Compito di Robotica I

Origine: Automazione Industriale, 10 Settembre 1991

[1] Determinare l'espressione analitica dei coefficienti di una traiettoria $\theta(t)$ cubica a tratti e continua in accelerazione (*spline*), che soddisfi alle seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{aligned}\theta(0) &= p_i\\ \theta(T_1) &= p_m\\ \theta(T_1+T_2) &= p_f\\ \dot\theta(0) &= v_i\\ \dot\theta(T_1+T_2) &= v_f\end{aligned}$$

Mostrare in particolare che il problema richiede di risolvere al più sistemi lineari di due equazioni in due incognite.

[2] Utilizzando i dati numerici

$$p_i = 0°, \quad p_m = 90°, \quad p_f = -180°, \quad v_i = 0°/\text{sec}, \quad v_f = 0°/\text{sec}$$

determinare quale deve essere il rapporto dei tempi T_1/T_2 in modo che la velocità nel passaggio per p_m sia nulla.

[3] Si consideri un semplice robot costituito da un singolo braccio che ruota nel piano orizzontale. L'inerzia del braccio rispetto all'asse di rotazione è pari a 10 Kg·m^2, mentre la coppia massima erogabile dal motore al giunto è 100 N·m.

(a) Se $T_1 = 1$ sec e $T_2 = 1.5$ sec, la traiettoria che ne risulta è effettivamente realizzabile?

(b) Scalare uniformemente il tempo totale $T = T_1+T_2$ in modo che la coppia del motore sia sempre ammissibile ed in saturazione almeno in un istante. Quale è il valore $T' = kT$ risultante?

[4] Discutere i seguenti problemi.

(a) Si può applicare la tecnica di scalatura uniforme sui singoli T_1 e/o T_2 anzichè su T?

(b) Si può applicare la tecnica di scalatura uniforme su T nel caso in cui v_i e v_f siano diversi da zero?

[150 minuti di tempo; libri aperti]

Soluzione

Parte 1

La traiettoria è composta di due cubiche $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ definite nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\theta_1(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 & t &\in [0, T_1] \\
\theta_2(t) &= b_0 + b_1(t - T_1) + b_2(t - T_1)^2 + b_3(t - T_1)^3 & t &\in [T_1, T_1 + T_2]
\end{aligned}$$

Le condizioni per determinare gli otto coefficienti sono:

$$\left.\begin{aligned}
\theta_1(0) &= p_i \\
\dot\theta_1(0) &= v_i \\
\theta_1(T_1) &= p_m \\
\theta_2(T_1) &= p_m \\
\theta_2(T_1 + T_2) &= p_f \\
\dot\theta_2(T_1 + T_2) &= v_f \\
\dot\theta_1(T_1) &= \dot\theta_2(T_1) \\
\ddot\theta_1(T_1) &= \ddot\theta_2(T_1)
\end{aligned}\right. \quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
a_0 &= p_i \\
a_1 &= v_i \\
p_i + v_i T_1 + a_2 T_1^2 + a_3 T_1^3 &= p_m \\
b_0 &= p_m \\
p_m + b_1 T_2 + b_2 T_2^2 + b_3 T_2^3 &= p_f \\
b_1 + 2 b_2 T_2 + 3 b_3 T_2^2 &= v_f \\
v_i + 2 a_2 T_1 + 3 a_3 T_1^2 &= b_1 \\
2 a_2 + 6 a_3 T_1 &= 2 b_2
\end{aligned} \tag{1}$$

È però conveniente definire in modo fittizio la velocità v_m nel punto p_m, in modo da decomporre il problema in due sottoproblemi lineari di ordine due. Posto allora

$$\begin{aligned}
\dot\theta_1(T_1) &= v_m \\
\dot\theta_2(T_1) &= v_m
\end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
v_i + 2 a_2 T_1 + 3 a_3 T_1^2 &= v_m \\
b_1 &= v_m
\end{aligned} \tag{2}$$

i coefficienti a_0, a_1, b_0 e b_1 sono immediatamente determinati in funzione dei dati e dell'incognita v_m dalle (1) e (2), mentre per i restanti coefficienti si ha:

$$\begin{bmatrix} T_1^2 & T_1^3 \\ 2T_1 & 3T_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_m - p_i - v_i T_1 \\ v_m - v_i \end{bmatrix} \tag{3a}$$

$$\begin{bmatrix} T_2^2 & T_2^3 \\ 2T_2 & 3T_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_f - p_m - v_m T_2 \\ v_f - v_m \end{bmatrix} \tag{3a}$$

Il determinante dei due sistemi (3), del tutto analoghi, vale $T_i^4 \neq 0$ $(i = 1, 2)$, da cui

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{3(p_m - p_i)}{T_1^2} - \frac{2v_i + v_m}{T_1} \\
a_3 &= -\frac{2(p_m - p_i)}{T_1^3} + \frac{v_i + v_m}{T_1^2} \\
b_2 &= \frac{3(p_f - p_m)}{T_2^2} - \frac{2v_m + v_f}{T_2} \\
b_3 &= -\frac{2(p_f - p_m)}{T_2^3} + \frac{v_m + v_f}{T_2^2}
\end{aligned} \tag{4}$$

La condizione di continuità dell'accelerazione in $t = T_1$ fornisce l'equazione aggiuntiva per ricavare v_m. Dalla

$$\ddot{\theta}_1(T_1) = \ddot{\theta}_2(T_1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2a_2 + 6a_3 T_1 = 2b_2 \tag{5}$$

si ottiene

$$v_m = \frac{T_1 T_2}{4(T_1 + T_2)} \left(\frac{6(p_m - p_i)}{T_1^2} + \frac{6(p_f - p_m)}{T_2^2} - 2\Big(\frac{v_i}{T_1} + \frac{v_f}{T_2}\Big) \right) \tag{6}$$

che inserita nella (4) fornisce i valori attuali dei coefficienti della *spline*. ■

Parte 2

Con i valori $p_i = 0°$, $p_m = 90°$, $p_f = -180°$, $v_i = v_f = 0°/\text{sec}$, si ha

$$v_m = \frac{135\, T_1 T_2}{T_1 + T_2} \left(\frac{1}{T_1^2} - \frac{3}{T_2^2} \right) \tag{7}$$

da cui

$$v_m = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{1}{3}}. \tag{8}$$

■

Parte 3

Il vincolo sulla coppia τ si traduce in uno di accelerazione massima, essendo $\tau = I\ddot{\theta}$ con $I = 10$ Kg·m^2 e $\tau_{\max} = 100$ N·m:

$$|\ddot{\theta}(t)| \leq 10 \cdot \frac{360}{2\pi} =: \ddot{\theta}_{\max} \quad (°/\text{sec}^2) \tag{9}$$

Le traiettorie *spline* sono ad accelerazione lineare a tratti. Il valore massimo viene quindi raggiunto in uno dei tre istanti $t = \{0, T_1, T_1 + T_2\}$. Occorre e basta che sia

$$\max\big\{ |\ddot{\theta}_1(0)|,\, |\ddot{\theta}_2(T_1)|,\, |\ddot{\theta}_2(T_1 + T_2)| \big\} \leq \ddot{\theta}_{\max}. \tag{10}$$

Nel caso considerato di velocità nulle agli estremi della traiettoria ($v_i = v_f = 0$) si ha

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1(0) = 2a_2 &= \frac{6(p_m - p_i)}{T_1^2} - \frac{2v_m}{T_1} \\ \ddot{\theta}_2(T_1) = 2b_2 &= \frac{6(p_f - p_m)}{T_2^2} - \frac{4v_m}{T_2} \\ \ddot{\theta}_2(T_1 + T_2) = 2b_2 + 6b_3 T_2 &= -\frac{6(p_f - p_m)}{T_2^2} + \frac{2v_m}{T_2} \end{aligned} \tag{11}$$

con

$$v_m = \frac{3\, T_1 T_2}{2(T_1 + T_2)} \left(\frac{(p_m - p_i)}{T_1^2} + \frac{(p_f - p_m)}{T_2^2} \right). \tag{12}$$

Da queste espressioni si deduce facilmente che una scalatura temporale uniforme

$$T_1' = kT_1, \qquad T_2' = kT_2 \tag{13}$$

modifica le accelerazioni in modo omogeneo

$$\ddot{\theta}_1'(0) = \frac{\ddot{\theta}_1(0)}{k^2}, \qquad \ddot{\theta}_2'(T_1) = \frac{\ddot{\theta}_2(T_1)}{k^2}, \qquad \ddot{\theta}_2'(T_1+T_2) = \frac{\ddot{\theta}_2(T_1+T_2)}{k^2}. \tag{14}$$

Con i valori $T_1 = 1$ sec e $T_2 = 1.5$ sec si ha $v_m = -27°/\text{sec}$ e

$$\begin{aligned} &\max\big\{|\ddot{\theta}_1(0)|,\, |\ddot{\theta}_2(T_1)|,\, |\ddot{\theta}_2(T_1+T_2)|\big\} = \\ &\qquad \max\big\{|594|,\, |-648|,\, |684|\big\} = 684 > 572.97 = \ddot{\theta}_{\max}. \end{aligned} \tag{15}$$

La traiettoria non è quindi realizzabile. Sfruttando la proprietà di scalatura uniforme (14), si ha che il minimo fattore k in (13) che rende la traiettoria ammissibile è

$$k = \sqrt{\frac{684}{572.97}} = 1.09, \tag{16}$$

corrispondente ad un rallentamento totale di circa il 10%. Si ottiene dunque $T' = 2.73$ sec, con la coppia saturata nell'istante finale. ■

Parte 4

Dalle espressioni (11) e (12) delle accelerazioni ai nodi e della velocità v_m è immediato vedere il loro carattere non omogeneo rispetto a scalature indipendenti dei singoli intervalli di tempo T_1 e T_2. In maniera analoga, la scalatura uniforme non può essere utilizzata neanche sul tempo totale $T_1 + T_2$ quando le velocità *temporali* sono *fissate* agli estremi e sono diverse da zero. La tecnica di scalatura uniforme si applica infatti in maniera diretta al caso di traiettorie la cui componente *geometrica* è assegnata in forma parametrica, mentre la legge oraria è modificabile. Nel caso qui considerato, è comunque possibile impostare un problema di ottimizzazione nelle variabili T_1 e T_2, minimizzando il tempo totale di attraversamento T con il vincolo sulle accelerazioni massime. Il problema risulta di natura fortemente nonlineare. ■