

**Esame di FONDAMENTI di AUTOMATICA**  
**(Nuovo ordinamento)**  
**28 Giugno 2006**  
**(Bozza di soluzione)**

1) Problema di regolazione del livello di un serbatoio. Il volume di liquido è  $V(t) = Ah(t)$ ,  $p_i(t)$  è l'ingresso di controllo  $u(t)$  e  $p_o(t)$  è un disturbo  $d(t)$  e quindi l'equazione differenziale diventa

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A} [u(t) - d(t)]$$

Scegliendo come variabile di stato  $h(t)$  e notando che l'ingresso e il disturbo agiscono entrambi in ingresso al processo, si può ricavare la funzione di trasferimento tra  $w(t) = u(t) - d(t)$  e  $h(t)$  (variabile controllata e misurata) effettuando la trasformata di Laplace dell'equazione precedente (si ricorda che la funzione di trasferimento rappresenta il legame ingresso-uscita e quindi con condizioni iniziali nulle  $h(0) = 0$ )

$$\frac{\mathcal{L}\{h(t)\}}{\mathcal{L}\{w(t)\}} = \frac{h(s)}{w(s)} = \frac{1}{As}$$

In alternativa posto  $x(t) = h(t)$  e scegliendo come variabile di uscita (variabile misurabile e controllata)  $y(t) = h(t)$  si ha la seguente rappresentazione con lo spazio di stato

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ex(t) + Bw(t) = 0x(t) + \frac{1}{A}w(t) \\ y(t) &= Cx(t) = 1x(t) \end{aligned}$$

Pertanto la funzione di trasferimento tra  $w(t)$  e  $y(t)$  è data da

$$P(s) = C(sI - H)^{-1}B = \frac{1}{As}$$

Lo schema risultante è riportato in Fig.(1)

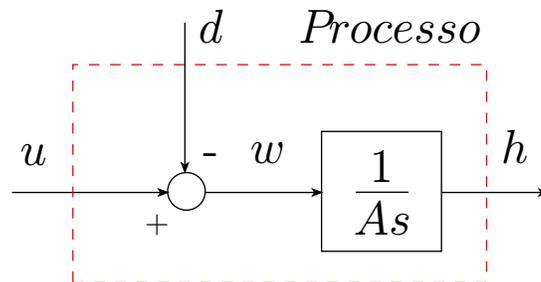


Figure 1: Rappresentazione con uno schema a blocchi del sistema considerato

Il problema di controllo può essere riformulato come

- a) in corrispondenza ad un ingresso di riferimento  $h_{rif}(t) = h_d$  costante (ingresso di ordine 0) si richiede un errore a regime permanente nullo e quindi il sistema di controllo deve essere almeno di tipo 1;
- b) in corrispondenza ad un disturbo  $d$  costante non noto si richiede un contributo in uscita nullo a regime permanente nullo e quindi il sistema deve essere astatico rispetto al disturbo costante  $d$ ;
- c) nessuna specifica sul transitorio e ovvia richiesta (implicita) di stabilità asintotica del sistema di controllo.

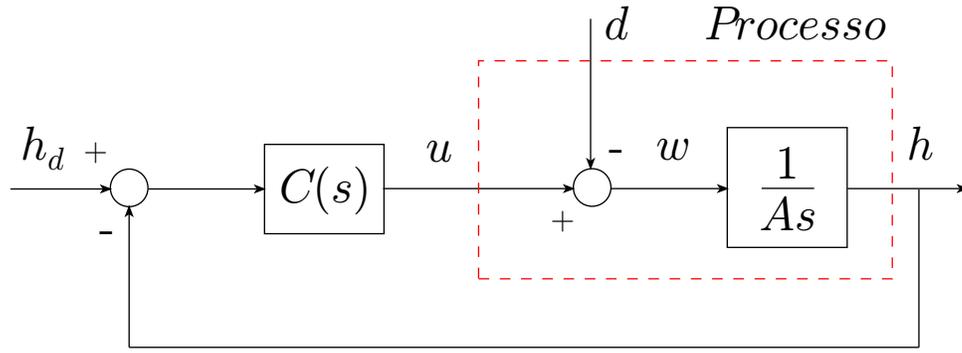


Figure 2: Sistema di controllo a controreazione

La presenza del polo nell'origine nella funzione di trasferimento rende il sistema di controllo a controreazione di Fig.(2) di tipo 1, mentre è necessaria l'introduzione di un polo in  $s = 0$  nel controllore per rendere il sistema astatico. Rimane da verificare se il sistema di controllo così ottenuto con

$$C(s) = \frac{1}{s}$$

è stabile asintoticamente. Dal criterio di Routh applicato al denominatore del sistema ad anello chiuso

$$d_{CH}(s) = As^2 + 1$$

si nota che il sistema di controllo non è stabile asintoticamente. Il tracciamento qualitativo dei diagrammi di Bode del sistema in catena diretta

$$F(s) = C(s) \frac{1}{As}$$

risulta particolarmente semplice e può fornire indicazioni per la stabilizzazione del sistema considerato. In particolare la fase vale, per ogni pulsazione,  $-\pi$  ed inoltre si è nelle condizioni di poter applicare il teorema di Bode (assenza di poli a parte reale positiva ad anello aperto, unica pulsazione di attraversamento, guadagno positivo). Risulta sufficiente riuscire ad aumentare la fase in un intervallo di frequenze e di portare la pulsazione di attraversamento in tale intervallo in modo tale da ottenere un margine di fase positivo adeguato. Una possibile scelta consiste nell'individuare una funzione anticipatrice (aumento della fase in un intervallo di pulsazioni) e un guadagno opportuno per portare la pulsazione di attraversamento in tale intervallo. Il controllore diventa, con opportuni valori di  $K_1$ ,  $\tau_a$  e  $m_a$ ,

$$C_1(s) = \frac{K_1}{s} \left( \frac{1 + \tau_a s}{1 + \tau_a/m_a s} \right)$$

Una scelta alternativa potrebbe essere nell'aggiungere un semplice zero negativo (fattore binomio a numeratore con  $\tau$  positivo) nel controllore (per aumentare la fase da una pulsazione in poi) e un guadagno opportuno per portare la pulsazione di attraversamento ad un valore tale da ottenere un margine di fase adeguato. La possibilità di aggiungere un semplice zero nasce dalla presenza di un polo a denominatore già presente per il soddisfacimento della specifica di astaticismo. Il controllore risultante è quindi proprio. Con

$$C_2(s) = K \left( \frac{1 + \tau s}{s} \right)$$

i poli del sistema di controllo sono soluzioni di

$$d_{CH}(s) = As^2 + K(1 + \tau s) = As^2 + K\tau s + K$$

Si noti che con  $\tau > 0$  qualsiasi valore di  $K > 0$  assicura la stabilità asintotica del sistema ad anello chiuso; secondo tale analisi risulterebbe inutile l'introduzione di un guadagno  $K$  nel controllore. Si ricorda che il tracciamento dei diagrammi di Bode, ed in particolare della fase, studiato è approssimato e quindi nella realtà il fattore binomio a numeratore con  $\tau$  positivo comunque assicura un aumento della fase anche a pulsazioni di molto inferiori alla pulsazione di rottura. Si noti però che il margine di fase risultante a tali pulsazioni risulterebbe positivo ma molto piccolo e quindi con scarsa robustezza e con prestazioni sul transitorio del tutto insoddisfacenti.

2) Trasformando secondo Laplace l'equazione differenziale

$$\ddot{y}(t) + \varepsilon^2 y(t) = u(t)$$

a partire da condizioni iniziali nulle  $\dot{y}(0) = y(0) = 0$  si ha, posto  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$  e  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ ,

$$s^2 Y(s) + \varepsilon^2 Y(s) = U(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + \varepsilon^2}$$

In alternativa, scegliendo come vettore di stato (equazione differenziale del secondo ordine, vettore di stato di dimensione 2)

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

si ha

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon^2 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= Cx(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

e quindi

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \left[ s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon^2 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2 + \varepsilon^2}$$

Nello schema di controllo a retroazione si ha in catena diretta

$$F(s) = C(s) \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(1 + \tau s)}{1 + s} \frac{1}{s^2 + \varepsilon^2} = \frac{K}{\varepsilon^2} \frac{(1 + \tau s)}{1 + s} \frac{1}{1 + s^2/\varepsilon^2}$$

nella quale si è messo in evidenza il guadagno  $K/\varepsilon^2$ , i due fattori binomi del controllore e un fattore trinomio a denominatore con coefficiente di smorzamento nullo e pulsazione di risonanza  $\omega_n = \varepsilon$ . Si noti che il termine

$$\frac{(1 + \tau s)}{1 + s}$$

si comporta come una funzione attenuatrice se  $0 < \tau < 1$  e come una funzione anticipatrice se  $\tau > 1$ . I corrispondenti due andamenti possibili dei diagrammi di Nyquist sono riportati rispettivamente in Fig.(3) e Fig.(4).

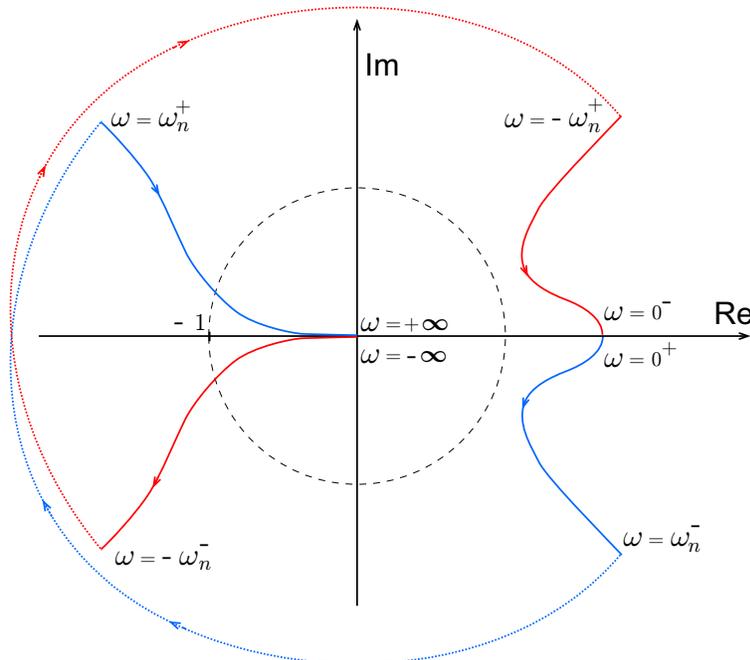


Figure 3: Diagramma di Nyquist: caso  $0 < \tau < 1$

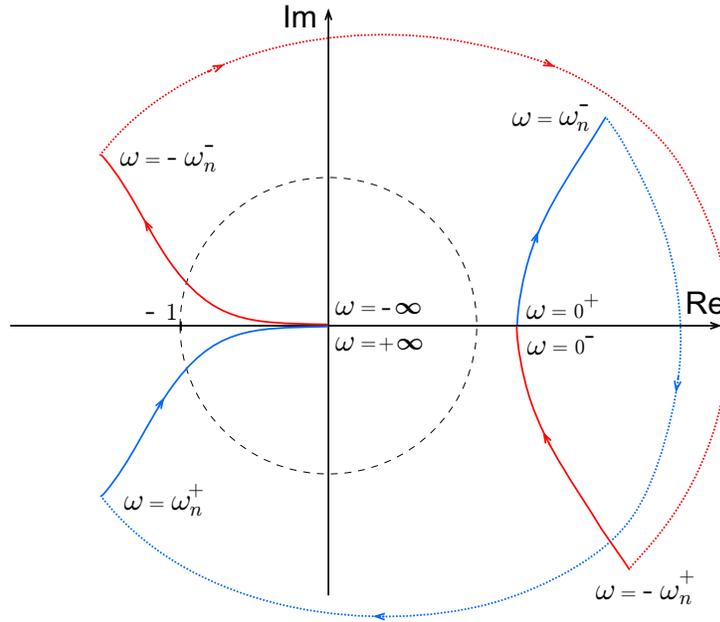


Figure 4: Diagramma di Nyquist: caso  $\tau > 1$

Essendo il sistema in catena diretta privo di poli a parte reale positiva, il criterio di Nyquist è verificato solo nel caso riportato in Fig.(4) (nessun giro intorno al punto di coordinate  $(-1, 0)$ ) e di conseguenza il sistema di controllo è stabile asintoticamente in tal caso. A titolo di verifica, il denominatore della funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso è pari a

$$\begin{aligned} d_{CH}(s) &= K(1 + \tau s) + (1 + s)(s^2 + \varepsilon^2) \\ &= s^3 + s^2 + s(\varepsilon^2 + K\tau) + K + \varepsilon^2 \end{aligned}$$

La condizione necessaria è verificata. La tabella di Routh corrispondente è

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & \varepsilon^2 + K\tau \\ & 1 & K + \varepsilon^2 \\ K(\tau - 1) & & \\ K + \varepsilon^2 & & \end{array}$$

e quindi la C.N.S. affinché il sistema ad anello chiuso sia stabile asintoticamente è  $\tau > 1$ .

**3)** Per determinare la funzione di trasferimento tra  $r(t)$  e  $y(t)$  del sistema interconnesso si può manipolare lo schema in modo tale da ricondursi a interconnessioni di base oppure risolvere per via algebrica. Le relazioni che legano le trasformate dei vari segnali indicati in figura sono

$$\begin{aligned} a(s) &= r(s) - d(s) \\ c(s) &= b(s) - y(s) \\ e(s) &= r(s) + d(s) \\ b(s) &= F_1(s)a(s) \\ d(s) &= F_2(s)c(s) \\ y(s) &= F_3(s)e(s) \end{aligned}$$

Utilizzando  $d(s)$  e  $b(s)$  si arriva a

$$\begin{aligned} a(s) &= r(s) - F_2(s)c(s) \\ c(s) &= F_1(s)a(s) - y(s) \\ e(s) &= r(s) + F_2(s)c(s) \\ y(s) &= F_3(s)e(s) \end{aligned}$$

mentre sostituendo  $a(s)$  nell'espressione di  $c(s)$  si ottiene

$$\begin{aligned}c(s) &= \frac{1}{1 + F_1(s)F_2(s)} [F_1(s)r(s) - y(s)] \\e(s) &= r(s) + F_2(s)c(s) \\y(s) &= F_3(s)e(s)\end{aligned}$$

Infine, sostituendo  $c(s)$  in  $e(s)$  ed  $e(s)$  in  $y(s)$ , risolvendo si ottiene l'espressione

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{[1 + F_1(s)F_2(s)] F_3(s) + F_1(s)F_2(s)F_3(s)}{1 + F_1(s)F_2(s) + F_2(s)F_3(s)}$$

4) La matrice dinamica  $A$  del sistema è triangolare superiore e quindi gli autovalori sono gli elementi della diagonale principale

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 0$$

da cui, essendo gli autovalori reali e distinti, si ottengono direttamente i modi naturali

$$e^{\lambda_1 t}, \quad e^{\lambda_2 t}, \quad e^{\lambda_3 t}$$

I modi naturali che compaiono nella risposta impulsiva in uscita sono tutti e soli i modi contemporaneamente eccitabili con impulsi in ingresso e osservabili in uscita o, in modo equivalente, i modi naturali del sottosistema contemporaneamente raggiungibile e osservabile. La matrice di osservabilità è pari a

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ed è non singolare. Tutti i modi naturali sono quindi osservabili in uscita. La matrice di raggiungibilità è pari a

$$\mathcal{R} = ( B \quad AB \quad A^2B ) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ed ha rango pari a due (matrice singolare). Per mettere in evidenza il sottosistema raggiungibile si sceglie il seguente cambiamento di coordinate  $T$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice dinamica, nelle nuove coordinate, è data da

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e pertanto la matrice dinamica del sottosistema raggiungibile è

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ed è caratterizzata dagli autovalori  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_3 = 0$ . Si può quindi concludere che il modo naturale  $e^{\lambda_2 t} = e^t$  non è eccitabile con impulsi in ingresso<sup>1</sup> e quindi non compare nella risposta impulsiva in uscita (anche se osservabile). Gli altri due modi naturali compaiono nella risposta impulsiva in uscita.

<sup>1</sup>Quest'ultima considerazione è stata corretta il 21/05/2008.