Università di Roma "La Sapienza" — Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Corso di Fondamenti di Automatica

Controllo del robot Pendubot

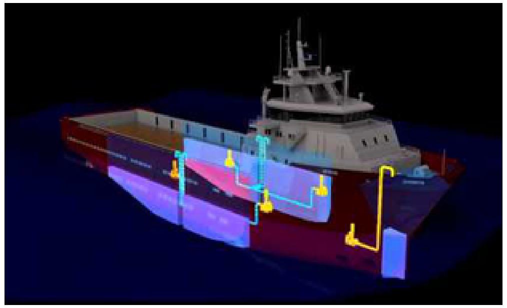
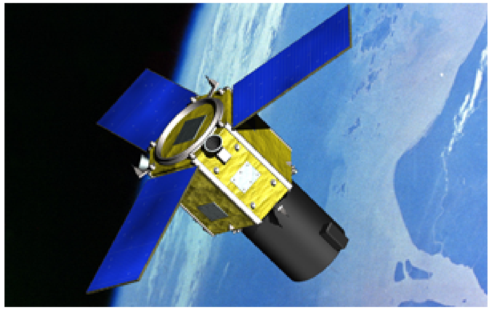
Ing. Massimo Cefalo

- I sistemi meccanici sottoattuati
- Il sistema Quanser Pendubot
- Obiettivi del controllo
- Modellistica dinamica
- Linearizzazione e analisi
- Progetto del controllore

I SISTEMI MECCANICI SOTTOATTUATI

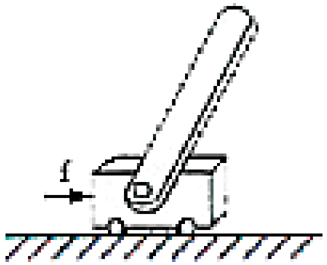
- sono sistemi in cui il numero di attuatori è strettamente minore del numero dei gradi di libertà

- esempi di applicazioni: il controllo del volo di un aereo o di un elicottero, il controllo di un satellite, la stabilizzazione del moto di una nave o il controllo del moto di un robot con locomozione su gambe

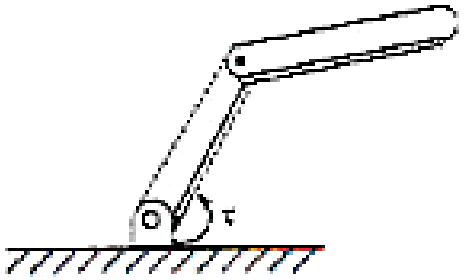




- la sottoattuazione può avere diverse origini:
  - una scelta di progetto della struttura meccanica (per esempio per motivi economici, come nelle missioni spaziali)
  - conseguenza di una momentanea indisponibilità di alcuni attuatori (dovuta per esempio a guasti)
  - caratteristiche del modello matematico del sistema in esame (per esempio nel caso di un manipolatore con elementi flessibili)
- il controllo dei sistemi meccanici sottoattuati è un campo di ricerca attivo e di estremo interesse per molte applicazioni
- due categorie di approcci al controllo: adattamenti di tecniche tradizionali e tecniche sviluppate ad hoc (come gli approcci energy-based)

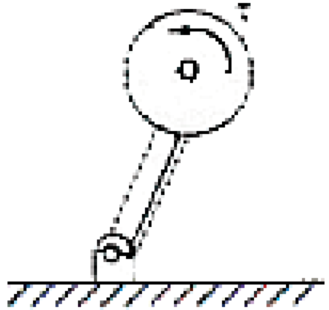
Esempi di sistemi meccanici sottoattuati



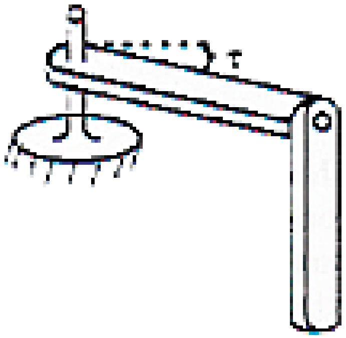
Inverted pendulum



Pendubot

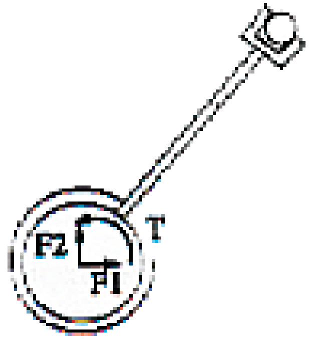


Inertia wheel



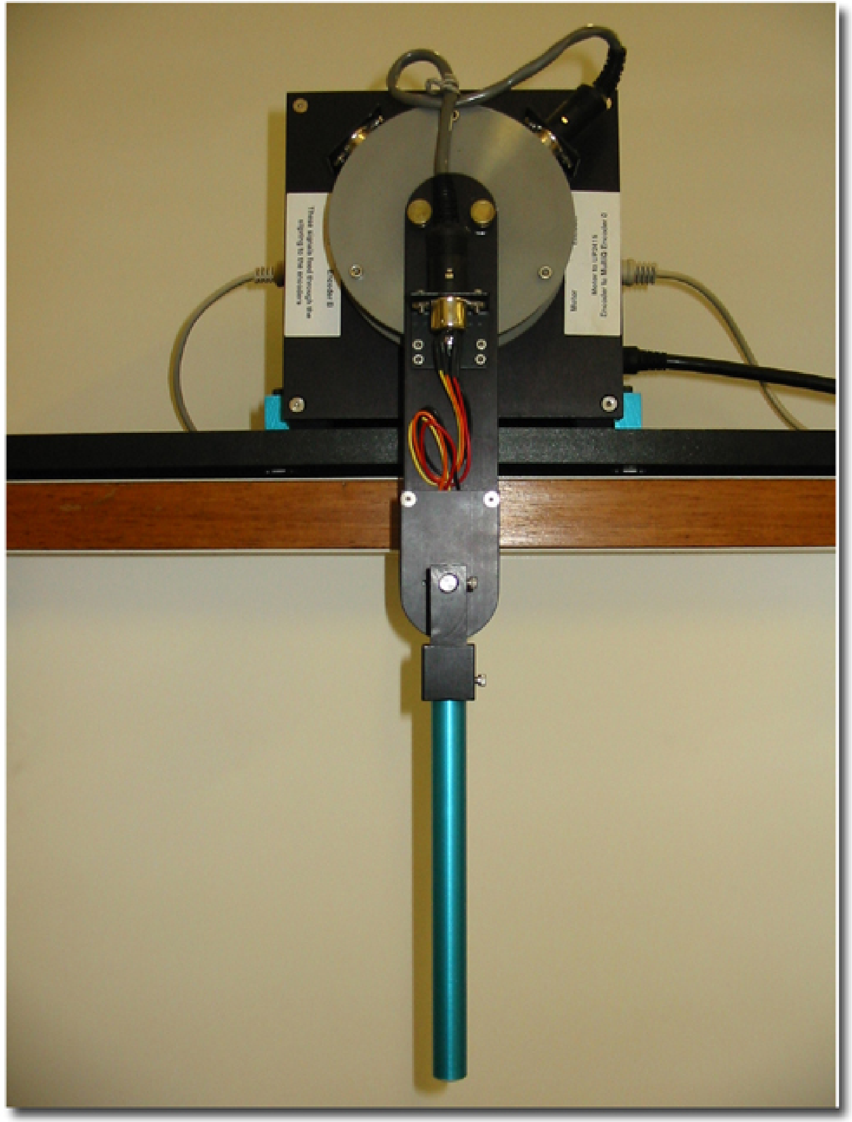
Rotational inverted pendulum

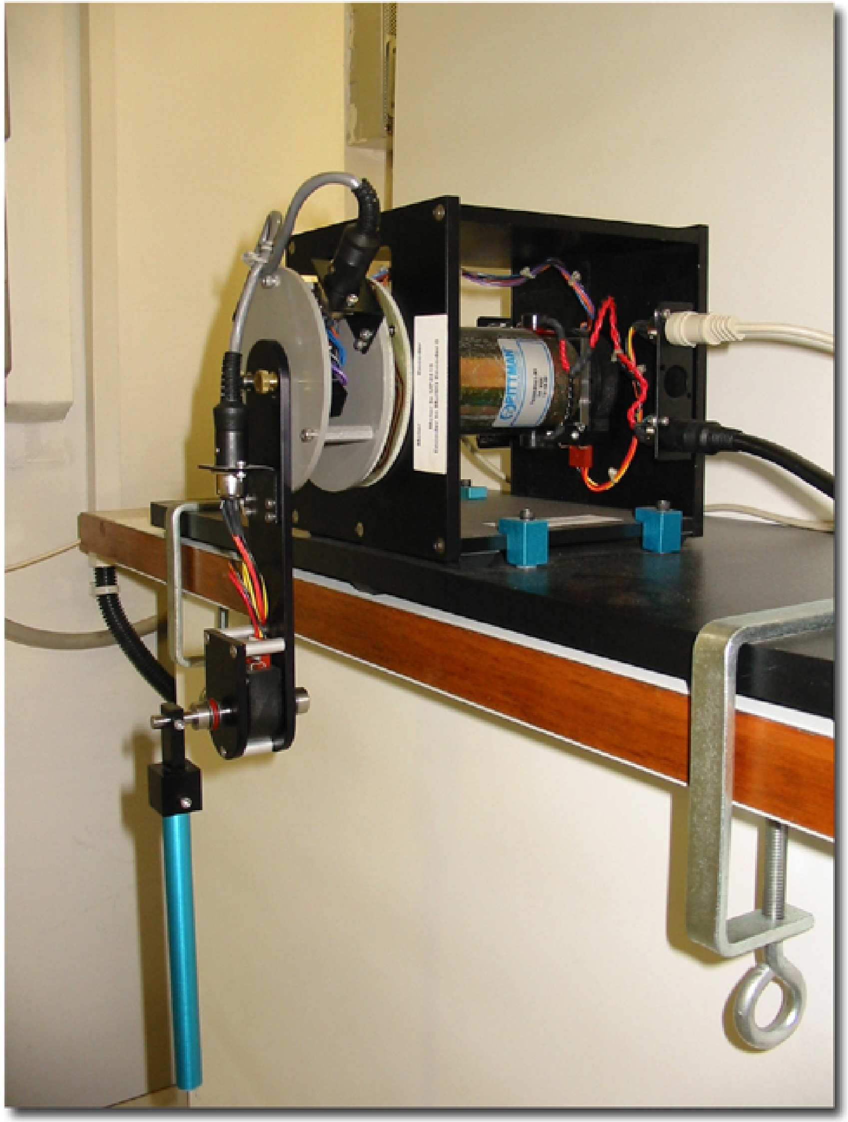
Planar manipulator

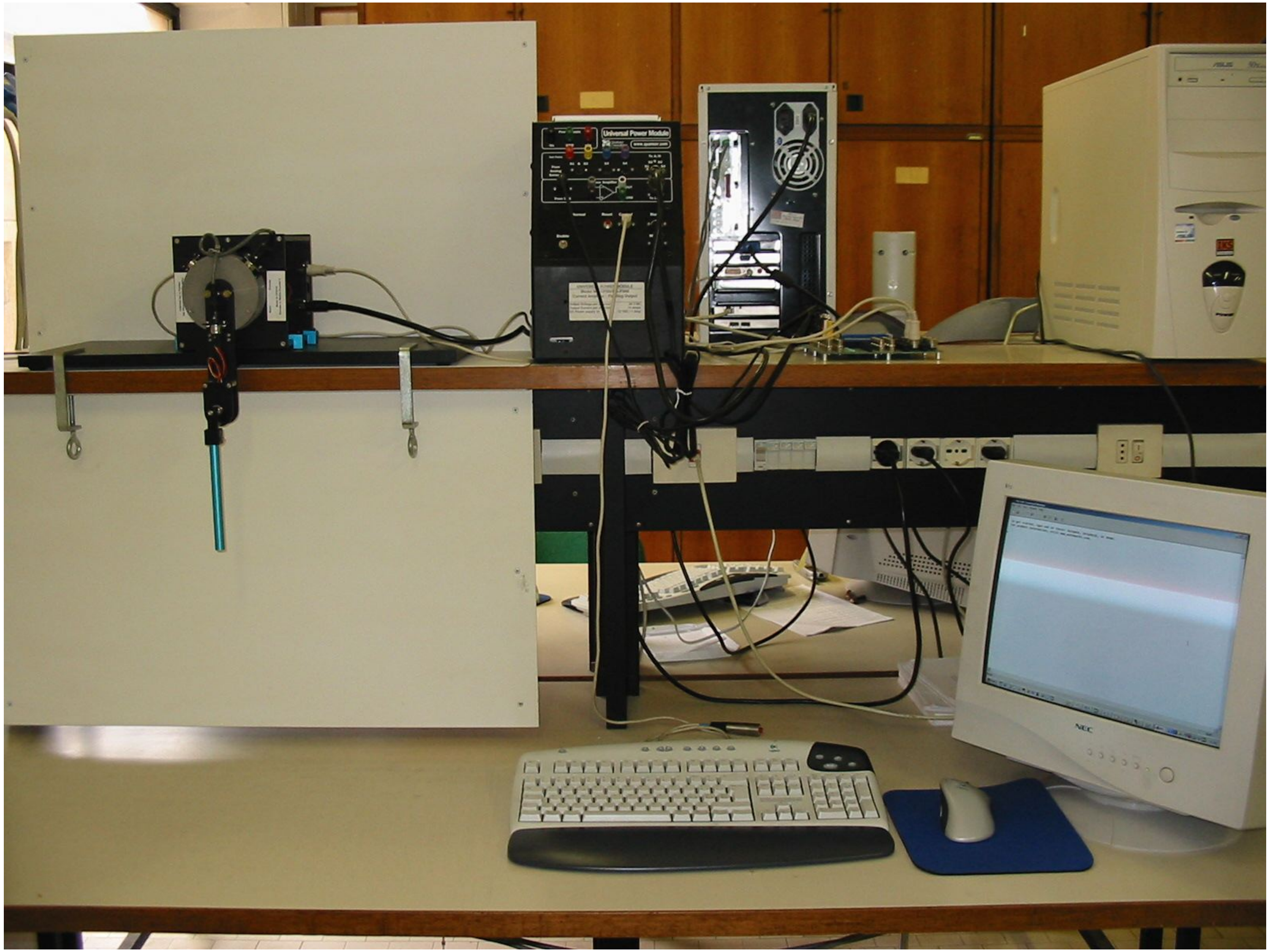


One revolute and two prismatic joints planar manipulator

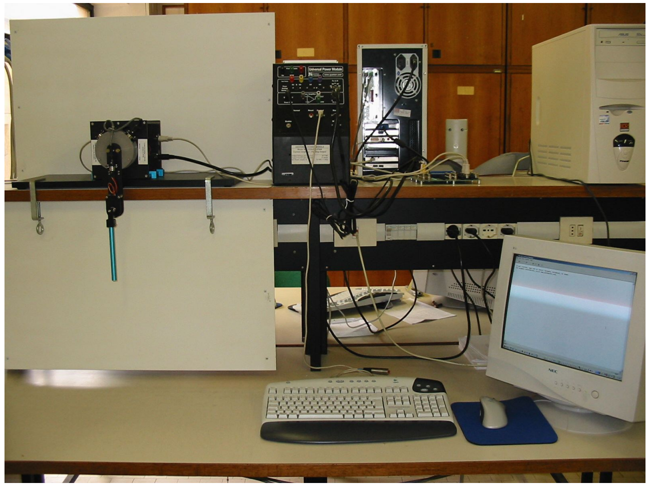
IL SISTEMA QUANSER PENDUBOT






Universal Power Module

Componenti del sistema - 1

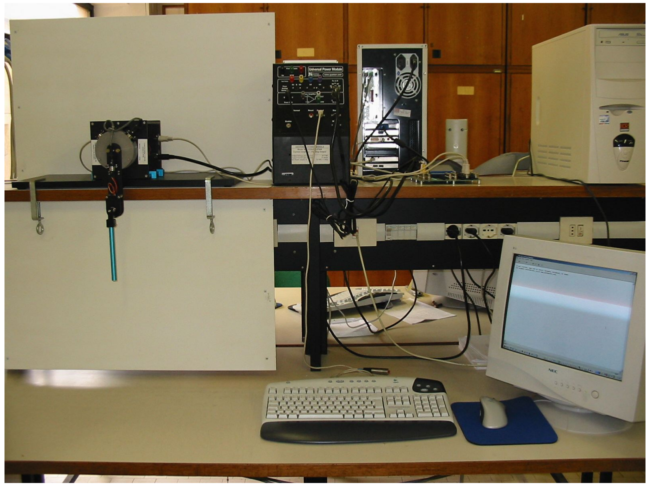


- robot: 2 gradi di libertà rotazionali, sottoattuato (motore solo sul primo giunto), in moto nel piano xy verticale (asse x verticale in basso)

- sensori: due encoder ottici incrementali ai giunti (risoluzioni 1/8192 e 1/4096 su angolo giro)

- attuatore: motore in c.c. a magneti permanenti pilotato in corrente da uno stadio di potenza (UPM) con onda quadra modulata in ampiezza (PWM a 40 KHz) come segnale applicato al motore

Componenti del sistema - 2



- interfaccia: scheda acquisizione dati e conversione A/D e D/A (MultiQ-PCI) con filtri passa-basso + scheda con connettori per canali ingresso-uscita

- Setup hardware originale: Pentium III con MS Windows NT + Venturcom RTX (patch del sistema operativo per prestazione real time)

- software: Matlab/Simulink (progetto/simulazione/realizzazione del sistema di controllo), Real-Time Workshop (generatore automatico di codice C++ da modelli Simulink), Real-Time Windows Target (motore Matlab per esecuzione real-time di modelli Simulink)

OBIETTIVI DEL CONTROLLO

- regolazione di posizione
  - configurazioni di equilibrio libero o forzato, stabili o instabili
  - particolare interesse per la stabilizzazione di equilibri instabili ad anello aperto
  - manovre globali di swing-up (per avvicinarsi a certi equilibri)
  - stabilizzazione locale tramite retroazione lineare dallo stato
- inseguimento di traiettorie
  - devono essere dinamicamente ammissibili!

MODELLISTICA DINAMICA

- sistema elettro-meccanico a più gradi di libertà

- equazioni di bilanciamento elettrico del motore

  - motore c.c. comandato in corrente i_a d'armatura: coppia $\tau = k_i i_a$
  - amplificatore tensione–corrente: $i_a = k_{\mathsf{UPM}} v_c$, con v_c tensione di controllo

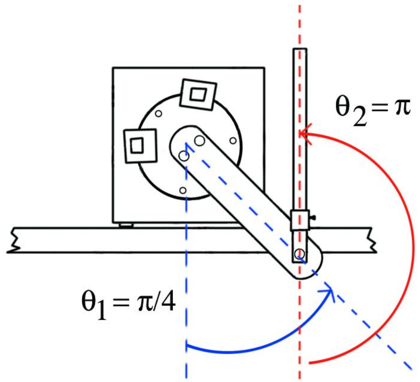
- equazioni di Eulero-Lagrange (formulazione energetica) del braccio meccanico

- accoppiamento diretto motore–braccio 1 (direct-drive), senza riduttori del moto o trasmissioni

- fenomeni di attrito (viscoso, statico) ai giunti (connessioni elettriche striscianti) rilevanti, ma trascurati qui in fase di analisi

Equazioni di Eulero-Lagrange

- scelta di coordinate generalizzate che descrivono la configurazione del robot



$\theta = (\theta_1, \theta_2)$: posizioni angolari assolute dei bracci rispetto alla verticale

- calcolo di energia cinetica $T = T(\theta, \dot{\theta})$ ed energia potenziale (gravitazionale) $U = U(\theta)$ dei corpi (bracci)

- il Lagrangiano $L = T - U$ soddisfa le equazioni vettoriali

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)^T = u$$

dove $u = (u_1, u_2)$ sono le coppie non conservative (coppia fornita dal primo motore, attrito dissipativo sui due giunti)

- in forma scalare

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = u_i, \qquad\qquad i = 1, 2$$

- modello dinamico risultante

$$M(\theta)\ddot{\theta} + c(\theta, \dot{\theta}) + g(\theta) = u$$

con $M(\theta)$ = matrice di inerzia, $c(\theta, \dot{\theta})$ = vettore di coppie dovute alle velocità centrifughe (e di Coriolis), $g(\theta)$ = vettore di coppie dovute alla gravità

Passaggi

- energia cinetica $T = T_1 + T_2$ dei due bracci

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m_1 (d_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} I_1 \, \dot{\theta}_1^2 \\ T_2 &= \frac{1}{2} m_2 v_{c2}^T v_{c2} + \frac{1}{2} I_2 \, \dot{\theta}_2^2 = \ldots \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} m_i &= \text{massa del braccio } i \\ d_i &= \text{distanza del baricentro del braccio } i \text{ dall'asse di rotazione} \\ I_i &= \text{momento di inerzia del braccio } i \text{ intorno al suo baricentro} \\ v_{c2} &= \dot{p}_{c2} = \text{velocità planare del baricentro del braccio 2} \\ \ell_1 &= \text{lunghezza del braccio 1} \end{aligned}$$

$$p_{c2} = \begin{bmatrix} \ell_1 c_1 + d_2 c_2 \\ \ell_1 s_1 + d_2 s_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_{c2} = \begin{bmatrix} -\ell_1 s_1 \dot{\theta}_1 - d_2 s_2 \dot{\theta}_2 \\ \ell_1 c_1 \dot{\theta}_1 + d_2 c_2 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

con $c_i = \cos\theta_i$, $s_i = \sin\theta_i$ $(i = 1, 2)$, da cui

$$T_2 = \ldots = \frac{1}{2} m_2 \left[\ell_1 \dot{\theta}_1^2 + d_2 \dot{\theta}_2^2 + 2 \ell_1 d_2 c_{2-1} \right] + \frac{1}{2} I_2 \, \dot{\theta}_2^2$$

con $c_{2-1} = \cos(\theta_2 - \theta_1)$

- energia potenziale $U = U_1 + U_2$ dei due bracci (a meno di una costante)

$$\begin{aligned} U_1 &= -m_1 g_0 d_1 c_1 \\ U_2 &= -m_2 g_0 \left(\ell_1 c_1 + d_2 c_2 \right) \end{aligned}$$

con $g_0 = 9.81$ m/sec^2
(U_i è legata alla quota del baricentro del braccio i)

- le coppie non conservative (a destra nelle equazioni di Eulero-Lagrange) sono

$$u = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{v1}\dot{\theta}_1 \\ F_{v2}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{s1}\,\mathrm{sign}(\dot{\theta}_1) \\ F_{s2}\,\mathrm{sign}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \end{bmatrix}$$

dove τ = coppia fornita dal motore alla base, F_{vi} = coefficiente di attrito viscoso al giunto i, F_{si} = coefficiente di attrito statico al giunto i $(i = 1, 2)$

nota: da ora in poi, attriti trascurati per semplicità

- dal Lagrangiano $L = T - U$, eseguendo le derivazioni indicate nelle equazioni di Eulero-Lagrange, si ottengono 2 equazioni differenziali (non-lineari) del 2° ordine

$$\begin{aligned} \left(I_1 + m_1 d_1^2 + m_2 \ell_1^2\right)\ddot{\theta}_1 + m_2 \ell_1 d_2 c_{2-1}\ddot{\theta}_2 - m_2 \ell_1 d_2 s_{2-1}\dot{\theta}_2^2 & \\ + g_0\,(m_1 d_1 + m_2 \ell_1)\,s_1 &= \tau \\ m_2 \ell_1 d_2 c_{2-1}\ddot{\theta}_1 + \left(I_2 + m_2 d_2^2\right)\ddot{\theta}_2 + m_2 \ell_1 d_2 s_{2-1}\dot{\theta}_1^2 + g_0 m_2 d_2 &= 0 \end{aligned}$$

- in forma compatta (matriciale) si ha

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 c_{2-1} \\ \alpha_3 c_{2-1} & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_3 s_{2-1} \dot{\theta}_2^2 \\ \alpha_3 s_{2-1} \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_4 s_1 \\ \alpha_5 s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M(\theta) > 0 \qquad\qquad c(\theta, \dot{\theta}) \qquad\qquad g(\theta)$$

avendo definito i coefficienti dinamici

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= I_1 + m_1 d_1^2 + m_2 \ell_1^2 > 0 \\ \alpha_2 &= I_2 + m_2 d_2^2 > 0 \\ \alpha_3 &= m_2 \ell_1 d_2 > 0 && (\iff d_2 > 0) \\ \alpha_4 &= g_0 (m_1 d_1 + m_2 \ell_1) > 0 && (\Longleftarrow d_1 > 0) \\ \alpha_5 &= g_0 m_2 d_2 > 0 && (\iff d_2 > 0) \end{aligned}$$

LINEARIZZAZIONE E ANALISI

- matrice di inerzia simmetrica e definita positiva ($T = \frac{1}{2}\dot{\theta}^T M(\theta)\dot{\theta} \geq 0$)

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \det M(\theta) = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2 c_{2-1}^2 > 0 \; (\forall\theta)$$

- configurazioni di equilibrio θ_e del sistema meccanico: si pone $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$

$$g(\theta_e) = \begin{bmatrix} \tau_e \\ 0 \end{bmatrix}$$

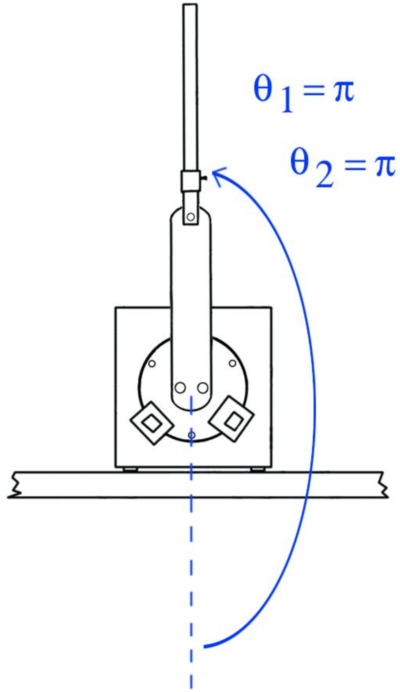
  - equilibrio libero (con $\tau_e = 0$)

$$g(\theta_e) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin\theta_{1e} = \sin\theta_{2e} = 0 \qquad \text{(4 soluzioni)}$$

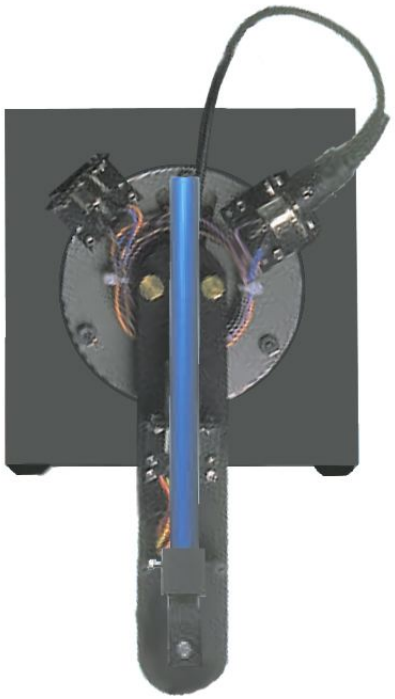
  - equilibrio forzato (con $\tau_e \neq 0$)

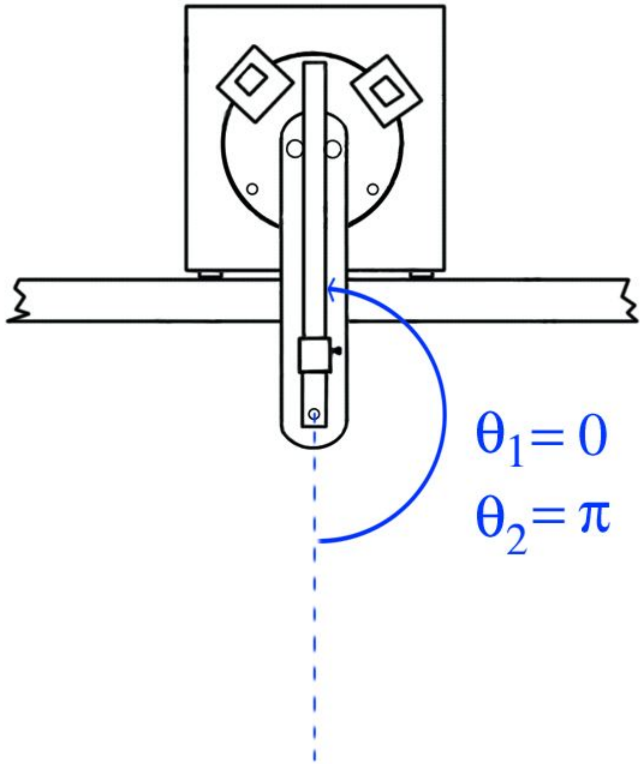
$$\sin\theta_{1e} = \frac{\tau_e}{\alpha_4} \qquad \sin\theta_{2e} = 0 \qquad (\infty \text{ soluzioni})$$

Configurazione di equilibrio libero: UP-UP

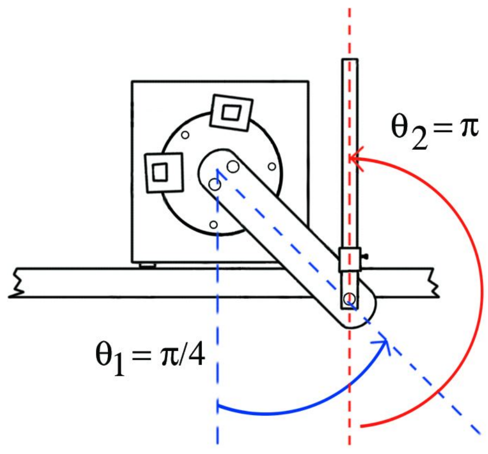


Configurazione di equilibrio libero: DOWN-UP





Configurazione di equilibrio forzato: 45°-UP



$$\tau_e = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \alpha_4 \neq 0$$

Linearizzazione intorno ad un equilibrio

- si pone

$$\theta = \theta_e + \delta\theta \qquad \dot{\theta} = \dot{\theta}_e + \dot{\delta\theta} = \dot{\delta\theta} \qquad \ddot{\theta} = \ddot{\theta}_e + \ddot{\delta\theta} = \ddot{\delta\theta} \qquad \tau = \tau_e + \delta\tau$$

  con $\dot{\theta}_e = \ddot{\theta}_e = 0$, e con $\tau_e = 0$ per equilibrio libero

  e si sviluppano in serie di Taylor nelle (piccole) variazioni $(\delta\theta, \dot{\delta\theta}, \ddot{\delta\theta}, \delta\tau)$ tutti i termini (nonlineari) del modello dinamico

- eliminando i termini con prodotti di variazioni (che hanno ordine di infinitesimo superiore al primo), si ottiene

$$M(\theta_e)\ddot{\delta\theta} + G(\theta_e)\delta\theta = \begin{bmatrix} \delta\tau \\ 0 \end{bmatrix} \qquad G(\theta_e) = \left.\frac{\partial g}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_e}$$

  con i termini centrifughi/di Coriolis mai presenti (essenzialmente perché quadratici nelle velocità!)

Equazioni di stato linearizzate intorno all'equilibrio UP-UP

- per $\theta_e = (\pi, \pi)$ (e quindi $\tau_e = 0$) si ha

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_2 \end{bmatrix}}_{M(\theta_e)} \begin{bmatrix} \delta\ddot{\theta}_1 \\ \delta\ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha_4 & 0 \\ 0 & -\alpha_5 \end{bmatrix}}_{G(\theta_e)} \begin{bmatrix} \delta\theta_1 \\ \delta\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

- posto $\Delta = \det M(\theta_e) = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2 > 0$, una conveniente scelta delle (quattro) variabili di stato e della (singola) variabile di ingresso è

$$x = \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \frac{1}{\Delta} M(\theta_e)\delta\dot{\theta} \end{bmatrix} \in I\!R^4 \qquad\qquad u = \frac{1}{\Delta}\delta\tau \in I\!R$$

- le equazioni di stato sono nella forma usuale

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0_{2\times 2} & M^{-1}(\theta_e)\cdot\Delta \\ \\ -G(\theta_e)/\Delta & 0_{2\times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_2 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & -\alpha_3 & \alpha_1 \\ \alpha_4/\Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_5/\Delta & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Autovalori della matrice A

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -\alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \lambda & \alpha_3 & -\alpha_1 \\ -\alpha_4/\Delta & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\alpha_5/\Delta & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^4 - \frac{\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_4}{\Delta}\lambda^2 + \frac{\alpha_4\alpha_5}{\Delta}$$

- posto $\mu = \lambda^2$, il polinomio caratteristico si può riscrivere come

$$\Delta\mu^2 - (\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_4)\mu + \alpha_4\alpha_5 = 0$$

ed ha **due** cambi di segno nei coefficienti $\Rightarrow$ 2 radici reali $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$
$\Rightarrow$ 2 coppie di autovalori reali opposti $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\mu_1}$, $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\mu_2}$

- sistema instabile intorno all'equilibrio UP-UP (ad anello aperto)

PROGETTO DEL CONTROLLORE

- nelle nuove coordinate, l'origine corrisponde all'equilibrio UP-UP; di conseguenza rendere asintoticamente stabile il sistema linearizzato vuol dire rendere l'equilibrio UP-UP asintoticamente stabile (localmente) per il Pendubot

- raggiungibilità della coppia (A, B)

$$
\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 & 0 & (\alpha_2^2\alpha^4 + \alpha_3^2\alpha_5)/\Delta \\ 0 & -\alpha_3 & 0 & -(\alpha_2\alpha^4 + \alpha_1\alpha_5)\alpha_3/\Delta \\ 1 & 0 & \alpha_2\alpha_4/\Delta & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_3\alpha_5/\Delta & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- test di raggiungibilità: rango $P = 4\,(= \dim x)$, infatti

$$
\det P = -\frac{(\alpha_3\alpha_5)^2}{\Delta} \neq 0 \quad !!
$$

Stabilizzazione

- essendo il sistema raggiungibile e lo stato misurabile, si può procedere per assegnazione degli autovalori mediante retroazione dallo stato

$$u = Kx = [\,k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4\,]\,x \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x} = (A + BK)x$$

con K tale che gli autovalori di $\sigma(A + BK)$ siano tutti a parte reale negativa

- per calcolare la K che impone il polinomio caratteristico desiderato

$$p^*(\lambda) = \lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

si può utilizzare la formula di Ackermann

$$K = -\mu p^*(A)$$

dove μ indica l'ultima riga di P^{-1}

- numerico (in Matlab) con i dati del problema

$$
\begin{aligned}
g_0 &= 9.81 \\
\ell_1 &= 0.1492 \qquad \ell_2 = 0.1905 \\
m_1 &= 0.193 \qquad m_2 = 0.073 \\
d_1 &= 0.1032 \qquad d_2 = 0.1065 \\
I_1 &= \frac{1}{12} m_1 \ell_1^2 \qquad I_2 = \frac{1}{12} m_2 \ell_2^2
\end{aligned}
$$

da cui si ha

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= 0.0040 \\
\alpha_2 &= 0.0010 \\
\alpha_3 &= 0.0012 \\
\alpha_4 &= 0.3893 \\
\alpha_5 &= 0.0763
\end{aligned}
$$

con le matrici di stato e ingresso

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0010 & -0.0012 \\ 0 & 0 & -0.0012 & 0.0040 \\ 134719.9851 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 26390.8899 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con $\sigma(A) = (\pm 13.9729, \pm 7.2544)$

utilizzando le istruzioni Matlab

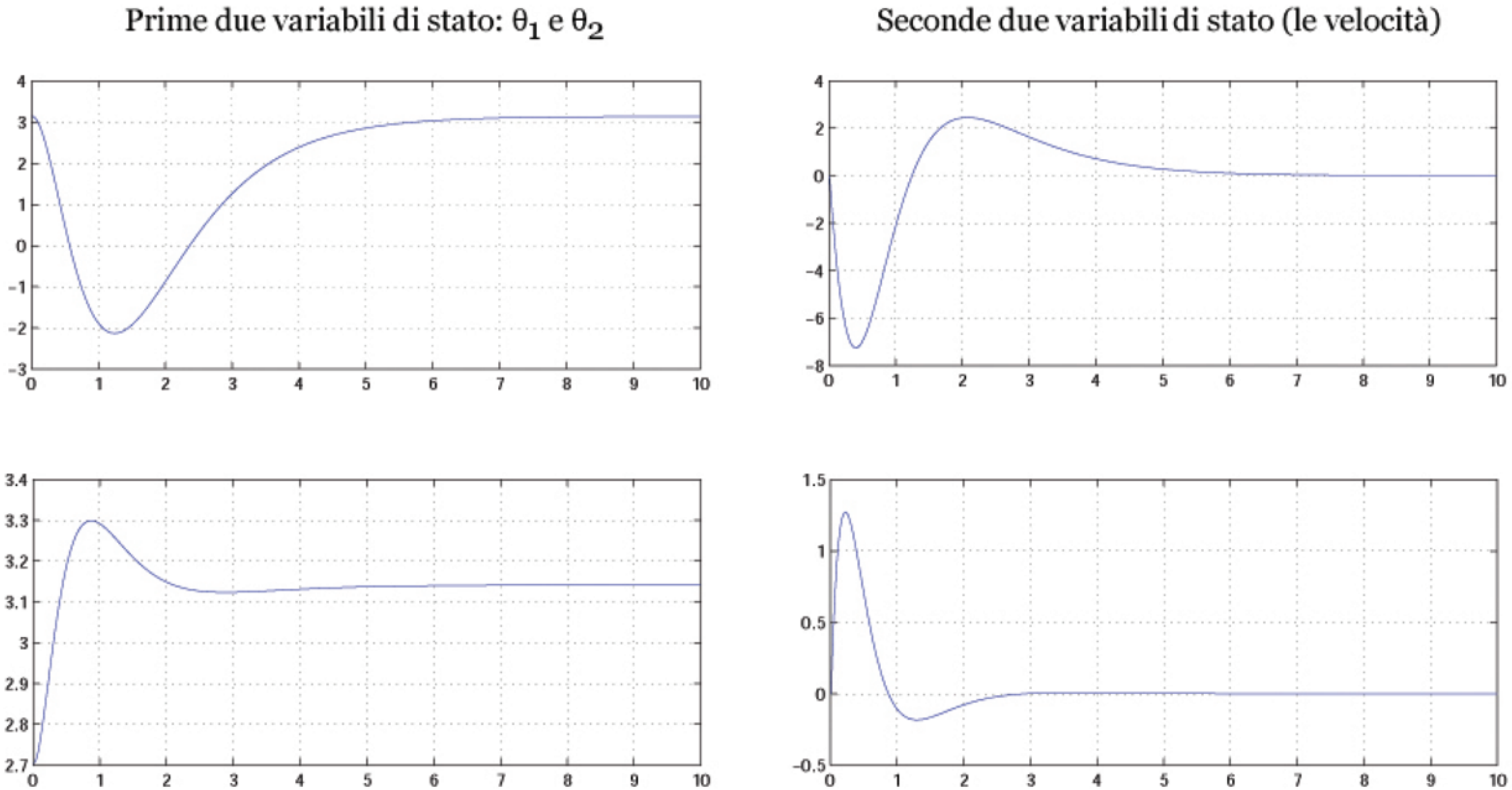
$$\begin{aligned} \mathtt{p} &= [-1-2-3-4]; \quad \text{(insieme degli autovalori desiderati)} \\ \mathtt{K} &= -\mathtt{acker(A,B,p)}; \\ \mathtt{sigma} &= \mathtt{eig(A+B*K)}; \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} K &= 10^5 * [\,-1.3441 \quad 1.2234 \quad -0.0001 \quad 0.0004\,] \\ \sigma(A+BK) &= (-1.000, -1.999, -3.000, -4.000) \quad \text{(arrotondamenti)} \end{aligned}$$

Simulazione sistema linearizzato

- a partire da condizioni iniziali non nulle ($\theta_2 = 155^o$) si ottiene



- non è detto che lo stesso comportamento valga per il sistema meccanico originario (non lineare): dipende dal dominio di attrazione!

- in alternativa al progetto precedente, si osservi che due degli autovalori del sistema sono già stabili:

$$\sigma(A) = (\pm 13.9729, \pm 7.2544)$$

è quindi possibile stabilizzare il sistema "ribaltando" gli autovalori instabili e lasciando inalterati quelli stabili

$$p \;=\; [-13.9729 - 7.2544 - 13.9729 - 7.2544];$$

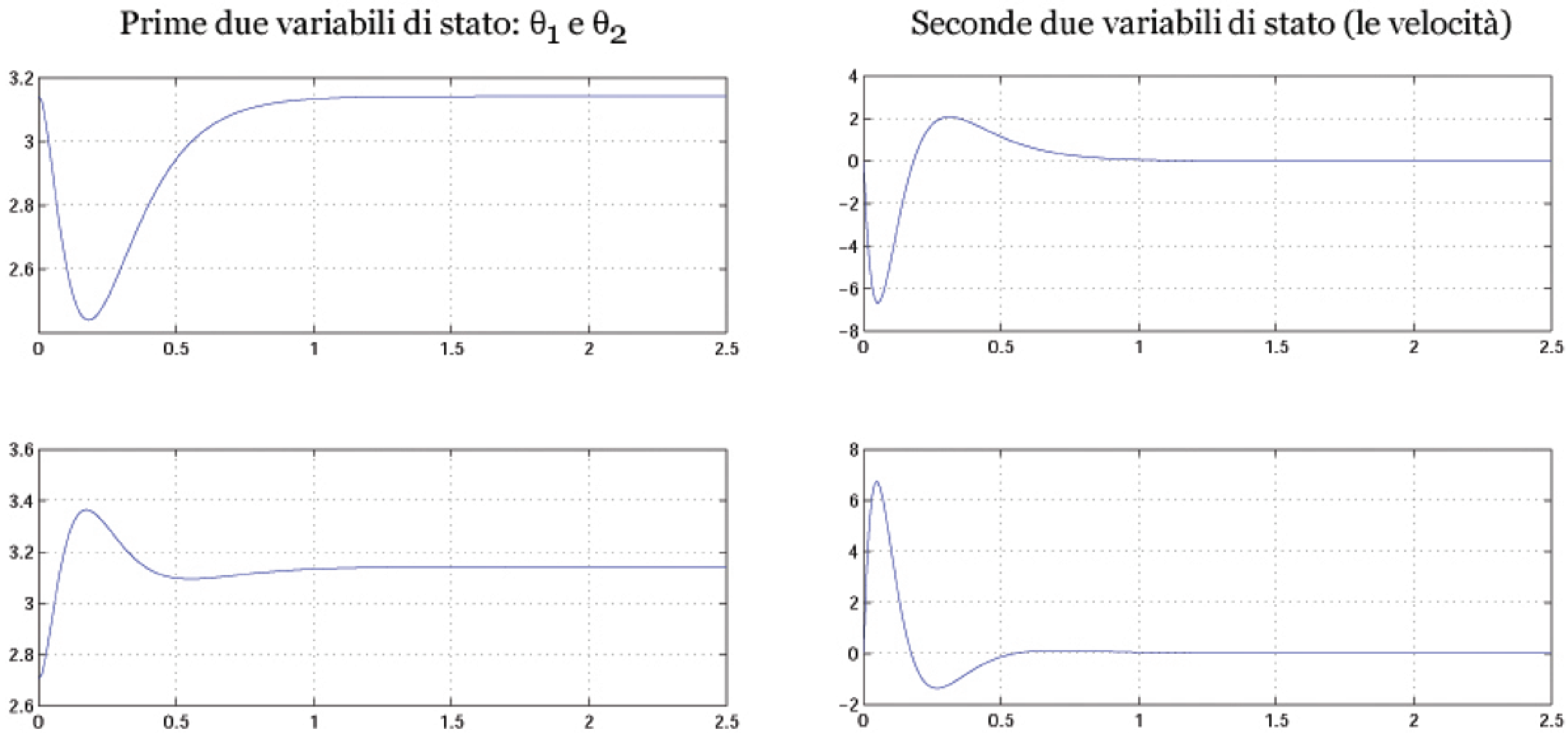
si ottiene

$$\begin{aligned} K &= -\mathtt{acker(A,B,p)}; \\ \Rightarrow K &= 10^5 * [\,0.000000603 \quad 8.1121 \quad -0.0004 \quad 0.0028\,] \end{aligned}$$

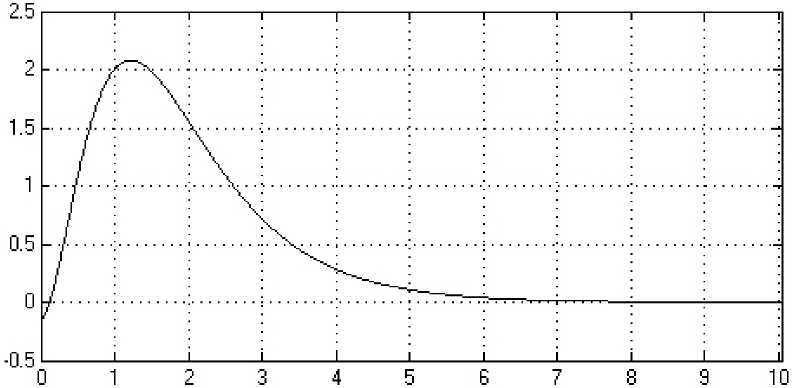
in questo modo si ottimizza il controllo dal punto di vista dello sforzo del controllore (coppia più bassa) e si riducono le sovraelongazioni in uscita

Simulazione sistema linearizzato: ribaltamento autovalori instabili

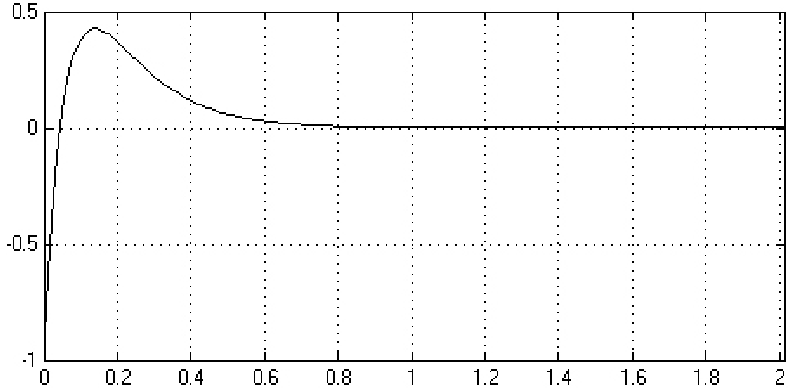
- a partire da condizioni iniziali non nulle ($\theta_2 = 155^o$) si ottiene



Confronto tra le coppie prodotte dai due controllori a parità di condizioni iniziali



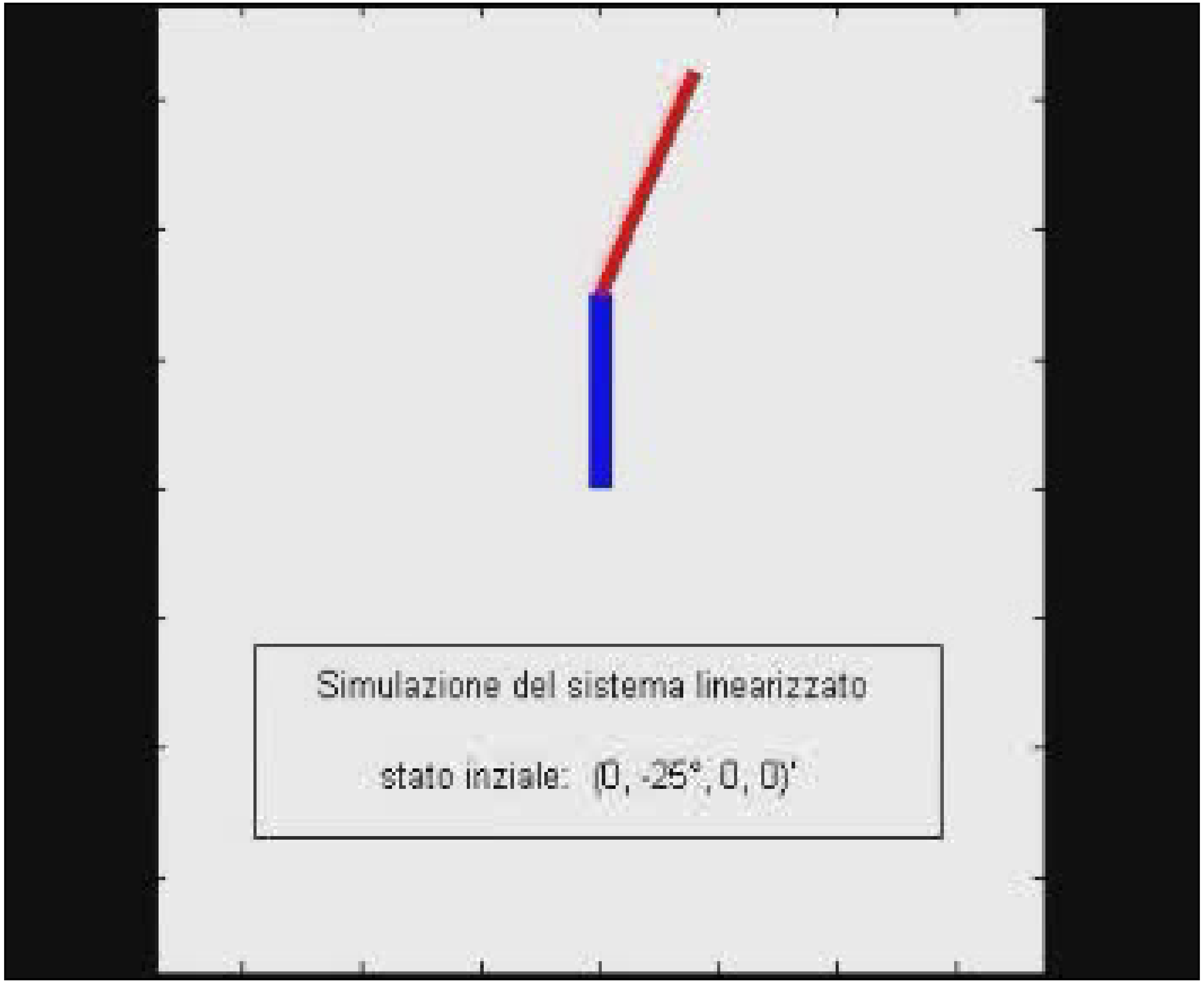
$\sigma(A+BK) = [-1\ -2\ -3\ -4]$



$\sigma(A+BK) = [-13{,}9729\ \ -7{,}2544\ \ -13{,}9729\ \ -7{,}2544]$

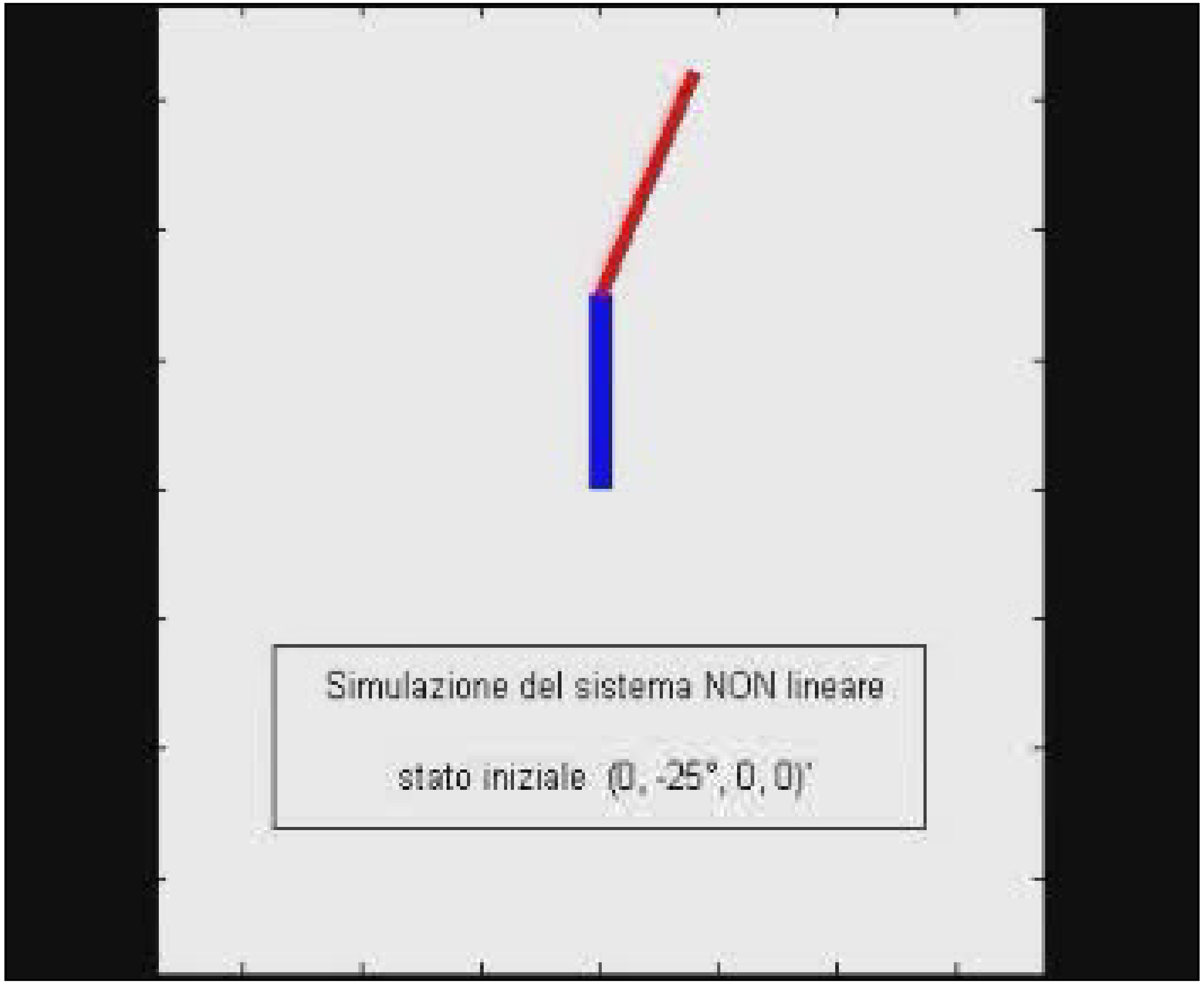
nel primo caso la coppia prodotta raggiunge un picco più elevato, ed interessa un intervallo di tempo più lungo

Simulazione sistema linearizzato: ribaltamento autovalori instabili



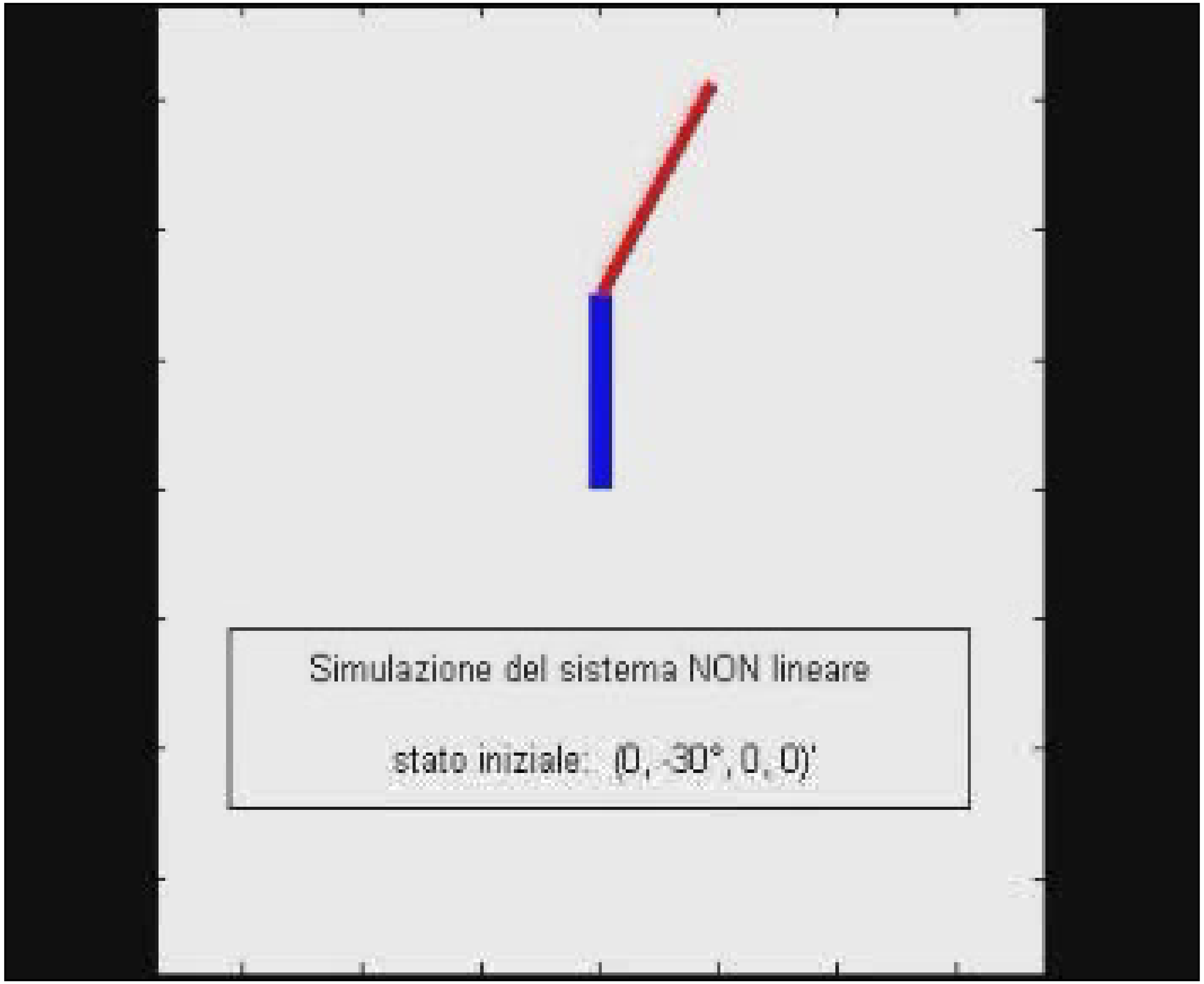
Simulazione sistema NON lineare: ribaltamento autovalori instabili

a partire da condizioni iniziali appartenenti al bacino di attrazione



Simulazione sistema NON lineare: ribaltamento autovalori instabili

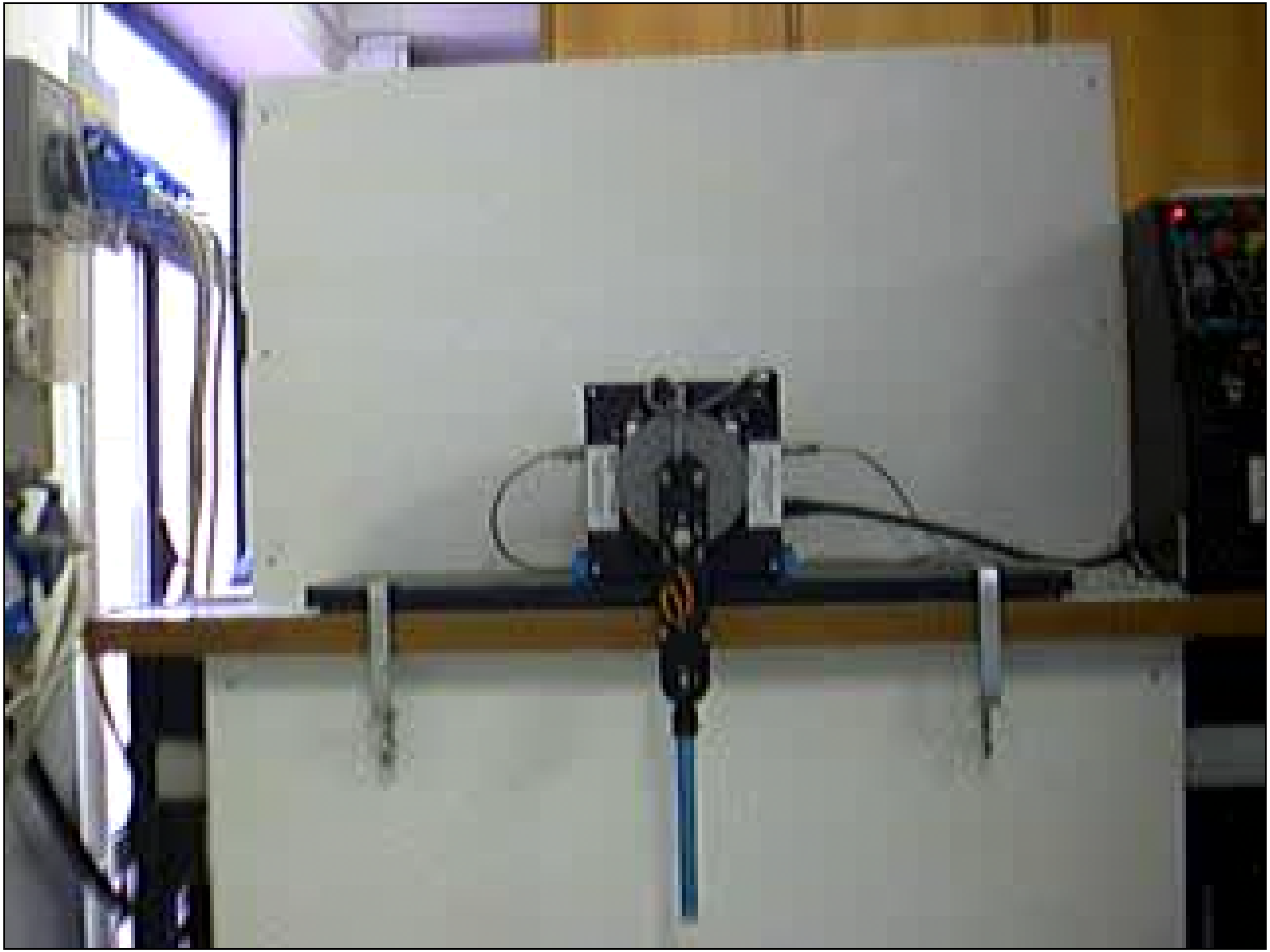
a partire da condizioni iniziali lontane dal punto di equilibrio (NON più appartenenti al bacino di attrazione)



Manovra di swing-up

- lo swing-up (cio il trasferimento da DOWN-DOWN a UP-UP) è risolto con una tecnica ibrida:
  - si fa oscillare il primo braccio, fornendo energia sufficiente a far sì che anche il secondo entri in oscillazione ampia
  - quando entrambi i bracci entrano in un dominio di attrazione per il controllore lineare, si commuta sulla stabilizzazione locale
  - per il Pendubot, il dominio è circa $[-15^\circ, +15^\circ]$ di errore in posizione (rispetto a θ_e) e di $[-4, +4]$ rad/s in velocità (rispetto a $\dot{\theta}_e = 0$); il dominio di attrazione dipende da θ_e e dalla matrice K dei guadagni del controllore
  - capacità di contrastare piccoli disturbi non persistenti (reiezione dei disturbi)

Esperimento di swing-up



COMMENTI CONCLUSIVI

- aspetti da considerare in pratica:
  - attrito ai giunti (quello viscoso è un fenomeno lineare, quello statico è una nonlinearità 'hard')
  - inerzia del motore (si aggiunge I_m ad α_1)
  - indisponibilità della misura di velocità (differenziazione numerica filtrata delle misure degli encoder)
  - discretizzazione e quantizzazione delle grandezze
  - saturazione dell'attuatore (coppia di picco e di regime)
  - perturbazioni sul valore dei parametri