la condizione (4.4.12) si può realizzare con il vincolo $t_i - t_j + p_i \leq M(1 - y_{ij})$. Analogamente, usando sempre la (4.4.5), prendendo $\phi(x) = t_j - t_i + p_j$, la condizione (4.4.13) si può realizzare con il vincolo $t_j - t_i + p_j \leq My_{ij}$. Quindi, complessivamente, le condizioni (4.4.12) e (4.4.13) possono essere rispettivamente modellate dai vincoli

$$t_i - t_j + p_i \leq M(1 - y_{ij}) \qquad 1 \leq i < j \leq n \tag{4.4.14}$$

$$t_j - t_i + p_j \leq My_{ij} \qquad 1 \leq i < j \leq n. \tag{4.4.15}$$

Infatti se $y_{ij} = 1$ la (4.4.14) esprime la condizione che la lavorazione del lavoro j può iniziare solo dopo il completamento del lavoro i mentre la (4.4.15) è sempre soddisfatta (per la scelta di M) e quindi non introduce ulteriori restrizioni. Se $y_{ij} = 0$, allora la (4.4.15) esprime la condizione che la lavorazione del lavoro i può iniziare solo dopo il completamento del lavoro j, mentre la (4.4.14) è sempre soddisfatta e quindi non introduce alcuna ulteriore restrizione. La (4.4.14) e la (4.4.15) sono di solito chiamati *vincoli di sequenziamento.*
Si devono inoltre esplicitare i vincoli di non negatività sulle variabili t_i, cioè

$$t_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n.$$

Si può riassumere quanto fino ad ora esposto nel seguente risultato:

Teorema 4.4.1 *Se un vettore* $(t, y)^T$ *con* $t \in \mathbb{R}^n$ *ed* $y \in \{0,1\}^{n\times n}$ *soddisfa il sistema*

$$\begin{cases} t_i - t_j + p_i \leq M(1 - y_{ij}) \\ t_j - t_i + p_j \leq M y_{ij} \end{cases} \qquad 1 \leq i < j \leq n,$$

allora ciascuna componente del vettore t *rappresenta un istante ammissibile di inizio processamento per il corrispondente lavoro. Viceversa, per ogni vettore ammissibile* t *esiste sicuramente un vettore* y *(che rappresenta l'ordine di processamento dei lavori sulla macchina) tale che il vettore* (t, y) *è ammissibile per il precedente sistema di vincoli.*

Naturalmente possono essere facilmente inseriti nel modello vincoli di precedenza o altre restrizioni temporali aggiungendo vincoli lineari sulle variabili t ed y.

– *Funzione obiettivo.* Nei problemi di scheduling la funzione obiettivo è di solito costruita in modo da ottimizzare un opportuno criterio. Analizziamo, ora, due dei criteri più diffusi:

a) *Tempo medio di permanenza nel sistema.*

Ogni istante t_i può essere, infatti, anche interpretato come tempo di attesa nel sistema del lavoro i prima di essere processato. Quindi, il tempo medio di permanenza nel sistema può essere scritto

$$\frac{\sum_{i=1}^n (t_i + p_i)}{n}.$$

b) *Tempo complessivo di utilizzazione della macchina.*

Questo criterio è significativo nel caso dell'uso di più macchine, perché nel caso di una sola macchina questo tempo complessivo è noto; infatti esso è dato da $\sum_{i=1}^n p_i$. Tuttavia anche in questo caso esso è esprimibile come nel caso generale cioè nella forma

$$\max_{1\leq i<j\leq n} (t_i + p_i).$$

Si osservi che questa fuzione obiettivo da minimizzare è di tipo "max" e quindi non è lineare. Tuttavia esiste un semplice procedimento (che per brevità non riportiamo) che permette di ottenere un problema equivalente lineare.

Analizziamo, ora, un semplice esempio di problema di scheduling.

Esempio 4.4.5 *Sia data una macchina a capacità unitaria che deve effettuare tre lavori aventi tempo di processamento* $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 4,$. *Formulare il* *problema di scheduling che consenta di determinare la sequenza che minimizza il tempo medio di permanenza nel sistema, tenendo conto che, se il primo lavoro precede il secondo, l'inizio del terzo lavoro deve aspettare un tempo $\Delta_3 = 2$ dopo il termine del secondo lavoro, mentre, se il terzo lavoro precede il primo, l'inizio del secondo deve attendere un tempo $\Delta_2 = 3$ dopo il termine del primo lavoro.*

Formulazione.
Formuliamo questo problema come appena esposto nel caso generale.

– *Variabili.* Introduciamo tre variabili continue t_1, t_2, t_3, indicanti gli istanti di inizio dei lavori sulla macchina e tre variabili $0-1$ per esprimere i vincoli di sequenziamento così definite:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il lavoro } i \text{ precede il lavoro } j \\ 0 & \text{se il lavoro } j \text{ precede il lavoro } i \end{cases} \qquad 1 \le i < j \le 3.$$

– *Vincoli di sequenziamento.* Introducendo una costante positiva M che sia una limitazione superiore per $t_i - t_j + p_i$ e per $t_j - t_i + p_j$, i vincoli di sequenziamento possono essere scritti

$$\begin{array}{rcl} t_1 - t_2 + 2 & \le & M(1 - y_{12}) \\ t_2 - t_1 + 3 & \le & My_{12} \\ t_1 - t_3 + 2 & \le & M(1 - y_{13}) \\ t_3 - t_1 + 4 & \le & My_{13} \\ t_2 - t_3 + 3 & \le & M(1 - y_{23}) \\ t_3 - t_2 + 4 & \le & My_{23} \end{array}$$

– *Altri vincoli.* Gli altri vincoli di attese reciproche possono essere rappresentati utilizzando le variabili binarie precedentemente introdotte e la costante positiva M.

$$\begin{array}{rcl} t_2 + 3 + 2 - t_3 & \le & M(1 - y_{12}) \\ t_1 + 2 + 3 - t_2 & \le & My_{13} \end{array}$$

Inoltre, si devono esplicitare i vincoli di non negatività

$$t_1 \ge 0 \quad t_2 \ge 0 \quad t_3 \ge 0.$$

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare è data dal tempo medio di permanenza nel sistema e quindi può essere scritta

$$\frac{1}{3}(t_1 + 2 + t_2 + 3 + t_3 + 4).$$

La formulazione finale sarà quindi

$$\begin{cases} \min \dfrac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3 + 9) \\ t_1 - t_2 + 2 \le M(1 - y_{12}) \\ t_2 - t_1 + 3 \le My_{12} \\ t_1 - t_3 + 2 \le M(1 - y_{13}) \\ t_3 - t_1 + 4 \le My_{13} \\ t_2 - t_3 + 3 \le M(1 - y_{23}) \\ t_3 - t_2 + 4 \le My_{23} \\ t_2 + 3 + 2 - t_3 \le M(1 - y_{12}) \\ t_1 + 2 + 3 - t_2 \le My_{13} \\ t_1 \ge 0 \quad t_2 \ge 0 \quad t_3 \ge 0 \\ y_{12} \in \{0, 1\}, \quad y_{13} \in \{0, 1\}, \quad y_{23} \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

$\square$

5

Interpretazione della dualità nei modelli di Programmazione Lineare

Nei modelli reali le variabili (primali) possono rappresentare, ad esempio, livelli di produzione e i coefficienti di costo possono essere associati ai profitti ricavati dalla vendita dei prodotti. Quindi la funzione obiettivo di un problema primale indica direttamente come un aumento della produzione può influenzare il profitto. Sempre in relazione, ad esempio, ad un modello per la pianficazione della produzione, i vincoli di un problema (primale) possono rappresentare una limitazione dovuta alla limitata disponibilità delle risorse; ora, un aumento della disponibilità delle risorse può consentire un aumento della produzione e quindi anche del profitto, ma questa relazione tra aumento della disponibilità delle risorse e aumento del profitto non si deduce facilmente dal problema formulato (il problema primale). Uno dei possibili usi della dualità è quello di rendere esplicito l'effetto dei cambiamenti nei vincoli (ad esempio in quelli di disponibilità di risorse) sul valore della funzione obiettivo. Questo perché, come vedremo, le variabili duali possono essere anche interpretate come i cosiddetti *prezzi ombra* in quanto misurano i "costi" impliciti associati ai vincoli.

5.1 INTERPRETAZIONE ECONOMICA DELLE VARIABILI DUALI: I PREZZI OMBRA

Per introdurre il concetto delle variabili duali come prezzi ombra facciamo riferimento ad un semplice esempio di modello di pianificazione della produzione che brevemente descriviamo.

Esempio 5.1.1 *Un'industria produce due tipi di prodotti: un tipo* de luxe *e un tipo* standard*. Per avere un prodotto finito di ciascuno dei due tipi sono necessari due ingredienti grezzi* $\mathbf{I_1}$ *e* $\mathbf{I_2}$ *e la lavorazione su una macchina. La tabella che segue riporta le quantità in Kg di ciascuno degli ingredienti e le ore di lavorazione sulla macchina necessarie per ottenere un prodotto finito di ciascuno dei due tipi.*

	de luxe	standard
$\mathbf{I_1}$	*3*	*2*
$\mathbf{I_2}$	*4*	*1*
ore lavoraz.	*2*	*1*

Settimanalmente si hanno a disposizione al piú 1200 Kg dell'ingrediente $\mathbf{I_1}$ *e al piú 1000 Kg dell'ingrediente* $\mathbf{I_2}$ *mentre la disponibilità massima settimanale di ore lavorative della macchina è pari a 700. Un prodotto* de luxe *è venduto a 24 Euro e un prodotto* standard *è venduto a 14 Euro. Si vuole pianificare la produzione settimanale in modo da massimizzare il profitto complessivo assumendo che i prodotti siano frazionabili.*

Si tratta di un problema di allocazione ottima di risorse limitate che può essere formulato come problema di Programmazione Lineare nel seguente modo:

$$\begin{cases} \max 24x_1 + 14x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 1200 \\ 4x_1 + x_2 \le 1000 \\ 2x_1 + x_2 \le 700 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

dove le variabili x_1 e x_2 rappresentano le quantità di prodotti ripettivamente del tipo *de luxe* e del tipo *standard* da fabbricare settimanalmente.

Consideriamo, ora, il problema duale del problema ora formulato; esso è

$$\begin{cases} \min 1200u_1 + 1000u_2 + 700u_3 \\ 3u_1 + 4u_2 + 2u_3 \ge 24 \\ 2u_1 + u_2 + u_3 \ge 14 \\ u_1 \ge 0, u_2 \ge 0, u_3 \ge 0. \end{cases}$$

La soluzione ottima del primale è

$$x_1^\star = 160, \qquad x_2^\star = 360$$

e il valore ottimo della funzione obiettivo primale è pari a 8880.

La soluzione ottima del duale è

$$u_1^\star = 6.4, \qquad u_2^\star = 1.2, \qquad u_3^\star = 0$$

e il valore ottimo della funzione obiettivo duale è pari a 8880. Quindi il Teorema della Dualità Forte è verificato.

Scriviamo, ora, le condizioni di complementarità:

$$\begin{aligned} x_1^\star(3u_1^\star + 4u_2^\star + 2u_3^\star - 24) &= 0 \\ x_2^\star(2u_1^\star + u_2^\star + u_3^\star - 14) &= 0 \\ u_1^\star(1200 - 3x_1^\star - 2x_2^\star) &= 0 \\ u_2^\star(1000 - 4x_1^\star - x_2^\star) &= 0 \\ u_3^\star(700 - 2x_1^\star - x_2^\star) &= 0 \end{aligned}$$

Si verifica immediatamente che tali condizioni sono soddisfatte. Si osservi che tutte le equazioni tranne l'ultima sono verificate in quanto si annulla il secondo dei due fattori moltiplicativi. Questo significa, in particolare, che il primo e il secondo vincolo del problema primale sono attivi nella soluzione ottima, cioè verificati all'uguaglianza. L'ultima equazione invece è verificata per il fatto che è nulla all'ottimo la variabile duale $u_3^\star$ mentre il vincolo corrispondente primale (cioè il terzo vincolo del problema primale) non è verificato all'uguaglianza. Infatti in corrispondenza della soluzione ottima il valore ottenuto è $2x_1^\star + x_2^\star = 680$. Poiché la disponibilità di ore lavorative è pari a 700 ore, si hanno ancora 20 ore disponibili (surplus). Quindi l'industria, per aumentare il profitto, potrebbe acquistare altre quantità di ingredienti grezzi e quindi aumentare la disponibilità settimanale di questi ingredienti e utilizzare le ore di lavorazione ancora rimaste disponibili. Poiché i valori all'ottimo della funzione obiettivo primale e della funzione obiettivo duale coincidono e poiché la funzione obiettivo duale è

$$1200u_1 + 1000u_2 + 700u_3,$$

essendo $u_1^\star = 6.4$, $u_2^\star = 1.2$, $u_3^\star = 0$, l'aumento di 1 Kg della disponibilità di ingrediente $\mathbf{I_1}$ (da 1200 a 1201 Kg) porta ad un incremento di 6.4 Euro nel profitto complessivo. Analogamente per l'ingrediente $\mathbf{I_2}$: un incremento di 1 Kg (da 1000 a 1001 Kg) porta ad un incremento del profitto complessivo di 1.2 Euro. Questo è il motivo per cui le variabili duali sono anche chiamate *prezzi ombra* e determinano il *valore marginale* delle risorse. Essi rappresentano, di fatto, il prezzo massimo che si è disposti a pagare una unità di risorsa aggiuntiva. Ovviamente il fatto che $u_3^\star = 0$ significa che l'aumento della disponibilità di ore lavorative non porta a nessun incremento del profitto, ma questo è ovvio in quanto ore lavorative inutilizzate sono già disponibili.

Nell'ipotesi che, ad esempio, si possa incrementare la disponibilità di una sola delle risorse, naturalmente esaminando i prezzi ombra, si deduce che conviene aumentare la disponibilità dell'ingrediente $\mathbf{I_1}$ che porta ad un maggiore incremento del profitto complessivo.

Si osservi che il fatto che ad un incremento pari a δ nel termine noto del primo vincolo corrisponda un incremento pari a 6.4δ nel valore ottimo della funzione obiettivo, è valido fin tanto che la variabile duale all'ottimo $u_1^\star$ associata al primo vincolo rimane pari al valore 6.4. Infatti, ovviamente la variazione del termine noto del vincolo corrispondente alla disponibilità dell'ingrediente $\mathbf{I_1}$ porta anche ad un cambiamento nella formulazione del problema duale: infatti un cambiamento nel termine noto di un vincolo primale corrisponde ad un cambiamento in un coefficiente della funzione obiettivo del problema duale. Pertanto c'è la possibilità che se la variazione è ampia, cambi il punto di ottimo del problema duale e quindi, in particolare, cambi il prezzo ombra $u_1^\star$ associato al primo vincolo. In questo caso, naturalmente, la variazione del valore del valore della funzione obiettivo all'ottimo non può essere piú proporzionale al valore 6.4.

Come visto nell'esempio precedente, in generale, le variabili duali (i prezzi ombra) rappresentano l'effetto di cambiamenti nel termine noto dei vincoli. Si consideri, infatti un generico problema di Programmazione Lineare (in forma standard) (P), il suo duale (D) ed inoltre si consideri il problema (P_Δ) ottenuto modificando il termine noto da b a $b+\Delta$ (con $\Delta \in \mathbb{R}^m$) e il corrispondente problema duale (D_Δ):

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad (\mathrm{D}) \quad \begin{cases} \max b^T u \\ A^T u \leq c \end{cases}$$

$$(\mathrm{P}_\Delta) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b + \Delta \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad (\mathrm{D}_\Delta) \quad \begin{cases} \max (b+\Delta)^T u \\ A^T u \leq c \end{cases}$$

Siano $x^\star$ e $u^\star$ rispettivamente la soluzione ottima del problema (P) e del problema (D). Siano inoltre $x^\star(\Delta)$ e $u^\star(\Delta)$ rispettivamente la soluzione del problema (P_Δ) e del problema (D_Δ)

Dalle formulazioni di questi problemi si possono facilmente dedurre due osservazioni:

- la variazione del termine noto b nel problema primale si riflette in un cambiamento dei coefficienti della funzione obiettivo del problema duale;
- la regione ammissibile del problema (D) e del problema (D_Δ) sono uguali; da questo segue che se $u^\star \in \mathbb{R}^m$ è soluzione ottima del problema (D) allora $u^\star$ è ammissibile per il problema (D_Δ), ma non necessariamente è ottima per (D_Δ).

Inoltre per il Teorema della dualità forte applicato alla coppia primale–duale (P)–(D) deve essere

$$c^T x^\star = b^T u^\star, \tag{5.1.1}$$

mentre, sempre per il Teorema della dualità forte ma applicato alla coppia primale–duale (P_Δ)–(D_Δ) deve essere

$$c^T x^\star(\Delta) = (b + \Delta)^T u^\star(\Delta). \tag{5.1.2}$$

Se la soluzione ottima $x^\star$ soddisfa un'opportuna ipotesi (cioè che in $x^\star$ non ci siano più di n vincoli attivi) e se il vettore Δ ha componenti "sufficientemente" piccole allora si può dimostrare che:

$$u^\star(\Delta) = u^\star. \tag{5.1.3}$$

Utilizzando la (5.1.1), la (5.1.2) e la (5.1.3) si ha:

$$c^T x^\star(\Delta) = b^T u^\star + \Delta^T u^\star = c^T x^\star + \Delta^T u^\star, \tag{5.1.4}$$

che può essere riscritta nella seguente forma:

$$c^T x^\star(\Delta) - c^T x^\star = \Delta_1 u_1^\star + \Delta_2 u_2^\star + \ldots + \Delta_m u_m^\star, \tag{5.1.5}$$

dove $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_m)^T$.
Dalla precedente relazione segue che una possibile interpretazione della variabile duale $u_i^\star$ è quella di essere un prezzo associato ad un incremento unitario del termine noto b_i. Per questa ragione le variabili duali $u_i^\star$, $i = 1, \ldots, m$, vengono denominate *prezzi ombra*. Sebbene la (5.1.3) (e di conseguenza la (5.1.5)) valga solamente sotto opportune ipotesi, in molte situazioni pratiche, le variabili duali $u_i^\star$, $i = 1, \ldots, m$, forniscono delle utili indicazioni su quale componente b_i variare per migliorare il valore ottimo della funzione obiettivo.

Si consideri, ora (come nell'Esempio 5.1.1) la variazione del termine noto di un solo vincolo che si ottiene prendendo $\Delta = \delta e_i$ (dove $e_i \in \mathbb{R}^m$ è il vettore con l'i-esima componente uguale a 1 e le altre componenti nulle). In questo caso, naturalmente ad una variazione del termine noto dell'i-esimo vincolo corrisponde una variazione del valore della funzione obiettivo pari a $\delta u_i^\star$. Nell'esempio precedente era stato infatti osservato come una variazione di δ effettuata nel termine noto del primo vincolo porta ad una variazione della funzione obiettivo pari a $u_1^\star \delta = 6.4\delta$. Si deve tuttavia ribadire un fatto molto importante: l'interpretazione delle variabili duali come prezzi ombra e quindi come strumento per valutare la variazione del valore della funzione obiettivo al variare del termine noto di un vincolo a partire da una soluzione ottima è vera *solamente per piccole variazioni* del termine noto; esiste cioè un intervallo entro il quale δ deve rimanere.
Esula dallo scopo di queste note la motivazione teorica dettagliata della validità dell'interpretazione data delle variabili duali, a partire da una soluzione ottima, come prezzi ombra rappresentanti i *valori marginali* dei termini noti dei vincoli solo per piccole perturbazioni di questi termini noti ed anche la determinazione dell'intervallo $[\delta_l, \delta_u]$ in cui può variare δ rimanendo valida tale l'interpretazione.

Si riporta tuttavia di seguito un esempio geometrico di questa interpretazione delle variabili duali che dovrebbe chiarire, almeno in un caso particolare, quanto illustrato in precedenza.

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \max 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + 4x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{5.1.6}$$

Si verifica facilmente che i prezzi ombra associati ai vincoli sono rispettivamente $u_1^\star = 1$, $u_2^\star = 1$ e $u_3^\star = 0$. Questi possono naturalmente essere ricavati scrivendo il problema duale del problema dato

$$\begin{cases} \min 4u_1 + 5u_2 - 2u_3 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 3 \\ u_1 + u_2 - 4u_3 \geq 2 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

e determinandone la soluzione ottima. Geometricamente si può determinare facilmente la soluzione ottima del problema assegnato (primale) (5.1.6) che risulta essere nel punto $P(1,3)$ a cui corrisponde un valore ottimo della funzione obiettivo pari a 9 (Figura 5.1.1).
Ora, consideriamo il primo vincolo $x_1 + x_2 \leq 4$ e facciamo variare di un valore $\delta = 0.5$ il termine noto che passa da 4 a 4.5; rappresentando geometricamente il nuovo vincolo $x_1 + x_2 \leq 4.5$ si determina la nuova regione ammissibile del problema in cui il segmento $\overline{PQ}$ è mutato nel segmento $\overline{P'Q'}$. Il punto di ottimo del nuovo problema è $P'(0.5, 4)$ e corrispondentemente risulta un incremento del valore della funzione obiettivo proporzionale al valore del prezzo ombra $u_1^\star = 1$ associato al primo vincolo cioè dato da $u_1^\star\delta$, cioè pari a 0.5: infatti il valore ottimo passa da 9 a 9.5. È facile verificare che il cambiamento effettuato nel termine noto non ha fatto variare il punto di ottimo del problema duale, cioè i costi ombra sono rimasti invariati.
Se si continua a rilassare il vincolo considerato facendolo diventare $x_1 + x_2 \leq 5$, considerando la nuova regione ammissibile così ottenuta, si osserva che il segmento $\overline{PQ}$ degenera in un punto $Q'' = P''(0,5)$ con conseguente incremento proporzionale del valore della funzione obiettivo nel nuovo punto di ottimo dove è pari a 10. (Nemmeno con questa variazione si è avuto un cambiamento nei prezzi ombra.) Come si deduce facilmente dalla rappresentazione geometrica, non ci sarà nessun effetto nell'incrementare ulteriormente il termine noto del primo vincolo, in quanto il punto soluzione continuerà a rimanere $Q'' = P''$. Quindi la limitazione superiore alla variazione del δ in questa caso risulta pari a $\delta_u = 1$.

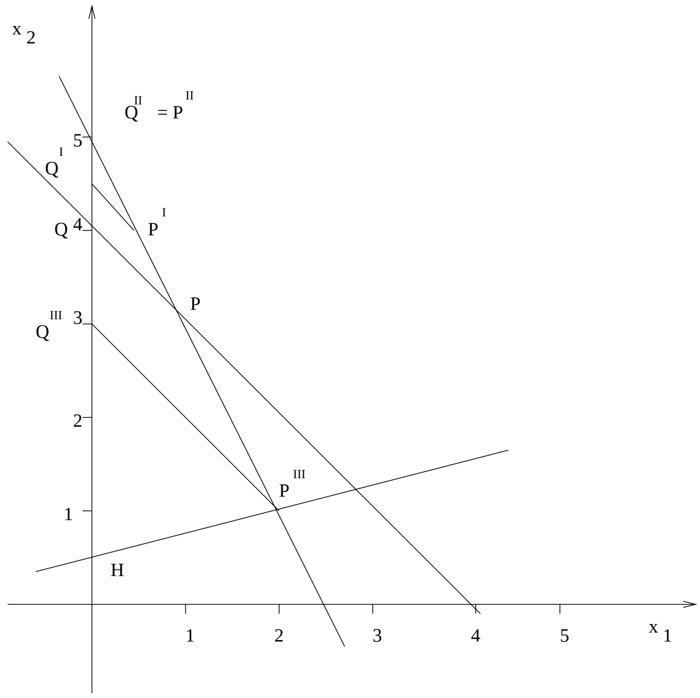

Fig. 5.1.1 Rappresentazione geometrica del problema (5.1.6)

Se invece si diminuisce il termine noto del vincolo $x_1 + x_2 \leq 4$, la regione ammissibile progressivamente muta fino a che il segmento $\overline{PQ}$ coincide con $\overline{P'''Q'''}$ e questo accade quandoil valore il termine noto del vincolo è pari a 3. In corrispondenza di questo valore il punto di ottimo è $P'''(2, 1)$ a cui corrisponde un valore della funzione obiettivo pari a 8. Anche in questo caso la variazione ha lasciato invariato i prezzi ombra.

Fino al raggiugimento del valore 3 nel termine noto del vincolo considerato, ognidecrescita di questo termine noto porta ad un decremento della funzione obiettivo proporzionale ad prezzo ombra associato ($u_1^\star = 1$). Il valore 3 assunto dal termine noto del vincolo sembra essere un "valore di soglia" al di sotto del quale la funzione obiettivo decrescerà con una "rapidità" completamente diversa; infatti dalla rappresentazione geometrica si deduce facilmente che la situazione cambia drasticamente al di sotto di questo valore e la rapidità di decrescita non è prevedibile a partire dalla conoscenza della soluzione ottima P. Si verifica infatti che, ad esempio, variando il termine noto considerato dal valore 3 al valore 2.5, il valore ottimo della funzione obiettivo passa dal valore 8 al valore 6.6 e i prezzi ombra sono mutati in $u^\star = (2.8, 0, 0.2)$.

Geometricamente si può verificare ciò osservando come al variare del termine noto del primo vincolo dal valore 3 al valore 5, i corrispondenti punti di ottimo appartengono alsegmento $\overline{P''P'''}$ mentre per valori inferiori al valore 3 i punti corripsondenti di ottimo appartengono al segmento $\overline{HP'''}$. Quindi il valore della limitazione inferiore dell'intervallo di variabilità di δ può essere considerata $\delta_l = -1$. Quindi l'intervallo ammesso perché le considerazioni fatte sui prezzi ombra valgano, in questo caso è l'intervallo $[\delta_l, \delta_u] = [-1, 1]$.

Si evince quindi che volendo disegnare il grafico del valore ottimo del profitto al variare del termine noto di un vincolo, i prezzi ombra rappresentano i coefficienti angolari delle rette che rappresentano queste variazioni. Il grafico complessivo del valore ottimo del profitto al variare del termine noto di un vincolo è quindi una curva *lineare a tratti convessa* nel caso di problema di massimizzazione, *concava* nel caso di problemi di minimizzazione. I punti nodali di questa funzione lineare a tratti rappresentano i punti in cui si verifica il cambio del prezzo ombra.

Queste considerazioni qui dedotte solo in modo geometrico fanno parte della cosiddetta *analisi post-ottimale.* Un altro scopo di questo tipo di analisi è quello di indagare la *"sensibilità"* del modello al variare dei del termine noto dei vincoli; questo rientra nella cosiddetta *analisi della sensibilità* che affronta lo studio di come varia la soluzione ottima di un problema al variare oltre che dei termini noti dei vincoli, anche al variare dei coefficienti di costo della funzione obiettivo, oppure aggiungendo nuove variabili o nuovi vincoli. Ovviamente una trattazione rigorosa di queste problematiche esula dallo scopo di queste note e perciò si rimanda ai testi di approfondimento specifici.

5.2 INTERPRETAZIONE DEL PROBLEMA DUALE PER ALCUNI MODELLI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

5.2.1 Il duale del problema di allocazione ottima di risorse

Si consideri nuovamente il semplice problema di allocazione ottima dell'Esempio 3.4.1 che è rappresentato dal seguente problema di Programazione Lineare:

$$\begin{cases} \max\,(7x_1 + 10x_2) \\ x_1 + x_2 \leq 750 \\ x_1 + 2x_2 \leq 1000 \\ x_2 \leq 400 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{5.2.1}$$

Ricordiamo che le variabili x_1 e x_2 sono associate rispettivamente ai quantitativi di colorante **C1** e **C2** da produrre e che la produzione avviene utilizzando tre preparati base **P1**, **P2** e **P3** dei quali si ha una disponibilità massima rispettivamente pari a 750, 1000 e 400 ettogrammi. Supponiamo, ora di voler sottrarre preparati base dalla produzione dei coloranti per venderli direttamente. Indichiamo con u_1, u_2 e u_3 i prezzi associati rispettivamente alla vendita diretta di un ettogrammo di preparato base **P1**, **P2** e **P3**. Supponendo di destinare tutti i preparati alla vendita diretta, il profitto che si otterrebbe sarebbe

$$750u_1 + 1000u_2 + 400u_3. \tag{5.2.2}$$

Naturalmente si vorrà fare in modo che questa operazione di sottrazione dei preparati base dalla produzione dei coloranti e vendita diretta risulti economicamente conveniente e quindi mentre si vuole minimizzare l'espressione (5.2.2) affinché i prezzi di vendita risultino competitivi sul mercato, si imporrà che il profitto ottenuto vendendo direttamente i quantitativi di preparato base necessario per ottenere un litro di colorante sia maggiore o uguale del profitto associato alla vendita di un litro di colorante stesso; quindi, utilizzando i dati del problema riportati nella tabella dell'Esempio 3.4.1, si deve imporre che risulti

$$u_1 + u_2 \geq 7$$

per quanto riguarda il colorante **C1** e

$$u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 10$$

per quanto riguarda il colorante **C2** e naturalmente deve essere $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$ e $u_3 \geq 0$. Quindi il modello lineare che rappresenta l'operazione sopra descritta è il seguente:

$$\begin{cases} \min\,(750u_1 + 1000u_2 + 400u_3) \\ u_1 + u_2 \geq 7 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 10 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0. \end{cases}$$

Esaminando questo problema si vede immediatamente che esso rappresenta il *problema duale* del problema dato (5.2.1).

In generale, se si considera un generico problema di allocazione ottima di m risorse $\mathbf{R_i}$, $i = 1, \dots, m$ con la possibilità di fabbricare n prodotti $\mathbf{P_j}$, $j = 1, \dots, n$, come abbiamo già esaminato nel capitolo precedente si può formulare questo problema come

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{5.2.3}$$

dove ricordiamo $x \in \mathbb{R}^n$ è il vettore avente per componenti i livelli di produzione di ciascuno dei prodotti, $c \in \mathbb{R}^n$ il vettore dei profitti netti e $b \in \mathbb{R}^m$ il vettore delle disponibilità massima di ciascuna delle risorse.
Supponiamo ora di voler sottrarre risorse alla produzione per venderle direttamente e siano u_i, $i = 1, \dots, m$ i prezzi unitari associati alla vendita dell'i-esima risorsa. Supponendo che per ciascuna risorsa si voglia destinare alla vendita una

quantità pari alla disponibilità massima di quella risorsa, si ottiene un profitto pari a

$$b_1u_1 + b_2u_2 + \cdots + b_mu_m.$$

Per rendere competitivi sul mercato i prezzi unitari u_i da assegnare alle risorse vendute direttamente, si vogliono scegliere i valori piú bassi possibile per le u_i, ma naturalmente, affinché questa operazione di vendita diretta in luogo della fabbricazione dei prodotti risulti conveniente si deve imporre che il profitto ottenuto vendendo direttamente le risorse necessarie per fabbricare un prodotto sia maggiore o uguale al profitto che si ricaverebbe dalla vendita del prodotto finito. Quindi per ogni prodotto, si deve imporre che valga

$$\begin{array}{cccc} a_{11}u_1+ & \dots & +a_{m1}u_m & \geq c_1 \\ a_{12}u_1+ & \dots & +a_{m2}u_m & \geq c_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{1n}u_1+ & \dots & +a_{mn}u_m & \geq c_n \end{array}$$

con $u_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$ e dove le quantità a_{ij} rappresentano la quantità di risorsa $\mathbf{R_i}$ necessaria per fabbricare una unità di prodotto $\mathbf{P_j}$.

Quindi il problema da risolvere può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} \min b^T u \\ A^T u \geq c \\ u \geq 0 \end{cases}$$

che è il problema duale del problema (5.2.3).

5.2.2 Il duale del problema di miscelazione

Si consideri il problema di miscelazione dell'Esempio 3.4.12 che è rappresentato dal seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{cases} \min(400x_1 + 600x_2) \\ 140x_1 \geq 70 \\ 20x_1 + 10x_2 \geq 30 \\ 25x_1 + 50x_2 \geq 75 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ricordiamo che le variabili x_1 e x_2 rappresentano le quantità di polpa di frutta e di dolcificante da utilizzare nella produzione del succo di frutta che deve avere come requisito un contenuto minimo di 70 mg di vitamina C, 30 mg di sali minerali e 75 grammi di zucchero. Supponiamo ora che un'industria farmaceutica venda compresse di nutrimenti puri, cioè compresse di vitamina C, di sali minerali e di zucchero e che vuole immettere queste compresse su un ipotetico mercato come offerta sostitutiva al succo di frutta per l'acquisizione di vitamina C, di sali minerali e di zucchero. Naturalmente questa industria farmaceutica vuole massimizzare il profitto ricavato dalla vendita delle compresse, ma al tempo stesso deve dare un prezzo alle compresse tale da essere competitiva. Siano allora u_1, u_2 e u_3 i prezzi di vendita rispettivamente di 1 mg di vitamina C, di 1 mg di sali minerali e di 1 grammo di zucchero; supponendo che la vendita di questi nutrimenti puri sia pari ai fabbisogni minimi (cioè a 70 mg di vitamina C, a 30 mg di sali minerali e a 75 grammi di zucchero), l'espressione del profitto dell'industria farmaceutica che dovrà essere massimizzata è

$$70u_1 + 30u_2 + 75u_3.$$

Affinché i prezzi di vendita dei componenti puri in compresse fissati dall'industria siano concorrenziali, si deve imporre che il costo unitario dei nutrimenti puri sia minore o uguale al prezzo che si dovrebbe pagare per avere la stessa quantità di componente attraverso gli ingredienti del succo di frutta, cioè dalla polpa di frutta e dal dolcificante. Quindi si devono imporre i seguenti vincoli

$$\begin{aligned} 140u_1 + 20u_2 + 25u_3 &\leq 400 \\ 10u_2 + 50u_3 &\leq 600. \end{aligned}$$

Inoltre dovrà essere $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$, $u_3 \geq 0$.

Quindi il problema complessivo formulato dall'industria farmaceutica è

$$\begin{cases} \max(70u_1 + 30u_2 + 75u_3) \\ 140u_1 + 20u_2 + 25u_3 \leq 400 \\ 10u_2 + 50u_3 \leq 600 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0 \end{cases}$$

che è il problema duale del problema di miscelazione considerato.

In generale, consideriamo un generico problema di miscelazione in cui si hanno n sostanze $\mathbf{S_j}$, $j = i, \dots, n$ ciascuna delle quali contiene una quantità a_{ij} di componente utile $\mathbf{C_i}$, $i = 1, \dots, m$. Come abbiamo già esaminato nel capitolo precedente un problema di miscelazione di questo tipo si può formulare come

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{5.2.4}$$

dove ricordiamo che $x \in \mathbb{R}^n$ è il vettore avente per componenti le quantità di ciascuna sostanza da introdurre nella miscela, $c \in \mathbb{R}^n$ il vettore dei costi unitari delle sostanze, $b \in \mathbb{R}^m$ il vettore dei requisiti minimi di componenti utili da introdurre nella miscela, e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice i cui elementi sono le a_{ij}.

Supponiamo ora che un'industria sia in grado di fornire componenti utili allo stato puro e che voglia immettere sul mercato questi componenti utili e siano u_i,

$i = 1, \dots, m$ i prezzi unitari da assegnare a ciascuno di essi. Supponendo che la richiesta del mercato sia pari ai fabbisogni minimi della miscela, cioè per ciascun componente pari a b_i, il profitto totale dell'industria che vende i componenti utili allo stato puro è

$$b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots + b_m u_m.$$

Inoltre, affinché i prezzi u_i assegnati dall'industria ai componenti puri siano concorrenziali, si deve imporre che il costo dei componenti puri sia minore o uguale al prezzo che dovrebbe pagare per avere la stessa quantità di componente ottenuto attraverso le sostanze e quindi deve valere

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \le c_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Inoltre si deve imporre $u_i \ge 0$, $i = 1, \dots, m$.

Quindi il problema formulato si può scrivere nella forma

$$\begin{cases} \max b^T u \\ A^T u \le c \\ u \ge 0 \end{cases}$$

che è immediato verificare essere il problema duale del problema di miscelazione assegnato (5.2.4).

5.2.3 Il duale del problema dei trasporti

Si consideri il problema di trasporto dell'Esempio 3.4.17 che è rappresentato dal seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{cases} \min\,(10x_{11} + 8x_{12} + 21x_{13} + 12x_{21} + 20x_{22} + 14x_{23}) \\ \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 130 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 200 \\ x_{11} + x_{21} = 80 \\ x_{12} + x_{22} = 100 \\ x_{13} + x_{23} = 150 \\ \\ x_{11} \ge 0, \quad x_{12} \ge 0, \quad x_{13} \ge 0, \quad x_{21} \ge 0, \quad x_{22} \ge 0, \quad x_{23} \ge 0. \end{cases}$$

dove le x_{ij} rappresentano rispettivamente la quantità di minerale (in tonnellate) da trasportare giornalmente da ciascuna miniera $\mathbf{M}_i$ a ciascun impianto $\mathbf{P}_j$. Ricordiamo inoltre che la disponibilità giornaliera di minerale presso le due miniere è rispettivamente di 130 e 200 tonnellate, mentre le richieste giornaliere di minerale presso i tre impianti sono rispettivamente di 80, 100 e 150 tonnellate.

Supponiamo ora che una compagnia specializzata in trasporto di minerali (esterna all'industria) voglia proporsi all'industria dell'acciaio per effettuare il trasporto di minerale dalle miniere agli impianti. Naturalmente la compagnia di trasporti, per convincere l'industria dell'acciaio ad avvalersi del servizio di trasporto esterno, dovrà proporre dei prezzi di trasporto vantaggiosi. A tale scopo la compagnia dei trasporti propone all'industria di prelevare una tonnellata di minerale da ciascuna dei delle due miniere per un prezzo unitario (in euro) rispettivamente pari a u_1 e u_2 e di consegnare una tonnellata di minerale a ciascuno dei tre impianti per un prezzo unitario (in euro) rispettivamente pari a v_1, v_2 e v_3. Quindi la compagnia dei trasporti vorrà massimizzare la funzione che fornisce il suo profitto complessivo che è data da

$$130u_1 + 200u_2 + 80v_1 + 100v_2 + 150v_3.$$

Tuttavia affinché l'offerta della compagnia dei trasporti risulti vantaggiosa per l'industria dell'acciaio i prezzi del traporto proposti dovranno risultare non superiori a quelli che l'industria avrebbe effettuando in proprio i trasporti stessi. Quindi dovrà risultare

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &\le 10 \\ u_1 + v_2 &\le 8 \\ u_1 + v_3 &\le 21 \\ u_2 + v_1 &\le 12 \\ u_2 + v_2 &\le 20 \\ u_2 + v_3 &\le 14. \end{aligned}$$

Quindi, la compagnia dei trasporti dovrà risolvere il problema

$$\begin{cases} \max & (130u_1 & + & 200u_2 & + & 80v_1 & + & 100v_2 & + & 150v_3) & & \\ u_1 & + & & & & v_1 & & & & & \le & 10 \\ u_1 & + & & & & & & v_2 & & & \le & 8 \\ u_1 & + & & & & & & & & v_3 & \le & 21 \\ & & & u_2 & + & v_1 & & & & & \le & 12 \\ & & & u_2 & + & & & v_2 & & & \le & 20 \\ & & & u_2 & + & & & & & v_3 & \le & 14 \end{cases}$$

che si verifica immediatamente essere il problema duale del problema dei trasporti assegnato.

In generale, consideriamo ora un generico problema dei trasporti già esaminato nel capitolo precedente. Supponiamo che un'azienda voglia provvedere in proprio ad effettuare il trasporto di materiali e che quindi cerchi di risolvere il problema dei trasporti (3.4.4) cioè

$$\begin{cases} \min \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \right) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, \dots, m \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m \end{cases} \tag{5.2.5}$$

dove, ricordiamo, che le c_{ij} rappresentano il costo del trasporto dall'origine i alla destinazione j, le a_i le disponibilità all'i-esima origine e le b_j le richieste alla j-esima destinazione.

Supponiamo, ora che una compagnia che esegue trasporti voglia proporsi a questa azienda, come alternativa vantaggiosa all'effettuazione dei trasporti in proprio; a tale scopo questa compagnia propone all'azienda di prelevare un'unità di prodotto dall'origine i per un prezzo unitario u_i e di consegnare una unità di prodotto alla destinazione j per un prezzo unitario v_j. Per assicurare che i suoi prezzi siano competitivi rispetto a quelli che l'azienda avrebbe effettuando i trasporti in proprio, la compagnia di trasporti deve fare sì che risulti

$$u_i + v_j \leq c_{ij}$$

per ogni $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. D'altra parte la compagnia di trasporti vuole scegliere i prezzi da proporre $u_1, \dots, u_m$ e $v_1, \dots, v_n$ in modo da massimizzare il suo profitto complessivo. Poiché le quantità a_i e b_j di prodotto rispettivamente disponibili all'origine i e richieste alla destinazione j sono note alla compagnia di trasporti, questa cercherà di massimizzare la funzione

$$\max \left(\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \right).$$

Quindi il problema che la compagnia di trasporti formula per determinare quali prezzi u_i e v_j proporre all'azienda è il seguente

$$\begin{cases} \max \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \right) \\ u_i + v_j \leq c_{ij} \qquad i = 1, \dots, m, \qquad j = 1, \dots, n \end{cases} \tag{5.2.6}$$

che è il problema duale del problema dei trasporti (5.2.5).

6

Esempi di modelli assegnati agli esami

Modello 6.1 *Un'industria produce 4 differenti prodotti P1, P2, P3, P4 ciascuno dei quali deve essere lavorato in tutti i suoi 3 reparti.*
La tabella che segue riporta la richiesta di manodopera in ore lavorative per ogni unità di prodotto in ciascuno dei 3 reparti. Nella tabella sono anche riportati i profitti per unità di prodotto (in euro) stimati dall'industria per ogni prodotto.

	P1	P2	P3	P4
Reparto 1	3	6	5	3
Reparto 2	3	2	9	1
Reparto 3	2	1	0.7	0.5
profitti	300	600	1300	800

La tabella che segue riporta il massimo numero di ore settimanali disponibili per ciascuno dei 3 reparti.

	Rep.1	Rep.2	Rep.3
max numero ore	240	320	240

Per ragioni legate al mercato se si decide di produrre un prodotto di tipo P1 o P2 allora si deve produrre anche almeno uno dei prodotti P3 o P4.
Formulare un modello lineare che permetta di pianificare la produzione settimanale di questa industria in modo da massimizzare il profitto globale.

Formulazione

- x_i := numero di prodotti di tipo Pi.
- δ := variabile booleana indicatrice della relazione $x_1 + x_2 > 0$

$$
\begin{aligned}
\max\ & 300x_1 + 600x_2 + 1300x_3 + 800x_4 \\
& 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 240 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 9x_3 + x_4 \leq 320 \\
& 2x_1 + x_2 + 0.7x_3 + 0.5x_4 \leq 240 \\
& x_1 + x_2 \leq M\delta \\
& x_3 + x_4 \geq \varepsilon\delta \\
& x_i \geq 0, \qquad i = 1, \dots, 4
\end{aligned}
$$

Modello 6.2 *L'ufficio personale di un ipermercato deve pianificare la turnazione del personale addetto alle case durante i giorni feriali. In base a specifici accordi sindacali, l'azienda può disporre solo di impiegati con contratti da 6 ore giornaliere. Esistono 5 tipologie di contratto (T1, T2, T3, T4 e T5) che si distinguono per il numero di ore lavorative e per i turni ricoperti. In particolare*

- *il contratto T1 prevede un turno lavorativo di 3 ore dalle 9:00 alle 12:00 ed un secondo turno dalle 15:00 alle 18:00 ed una retribuzione di 20 euro/ora;*
- *il contratto T2 prevede un turno lavorativo di 3 ore dalle 12:00 alle 15:00 ed un secondo turno dalle 18:00 alle 21:00 ed una retribuzione di 40 euro/ora;*
- *il contratto T3 prevede un unico turno lavorativo dalle 9:00 alle 15:00 ed una retribuzione di 30 euro/ora;*
- *il contratto T4 prevede un unico turno lavorativo dalle 15:00 alle 21:00 ed una retribuzione di 35 euro/ora;*

Sapendo che dalle 9:00 alle 12:00 devono essere aperte almeno 10 casse, dalle 12:00 alle 15:00 almeno 20, dalle 15:00 alle 18:00 almeno 15 e, per finire, dalle 18:00 alle 21:00 devono essere aperte almeno 4 casse, formulare un problema di PL che consenta pianificare in maniera ottima la turnazione del personale tenendo conto che non si vogliono utilizzare più di tre tipologie di contratti e che per ogni tipologia contratto usata vengono assunti almeno due impiegati e non di più di venti.

Formulazione

- x_i := numero impiegati assunti con contratto di tipo i.
- δ_i := variabile booleana indicatrice dell'uso del contratto di tipo i

$$
\begin{aligned}
\min\ & 20x_1 + 40x_2 + 30x_3 + 35x_4 \\
& x_1 + x_3 \geq 10 \\
& x_2 + x_3 \geq 20 \\
& x_1 + x_4 \geq 15 \\
& x_2 + x_4 \geq 4 \\
& x_i \leq 20\delta_i \qquad i = 1, \dots, 4 \\
& x_i \geq 2\delta_i \qquad i = 1, \dots, 4 \\
& x_i \geq 0, \qquad i = 1, \dots, 4 \\
& \sum_{i=1}^{4} \delta_i \leq 3
\end{aligned}
$$

Modello 6.3 *Si devono rifornire tre centri commerciali con dei podotti che in 4 magazzini diversi, Nella tabella di seguito sono riassunti la distanza (Km) tra i magazzini ed i centri commerciali, nonchè i tempi (in ore) necessari a percorrere un chilometro da parte dei mezzi provenienti da ciascun magazzino:*

	centro comm. 1	*centro comm. 2*	*centro comm. 1 3*	*tempi*
magazzino 1	*10*	*15*	*50*	*0.1*
magazzino 2	*12*	*20*	*40*	*0.2*
magazzino 3	*15*	*35*	*60*	*0.15*
magazzino 4	*20*	*40*	*45*	*0.25*

A ciascun centro commerciale è necessario un numero minimo di prodotti:

	centro comm. 1	*centro comm. 2*	*centro comm. 3*
n^o prodotti	*38*	*30*	*24*

mentre da ogni magazzino può essere fornito al più il seguente numero di prodotti:

	magazzino 1	*magazzino 2*	*magazzino 3*	*magazzino 4*
n^o prodotti	*30*	*35*	*40*	*25*

Si costruisca un modello di PL che verifichi le specifiche assegnate minimizzando i tempi di trasporto. Si risolva il problema considerando anche gli ulteriori vincoli che dal magazzino 3 si può inviare prodotti solamente a due centri commerciali su tre ed al centro commerciale 1 possono arrivare prodotti da solamente tre magazzini su quattro.

Formulazione

- x_{ij} := numero mandati dal magazzino i al centro commerciale j;
- δ_{3j} := variabile booleana indicatrice dell'invio del materiale dal magazzino 3 al centro commerciale j;
- $\tilde{\delta}_{i1}$:= variabile booleana indicatrice dell'invio del materiale dal magazzino i al centro commerciale 1.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 0.1(10x_{11} + 15x_{12} + 50x_{13}) + 0.2(12x_{21} + 20x_{22} + 40x_{23}) \\
& \quad +0.15(15x_{31} + 35x_{32} + 60x_{33}) + 0.25(20 + x_{41} + 40x_{42} + 45x_{43}) \\
& x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 30 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 35 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 40 \\
& x_{41} + x_{42} + x_{43} \leq 25 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \geq 38 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \geq 30 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \geq 24 \\
& x_{3j} \leq M\delta_{3j} \qquad j = 1, \dots, 3 \\
& x_{i1} \leq M\tilde{\delta}_{i1} \qquad i = 1, \dots, 4 \\
& \sum_{j=1}^{3} \delta_{3j} \leq 2 \\
& \sum_{i=1}^{4} \tilde{\delta}_{i1} \leq 3 \\
& x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, 3
\end{aligned}
$$

Modello 6.4 *Si hanno a dispozione due macchine in grado di effetuare le lavorazioni per produrre tre prodotti diversi. Le macchine hanno un numero massimo di ore giornaliere di funzionamento superate le quali si devono spegnere per farle raffreddare.*

Nella tabella di seguito sono riassunti:

- *i tempi (in ore) necessari per produrre una unità di prodotto da parte di una macchina;*
- *i tempi massimi di funzionamento delle macchine complessive in una settimana lavorativa;*
- *prezzi unitari di vendita dei vari prodotti;*
- *numero massimo di prodotti da realizzare in una settimana.*

	Tempi di produzione			ore settimanali
	Prodotto 1	Prodotto 2	Prodotto 3	max
Macchina 1	2	3	1	30
Macchina 2	3	1	4	40
prezzo	8	7	6	
numero max. pezzi	10	30	20	

Si costruisca un modello di PL che massimizzi i guadagni settimanali rispettando i vincoli derivanti dal limite dal massimo numero di ore delle due macchine e dal limite massimo di pezzi da produrre. Il modello dove anche esprimere l'esigenza di usare solamente un una sola macchina e la richiesta di produrre solamente due prodotti su tre.

Prima formulazione

- x_{ij} := numero prodotti di tipo i realizzato dalla macchina j;
- δ_i := variabile booleana indicatrice che si produce il prodotto i;
- $\tilde{\delta}$:= variabile booleana indicatrice dell'utilizzo della prima macchina 1.

$$
\begin{aligned}
\max\ \ & 8(x_{11} + x_{12}) + 7(x_{21} + x_{22}) + 6(x_{31} + x_{32}) \\
& 2x_{11} + 3x_{21} + 1x_{31} \le 30\tilde{\delta} \\
& 3x_{12} + 1x_{22} + 4x_{32} \le 40(1 - \tilde{\delta}) \\
& x_{11} + x_{12} \le 10\delta_1 \\
& x_{21} + x_{22} \le 30\delta_2 \\
& x_{31} + x_{32} \le 20\delta_3 \\
& \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \le 2 \\
& x_{ij} \ge 0, \qquad i = 1, \dots, 3, \quad j = 1, \dots, 2 \\
& \tilde{\delta} = \{0, 1\} \\
& \delta_i = \{0, 1\} \qquad i = 1, \dots, 3.
\end{aligned}
$$

Seconda formulazione

- x_i := numero prodotti di tipo i realizzati;
- δ_i := variabile booleana indicatrice che si produce il prodotto i;
- $\tilde{\delta}$:= variabile booleana indicatrice dell'utilizzo della prima macchina 1.

$$
\begin{aligned}
\max\ \ & 8x_1 + 7x_2 + 6x_{31} \\
& 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 \le 30 + M\tilde{\delta} \\
& 3x_1 + 1x_2 + 4x_3 \le 40 + M(1 - \tilde{\delta}) \\
& x_1 \le 10\delta_1 \\
& x_2 \le 30\delta_2 \\
& x_3 \le 20\delta_3 \\
& \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \le 2 \\
& x_i \ge 0, \qquad i = 1, \dots, 3 \\
& \tilde{\delta} = \{0, 1\} \\
& \delta_i = \{0, 1\} \qquad i = 1, \dots, 3.
\end{aligned}
$$

Modello 6.5 *Un'industria produce due prodotti e deve programmare la sua attività per i tre trimestri successivi.*
Nella tabella seguente vengono riportati, per ogni trimestre, il prezzo (in euro) unitario di vendita del prodotto, il numero massimo di pezzi del prodotto che possono essere relizzati ed il numero minimo di pezzi richiesti.

	I trimetre			*II trimetre*			*III trimestre*		
	prezzo	*max*	*rich.*	*prezzo*	*max*	*rich.*	*prezzo*	*max*	*rich.*
prod. 1	*40*	*10000*	*8000*	*45*	*15000*	*10000*	*50*	*8000*	*12000*
prod. 2	*30*	*15000*	*10000*	*35*	*20000*	*15000*	*40*	*12000*	*15000*

Formulare un modello lineare che permetta di pianificare la produzione sfruttando la possibilità di immagazzinare i pezzi prodotti. Il costo unitario di immagazzinamento non dipende da periodo ed è pari a 4 euro. Il costo dell'affitto dei magazzini in cui conservare il materiale è di 100 euro. Inoltre a fine dei due primi semestri si può immagazzinare un solo materiale.

Formulazione

- x_{ij} := numero prodotti di tipo i realizzati e venduti nel periodo j
- y_{ij} := numero prodotti di tipo i realizzati e immagazzinati a fine periodo j;
- δ_{ij} := variabile booleana indicatrice che il prodotto i viene immagazzinato a fine periodo j.

$$
\begin{array}{ll}
\max & 40x_{11} + 45(x_{12} + y_{11}) + 50(x_{13} + y_{12}) - 4(y_{11} + y_{12}) \\
& \quad +30x_{21} + 35(x_{22} + y_{21}) + 40(x_{23} + y_{22}) - 4(y_{21} + y_{22}) \\
& \quad -100(\delta_{11} + \delta_{21}) - 100(\delta_{12} + \delta_{22}) \\
& x_{11} + y_{11} \leq 10000 \\
& x_{11} \geq 8000 \\
& y_{11} \leq 10000\delta_{11} \\
& x_{12} + y_{12} \leq 15000 \\
& x_{12} + y_{11} \geq 10000 \\
& y_{12} \leq 15000\delta_{12} \\
& x_{13} \leq 8000 \\
& x_{13} + y_{12} \geq 12000 \\
& x_{21} + y_{21} \leq 15000 \\
& x_{21} \geq 10000 \\
& y_{21} \leq 15000\delta_{21} \\
& x_{22} + y_{22} \leq 20000 \\
& x_{22} + y_{21} \geq 15000 \\
& y_{22} \leq 20000\delta_{22} \\
& x_{23} \leq 12000 \\
& x_{23} + y_{22} \geq 15000 \\
& \delta_{11} + \delta_{21} \leq 1 \\
& \delta_{12} + \delta_{22} \leq 1 \\
& x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1, \dots, 3, \quad j = 1, \dots, 3 \\
& y_{ij} \geq 0, \qquad i = 1, \dots, 3, \quad j = 1, \dots, 2 \\
& \delta_{ij} = \{0, 1\} \qquad i = 1, \dots, 3, \quad j = 1, \dots, 2.
\end{array}
$$

Sommario