Prova Scritta di Robotica I

8 Gennaio 2009

Esercizio 1

Si consideri la rappresentazione asse/angolo dell'orientamento espressa dalla matrice di rotazione

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r},\theta) = \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^T + \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^T\right)\cos\theta + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})\sin\theta,$$

dove $\boldsymbol{r}$ è un versore ($\|\boldsymbol{r}\| = 1$) costante e l'angolo $\theta = \theta(t)$ cambia nel tempo. Si dimostri analiticamente che il vettore di velocità angolare associato è pari a

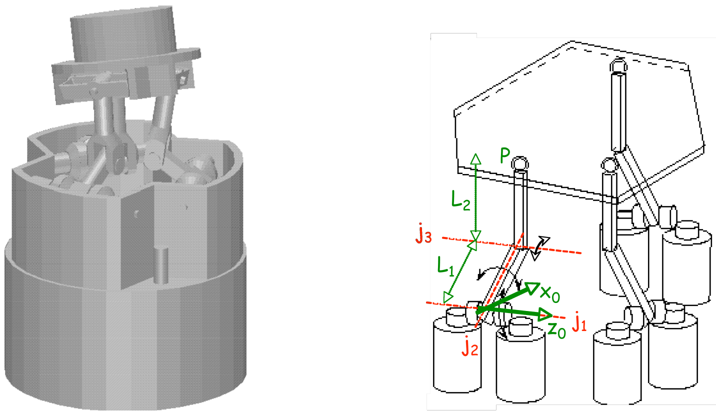
$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{r}\,\dot{\theta}.$$

Si pianifichi quindi un moto di pura rotazione di un angolo complessivo $\Delta\theta = -\pi/4$ intorno all'asse fisso $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}^T$ che sia continuo in accelerazione e abbia velocità e accelerazione angolare nulle all'istante iniziale $t = 0$ e finale $t = T$, determinando il tempo di moto T minimo in presenza del vincolo sulla norma del vettore di accelerazione angolare

$$\|\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)\| \le A = 5\,\mathrm{rad/s}^2, \qquad \forall t \in [0,T].$$

Esercizio 2

La figura mostra la piattaforma a cinematica parallela *SmartEE*. Ciascuno dei tre bracci (identici) di supporto della piastra superiore può vedersi come una struttura robotica a tre giunti rotatori, con un giunto universale (equivalente a due assi rotatori incidenti e ortogonali, attuati da due motori) alla base e un giunto rotatorio (passivo) a distanza L_1 dalla base. L'ancoraggio alla piastra superiore (a distanza L_2 dal terzo asse) avviene mediante un giunto sferico (passivo). La piastra superiore ha 6 gradi di libertà comandati dai sei motori alla base dei tre bracci. Si consideri un singolo braccio (isolato dagli altri) dalla sua base al punto P, come mostrato nella parte destra della figura (sono indicati gli assi di rotazione j_i dei tre giunti equivalenti e la terna base SR_0).



- Assegnare le terne secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg, fornendo la tabella con i relativi parametri. Determinare la posizione di P (cinematica diretta) rispetto alla terna SR_0 e lo Jacobiano $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})$ di dimensione 3×3 relativo alla velocità di tale punto.

- Verificare che il braccio è in singolarità se $\theta_2 = \pi/2$. Nella configurazione $\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} 0 & \pi/2 & 0 \end{pmatrix}^T$, determinare il rango dello Jacobiano e definire una base per lo spazio delle velocità realizzabili dal punto P.

[180 minuti di tempo; libri aperti]

Soluzioni

8 Gennaio 2009

Esercizio 1

Si sfrutta la relazione generale che lega la derivata rispetto al tempo di una matrice di rotazione alla velocità angolare

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{R} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}) = \dot{\boldsymbol{R}}\,\boldsymbol{R}^T$$

dove $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega})$ è la matrice anti-simmetrica costruita a partire dalle componenti del vettore $\boldsymbol{\omega}$. Tenendo presente che $\boldsymbol{r}$ è costante, si ha quindi

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}) = \dot{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{r},\theta)\boldsymbol{R}^T(\boldsymbol{r},\theta) = \left(-\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^T\right)\sin\theta\,\dot{\theta} + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})\cos\theta\,\dot{\theta}\right)\left(\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^T + \left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^T\right)\cos\theta - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})\sin\theta\right),$$

essendo $\boldsymbol{S}^T(\cdot) = -\boldsymbol{S}(\cdot)$. Svolgendo i prodotti, si deve tener conto delle seguenti identità:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{r} &= 1 \\
\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^T\right)\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{0} \qquad \text{(la matrice } \left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^T\right) \text{ è un proiettore in } (\mathcal{R}\{\boldsymbol{r}\})^{\perp}\text{)} \\
\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^T\right)^2 &= \boldsymbol{I}-\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^T \qquad \text{(il proiettore è idempotente)} \\
(\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}))^T = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{0} \qquad \text{(è il prodotto vettore di due vettori identici).}
\end{aligned}$$

Ne segue

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}) = \dot{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{r},\theta)\boldsymbol{R}^T(\boldsymbol{r},\theta) = -\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^T\right)\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta} + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\,\dot{\theta} - \boldsymbol{S}^2(\boldsymbol{r})\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}.$$

E' facile verificare che la matrice $\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^T - \boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}^2(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{O}$ in quanto

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^T - \boldsymbol{S}^2(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} r_x^2 & r_xr_y & r_xr_z \\ r_xr_y & r_y^2 & r_yr_z \\ r_xr_z & r_yr_z & r_z^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -(r_y^2+r_z^2) & r_xr_y & r_xr_z \\ r_xr_y & -(r_x^2+r_z^2) & r_yr_z \\ r_xr_z & r_yr_z & -(r_x^2+r_y^2) \end{pmatrix} = \boldsymbol{I},$$

tenendo conto che $r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = \|\boldsymbol{r}\|^2 = 1$. In conclusione,

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})\,\dot{\theta} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}\dot{\theta}) \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{r}\,\dot{\theta}.$$

Si noti anche che $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{r}\,\ddot{\theta}$.

Il moto di rotazione desiderato sarà caratterizzato dalla matrice di rotazione variabile con il tempo $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r},\theta(t))$, con un'opportuna legge oraria $\theta(t)$, $t \in [0,T]$. L'orientamento iniziale, espresso da una matrice di rotazione $\boldsymbol{R}_0 = \boldsymbol{R}(t)|_{t=0}$, non ha alcuna rilevanza nel problema considerato. Infatti, una volta pianificata la $\theta(t)$, l'orientamento complessivo all'istante t sarà dato dalla

$$\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{R}_0\,\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r},\theta(t)),$$

quale che sia la $\boldsymbol{R}_0$ ed essendo $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r},0) = \boldsymbol{I}$. Analogamente, anche il valore numerico di $\boldsymbol{r}$ non è importante per la risoluzione del problema.

Per soddisfare le condizioni al contorno imposte si può scegliere il polinomio quintico, normalizzato in $\tau = t/T \in [0,1]$,

$$\theta(\tau) = \Delta\theta\left(10\,\tau^3 - 15\,\tau^4 + 6\,\tau^5\right).$$

Le sue prime due derivate temporali

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(\tau) &= \frac{\Delta\theta}{T}\left(30\,\tau^2 - 60\,\tau^3 + 30\,\tau^4\right)\\ \ddot{\theta}(\tau) &= \frac{\Delta\theta}{T^2}\left(60\,\tau - 180\,\tau^2 + 120\,\tau^3\right)\end{aligned}$$

si annullano in $\tau = 0$ e $\tau = 1$ come richiesto. Poichè deve essere

$$\|\dot{\boldsymbol{\omega}}\| = \|\boldsymbol{r}\,\ddot{\theta}\| = \|\boldsymbol{r}\|\,|\ddot{\theta}| = |\ddot{\theta}| \leq A, \tag{1}$$

occorre semplicemente trovare il massimo (in modulo) di $\ddot{\theta}(\tau)$ nell'intervallo $\tau \in [0, 1]$. Ponendo a zero la derivata terza di $\theta(\tau)$

$$\frac{d^3\theta(\tau)}{dt^3} = \frac{60\,\Delta\theta}{T^3}\left(1 - 6\,\tau + 6\,\tau^2\right) = 0,$$

si trovano due radici interne all'intervallo in questione e simmetriche rispetto al suo centro

$$\tau_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}} \in [0, 1].$$

Valutando l'accelerazione in uno qualsiasi di questi due istanti, si ha il valore massimo in modulo

$$|\ddot{\theta}(\tau_1)| = |\ddot{\theta}(\tau_2)| = \frac{|\Delta\theta|}{T^2}\left(60\,\tau_1 - 180\,\tau_1^2 + 120\,\tau_1^3\right) = \frac{|\Delta\theta|}{T^2}\,\alpha, \qquad \text{con } \alpha = 5.7735.$$

Il tempo minimo si ricava quindi dal limite superiore ammissibile imposto dalla (1):

$$T \geq \sqrt{\frac{|\Delta\theta|\,\alpha}{A}}.$$

Con i dati del problema si ha $T_{\min} = 0.952$ s. In Figura 1 è riportato il risultato della pianificazione.

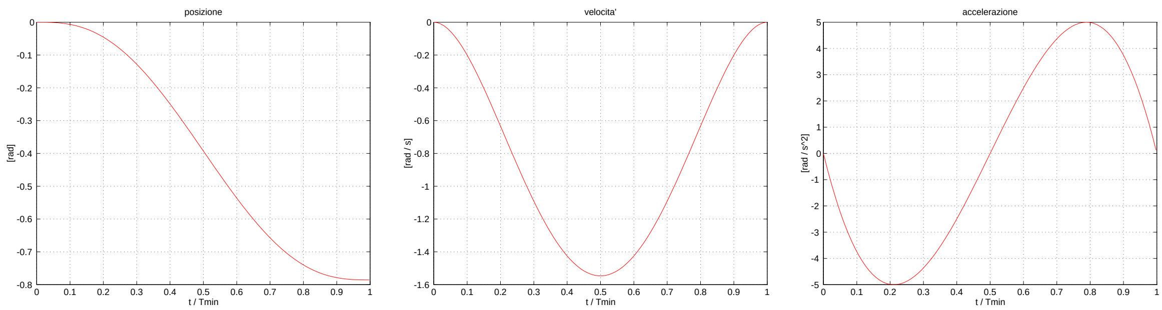


Figura 1: Profili di posizione, velocità e accelerazione (rispetto al tempo normalizzato $t/T_{\min}$)

Esercizio 2

Una possibile assegnazione delle terne SR_i, con $i = 0, 1, 2, 3$, è mostrata in Figura 2. Si noti che gli assi $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{z}_1$ e $\boldsymbol{y}_2$ sono sempre in un piano verticale, mentre l'asse $\boldsymbol{x}_2$ giace in tale piano solo per $\theta_2 = 0$ o π.

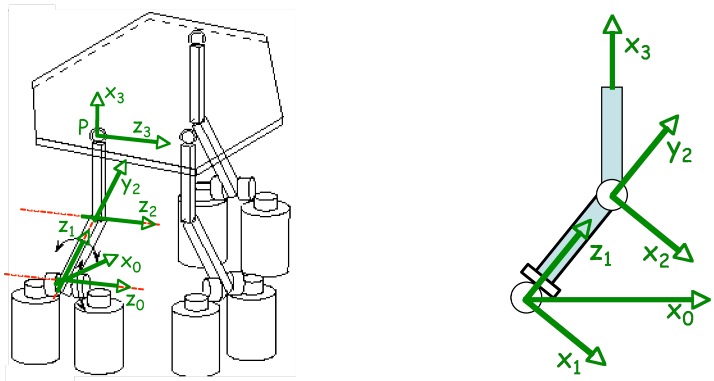


Figura 2: Assegnazione delle terne; a destra una generica vista laterale quando $\theta_2 = 0$

La tabella di Denavit-Hartenberg associata, nella quale $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{pmatrix}^T$, è la seguente:

i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	$-\frac{\pi}{2}$	0	0	θ_1
2	$\frac{\pi}{2}$	0	L_1	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

Le matrici di trasformazione omogenea sono

$$
\begin{aligned}
{}^0\boldsymbol{A}_1(\theta_1) &= \begin{pmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
{}^1\boldsymbol{A}_2(\theta_2) &= \begin{pmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
{}^2\boldsymbol{A}_3(\theta_3) &= \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & L_2 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & L_2 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

in cui si è posto $s_i = \sin\theta_i$, $c_i = \cos\theta_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Dalla cinematica diretta

$$\boldsymbol{T} = {}^0\boldsymbol{A}_1(\theta_1)\,{}^1\boldsymbol{A}_2(\theta_2)\,{}^2\boldsymbol{A}_3(\theta_3) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{p} \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}$$

si ricava il vettore di posizione $\boldsymbol{p}$ del punto P

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_1 s_1 + L_2(c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3) \\ L_1 c_1 + L_2(s_1 c_2 c_3 + c_1 s_3) \\ -L_2 s_2 c_3 \end{pmatrix}$$

e quindi lo Jacobiano nella $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}}$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} -L_1 c_1 - L_2(s_1 c_2 c_3 + c_1 s_3) & -L_2 c_1 s_2 c_3 & -L_2(c_1 c_2 s_3 + s_1 c_3) \\ -L_1 s_1 + L_2(c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3) & -L_2 s_1 s_2 c_3 & L_2(-s_1 c_2 s_3 + c_1 c_3) \\ 0 & -L_2 c_2 c_3 & L_2 s_2 s_3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Valutando la (2) per $\theta_2 = \pi/2$ si ha

$$\boldsymbol{J}(\theta_1, \pi/2, \theta_3) = \begin{pmatrix} -L_1 c_1 - L_2 c_1 s_3 & -L_2 c_1 c_3 & -L_2 s_1 c_3 \\ -L_1 s_1 - L_2 s_1 s_3 & -L_2 s_1 c_3 & L_2 c_1 c_3 \\ 0 & 0 & L_2 s_3 \end{pmatrix}.$$

Il braccio è allora in singolarità in quanto

$$\det \boldsymbol{J}(\theta_1, \pi/2, \theta_3) = L_2 s_3 \left(L_1 L_2 s_1 c_1 c_3 + L_2^2 s_1 c_1 s_3 c_3 - L_1 L_2 s_1 c_1 c_3 - L_2^2 s_1 c_1 s_3 c_3 \right) = L_2 s_3 \cdot 0 = 0.$$

Valutando ancora la (2) per $\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} 0 & \pi/2 & 0 \end{pmatrix}^T$ si ottiene la matrice costante

$$\boldsymbol{J}(0, \pi/2, 0) = \begin{pmatrix} -L_1 & -L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il rango di tale matrice è pari a 2 e una base per le velocità $\boldsymbol{v}$ realizzabili in questa configurazione è per esempio

$$\boldsymbol{v} \in \mathcal{R}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nella configurazione considerata, non è quindi possibile ottenere (mediante $\dot{\boldsymbol{\theta}}$) una velocità $\boldsymbol{v}$ con componente non nulla lungo la direzione $\boldsymbol{z}_0$.

* * * * *