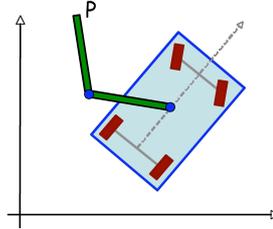


Prova Scritta di Robotica I

11 Settembre 2008

Esercizio



Si consideri il manipolatore mobile in figura, costituito da una base mobile su ruote ‘car-like’ con a bordo un manipolatore $2R$ planare. Siano: (x, y) le coordinate del centro asse delle ruote posteriori, θ l’orientamento assoluto della base mobile, ϕ l’angolo di sterzo delle ruote anteriori rispetto all’asse longitudinale della base, θ_1 l’angolo di giunto del primo braccio del manipolatore rispetto all’asse longitudinale della base, θ_2 l’angolo di giunto del secondo braccio del manipolatore rispetto al precedente. La lunghezza del veicolo (distanza tra asse posteriore e anteriore) è indicata con L . Il manipolatore è posizionato sulla base ad una distanza D dal centro dell’asse posteriore e lungo l’asse longitudinale del veicolo. Le lunghezze dei due bracci del manipolatore sono ℓ_1 e ℓ_2 . Si assuma un modello cinematico ideale della base mobile (vista ‘telescopica’, ossia con le coppie di ruote collassate al centro del relativo asse) e sia quindi v la velocità lineare centro asse delle ruote posteriori.

I comandi disponibili per questa struttura robotica sono in seguenti: la base mobile è attuata mediante l’accelerazione lineare $a (= \dot{v})$ delle ruote posteriori e la velocità angolare ω delle ruote anteriori sterzanti; il manipolatore è comandato mediante le accelerazioni di giunto $\ddot{\theta}_1$ e $\ddot{\theta}_2$.

Determinare il legame istantaneo tra i quattro comandi $(a, \omega, \ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2)$ e l’accelerazione lineare (\ddot{x}_P, \ddot{y}_P) dell’estremità P del manipolatore nella forma

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_P \\ \ddot{y}_P \end{pmatrix} = A(\theta, \phi, \theta_1, \theta_2, v) \begin{pmatrix} a \\ \omega \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + b(\theta, \phi, \theta_1, \theta_2, v, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2).$$

Verificare che la velocità lineare del punto P è indipendente da ω e che la dipendenza dell’accelerazione lineare del punto P da ω svanisce quando la velocità lineare v delle ruote posteriori è nulla. *Opzionale: Caratterizzare le singolarità della matrice A di dimensione (2×4) .*

Quesito

Per un robot manipolatore articolato, sia assegnato un cammino parametrico continuo e sufficientemente differenziabile da una configurazione iniziale q_0 ad una finale q_1 nello spazio dei giunti. Il robot è soggetto a vincoli di massima velocità e massima accelerazione ai giunti. Motivare qualitativamente la correttezza della seguente affermazione: “una legge oraria di tipo trapezoidale in velocità fornisce un tempo totale di esecuzione da fermo a fermo sul cammino *inferiore* a quello ottenibile con una qualsiasi altra legge oraria costituita da un unico polinomio interpolante di grado arbitrario”.

[150 minuti di tempo; libri aperti]

Soluzioni

11 Settembre 2008

Esercizio

Si tratta di combinare i modelli cinematici della base mobile e del manipolatore, e di estenderli al secondo ordine differenziale.

Per la base mobile, il modello ‘car-like’ con trazione posteriore (valido per $|\phi| \neq \pi/2$) è:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta v \\ \sin \theta v \\ \frac{1}{L} \tan \phi v \\ \omega \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Per ottenere un legame in accelerazione, basta differenziare rispetto al tempo tale modello cinematico del primo ordine tenendo presente che $\dot{v} = a$:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \dot{v} - \sin \theta \dot{\theta} v \\ \sin \theta \dot{v} + \cos \theta \dot{\theta} v \\ \frac{1}{L} \tan \phi \dot{v} + \frac{1}{L \cos^2 \phi} \dot{\phi} v \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta a - \frac{1}{L} \sin \theta \tan \phi v^2 \\ \sin \theta a + \frac{1}{L} \cos \theta \tan \phi v^2 \\ \frac{1}{L} \tan \phi a + \frac{1}{L \cos^2 \phi} \omega v \\ \dot{\omega} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

in cui la quarta equazione non verrà utilizzata nel seguito. Si noti che la dipendenza di $\ddot{\theta}$ da ω svanisce quando $v = 0$.

La cinematica diretta associata al punto P si può scrivere come

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + R(\theta) \text{kin}(\theta_1, \theta_2),$$

dove

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

è la matrice di rotazione *planare* che individua l’orientamento della base mobile, mentre

$$\text{kin}(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} \text{kin}_x(\theta_1, \theta_2) \\ \text{kin}_y(\theta_1, \theta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} + \ell_1 \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix} + \ell_2 \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

fornisce la cinematica diretta del solo braccio manipolatore rispetto alla terna solidale alla base mobile (con origine in (x, y) e orientamento θ).

Si terrà conto delle seguenti relazioni sulla derivata di temporale di una matrice di rotazione planare (che sono una specializzazione di quelle generali tridimensionali):

$$\dot{R}(\theta) = S(\dot{\theta})R(\theta) = R(\theta)S(\dot{\theta}), \quad S(\dot{\theta}) = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta} \\ \dot{\theta} & 0 \end{pmatrix}, \quad S^2(\dot{\theta}) = -\dot{\theta}^2 \cdot I_{2 \times 2}. \quad (3)$$

Differenziando una volta l’espressione della cinematica diretta si ha

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + S(\dot{\theta})R(\theta) \text{kin}(\theta_1, \theta_2) + R(\theta) J(\theta_1, \theta_2) \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

in cui compare lo Jacobiano analitico (2×2) del manipolatore (considerato a base fissa)

$$J(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \text{kin}_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \text{kin}_x}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \text{kin}_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \text{kin}_y}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\ell_1 s_1 + \ell_2 s_{12}) & -\ell_2 s_{12} \\ \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} & \ell_2 c_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{kin}_y & -\ell_2 s_{12} \\ \text{kin}_x - D & \ell_2 c_{12} \end{pmatrix}$$

con la usuale notazione $s_1 = \sin \theta_1$, $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$ e similmente per i coseni. Si noti che la velocità lineare di P in (4) è indipendente da ω , mentre dipende dalla velocità v attraverso \dot{x} , \dot{y} e $\dot{\theta}$ (utilizzando il modello cinematico del primo ordine (1) della base mobile).

Differenziando una seconda volta, si ottiene

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_P \\ \ddot{y}_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + [S(\ddot{\theta})R(\theta) + S^2(\dot{\theta})\dot{R}(\theta)] \text{kin}(\theta_1, \theta_2) + 2S(\dot{\theta})R(\theta)J(\theta_1, \theta_2) \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + R(\theta) \left[J(\theta_1, \theta_2) \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \dot{J}(\theta_1, \theta_2) \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \right], \quad (5)$$

con

$$\dot{J}(\theta_1, \theta_2) = - \begin{pmatrix} \ell_1 c_1 \dot{\theta}_1 + \ell_2 c_{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & \ell_2 c_{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \ell_1 s_1 \dot{\theta}_1 + \ell_2 s_{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & \ell_2 s_{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{pmatrix}.$$

L'accelerazione lineare di P in (5) dipenderà quindi anche da ω attraverso $\ddot{\theta}$ (utilizzando il modello cinematico del secondo ordine (2) della base mobile), fintanto che $v \neq 0$.

Sfruttando le proprietà (3), l'espressione (5) si può riorganizzare come

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_P \\ \ddot{y}_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + R(\theta) \left\{ [S(\ddot{\theta}) - \dot{\theta}^2 \cdot I_{2 \times 2}] \text{kin}(\theta_1, \theta_2) + 2S(\dot{\theta})J(\theta_1, \theta_2) \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + J(\theta_1, \theta_2) \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \dot{J}(\theta_1, \theta_2) \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \right\}. \quad (6)$$

Si noti inoltre che, nelle (2), l'accelerazione lineare della base mobile può risciversi mettendo in evidenza la matrice di rotazione $R(\theta)$:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} a \\ \frac{1}{L} \tan \phi v^2 \end{pmatrix}.$$

Combinando ora le equazioni (2) e (6) di base e manipolatore e riorganizzando i termini, si otterrà la relazione cercata

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_P \\ \ddot{y}_P \end{pmatrix} = A(\theta, \phi, \theta_1, \theta_2, v) \begin{pmatrix} a \\ \omega \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + b(\theta, \phi, \theta_1, \theta_2, v, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2),$$

con la matrice di dimensioni (2×4)

$$A(\theta, \phi, \theta_1, \theta_2, v) = R(\theta) \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\tan \phi}{L} \begin{bmatrix} -\text{kin}_y(\theta_1, \theta_2) \\ \text{kin}_x(\theta_1, \theta_2) \end{bmatrix} \frac{v}{L \cos^2 \phi} \begin{bmatrix} -\text{kin}_y(\theta_1, \theta_2) \\ \text{kin}_x(\theta_1, \theta_2) \end{bmatrix} J_{2 \times 2}(\theta_1, \theta_2) \right)$$

e il vettore a 2 componenti

$$b(\theta, \phi, \theta_1, \theta_2, v, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = R(\theta) \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v^2}{L} \tan \phi \end{pmatrix} - \dot{\theta}^2 \text{kin}(\theta_1, \theta_2) + [2S(\dot{\theta})J(\theta_1, \theta_2) + \dot{J}(\theta_1, \theta_2)] \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \right\},$$

dove occorre ancora sostituire dalla (1) la $\dot{\theta} = \frac{v}{L} \tan \phi$.

La matrice A svolge il ruolo di uno Jacobiano per questo manipolatore mobile, relativamente al compito di movimentare l'organo terminale P . Data la presenza di vincoli anolonomi nella struttura, tale matrice è detta anche "NMM Jacobian" (NMM = Nonholonomic Mobile Manipulator) e può essere utilizzata per progettare un controllore cinematico del moto dell'organo terminale. La peculiarità in questo caso particolare è che i comandi disponibili sono di tipo misto, sia al primo livello differenziale (ω) che al secondo (a , $\ddot{\theta}_1$ e $\ddot{\theta}_2$).

(Da questo punto in poi la soluzione del compito era opzionale.) E' immediato verificare che le singolarità della matrice A non dipendono dall'orientamento θ (come neanche dalla posizione (x, y)). In termini equivalenti, basta considerare l'espressione dell'accelerazione lineare di P nella terna solidale alla base mobile:

$$\begin{pmatrix} {}^{mob}\ddot{x}_P \\ {}^{mob}\ddot{y}_P \end{pmatrix} = R^T(\theta) \begin{pmatrix} \ddot{x}_P \\ \ddot{y}_P \end{pmatrix}.$$

Pertanto, la matrice $A' = R^T A$, ancora di dimensioni (2×4) ,

$$A'(\phi, \theta_1, \theta_2, v) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\tan \phi}{L} \text{kin}_y & -\frac{v}{L \cos^2 \phi} \text{kin}_y & -\text{kin}_y & -\ell_2 s_{12} \\ \frac{\tan \phi}{L} \text{kin}_x & \frac{v}{L \cos^2 \phi} \text{kin}_x & \text{kin}_x - D & \ell_2 c_{12} \end{pmatrix}$$

risulterà singolare (con rango pari ad 1) se e solo se tutti i suoi sei minori (2×2) risultano contemporaneamente nulli. Indicato con (i, j) il minore ottenuto estraendo la colonna i e la colonna $j > i$ da A , si hanno pertanto le seguenti condizioni necessarie e sufficienti di singolarità:

$$(1, 2) \rightarrow \frac{v}{L \cos^2 \phi} \text{kin}_x(\theta_1, \theta_2) = 0$$

$$(1, 3) \rightarrow \text{kin}_x(\theta_1, \theta_2) - D + \frac{D}{L} \tan \phi \text{kin}_y(\theta_1, \theta_2) = 0$$

$$(1, 4) \rightarrow \ell_2 [\sin(\theta_1 + \theta_2) \text{kin}_x(\theta_1, \theta_2) - \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{kin}_y(\theta_1, \theta_2)] \frac{\tan \phi}{L} + \ell_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) = 0$$

$$(2, 3) \rightarrow \frac{D}{L} \frac{v}{\cos^2 \phi} \text{kin}_y(\theta_1, \theta_2) = 0$$

$$(2, 4) \rightarrow \frac{\ell_2}{L} \frac{v}{\cos^2 \phi} [\sin(\theta_1 + \theta_2) \text{kin}_x(\theta_1, \theta_2) - \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{kin}_y(\theta_1, \theta_2)] = 0$$

$$(3, 4) \rightarrow \ell_2 (\sin(\theta_1 + \theta_2)(\text{kin}_x(\theta_1, \theta_2) - D) - \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{kin}_y(\theta_1, \theta_2)) = \ell_1 \ell_2 \sin \theta_2 = \det J = 0.$$

L'analisi è semplice anche se tediosa. Dall'espressione del minore (3,4), si può anzitutto dire che una condizione necessaria di singolarità è che risulti $\sin \theta_2 = 0$, ossia il manipolatore sia steso o ripiegato su se stesso (le singolarità del $2R$ a base fissa). Se inoltre $v \neq 0$, è facile mostrare che almeno uno dei tre minori (1,2), (2,3) o (2,4) è comunque diverso da zero quando il braccio manipolatore è in singolarità. Ne segue che, per avere una singolarità della matrice A' (e quindi della matrice A originale) è necessario che sia contemporaneamente

$$\sin \theta_2 = 0, \quad v = 0 \quad (\text{base istantaneamente ferma}). \quad (7)$$

Nella situazione (7), i due minori (1,3) e (1,4) sono gli unici che possono essere non nulli. In particolare, si avrà caduta di rango per la matrice A' quando

$$(1, 3)|_{\sin \theta_2=0} = (1, 4)|_{\sin \theta_2=0} = 0 \quad \iff \quad \cos \theta_1 + \frac{D}{L} \tan \phi \sin \theta_1 = 0. \quad (8)$$

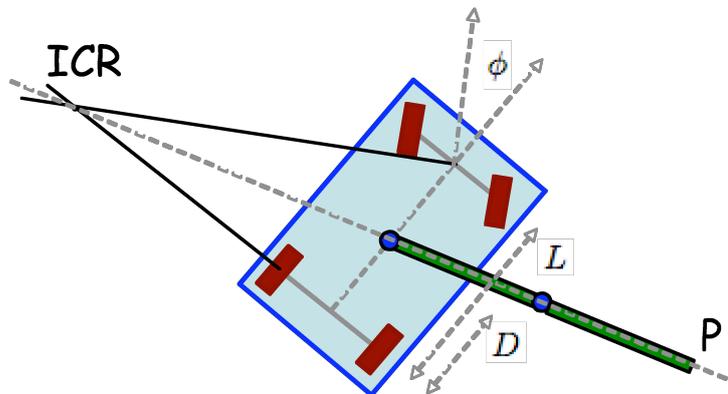


Figura 1: Una configurazione singolare per la matrice A del manipolatore mobile (con $v = 0$)

La condizione (8) ha una semplice interpretazione in termini di centro istantaneo di rotazione (ICR) del veicolo mobile (vedi la Figura 1). Infatti, fissati i parametri D e L e dato un valore di angolo di sterzo ϕ (con $|\phi| < \pi/2$), la (8) risulta soddisfatta dalla coppia di valori (che differiscono di π)

$$\theta_1 = \text{ATAN2}\left\{\pm \frac{L}{D}, \mp \tan \phi\right\},$$

ossia quando il manipolatore è comunque allineato (steso o ripiegato, con $\sin \theta_2 = 0$) lungo la retta passante per la sua base (sul veicolo fermo, con $v = 0$) e per l'ICR. In questa situazione, non è possibile imporre mediante i comandi $(a, \omega, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ un'accelerazione arbitraria al punto P lungo la direzione di tale retta.

Quesito

L'affermazione è corretta. Da un lato le discontinuità in accelerazione della legge oraria trapezoidale permettono di sfruttare al massimo le transizioni da/a velocità nulla. Inoltre, la massima accelerazione (in valore assoluto) può essere mantenuta per un certo intervallo di tempo, con conseguente riduzione del tempo totale di moto. Infine, una volta raggiunta la velocità massima per un generico giunto, questa può essere mantenuta per un intervallo di tempo di durata strettamente positiva. Ovviamente, le transizioni tra fasi di accelerazione massima, accelerazione nulla e decelerazione massima dei singoli giunti dipenderanno dai valori numerici dei limiti di velocità e accelerazione nonché dagli spostamenti relativi dei diversi giunti, visto che il moto complessivo sarà coordinato.

Viceversa, una qualsiasi legge polinomiale che interpoli il valore iniziale e finale del parametro del cammino, con condizioni al contorno nulle sulle derivate temporali (almeno in velocità, ma tipicamente su un numero di derivate crescente con il grado del polinomio utilizzato), assume il valore massimo (in valore assoluto) di velocità in un solo istante (quello intermedio) e valori massimi di accelerazione in due soli istanti (simmetrici rispetto a quello intermedio).

Da un punto di vista di minimizzazione del tempo di moto, la legge oraria bang-coast-bang in accelerazione è quindi da preferirsi. Se si vuole invece garantire una continuità in accelerazione (ed eventualmente anche di derivate temporali superiori), la scelta ricade su una legge oraria polinomiale. E' però anche possibile sfruttare un approccio di pianificazione combinato (più complesso

da calcolare), in cui le fasi di massima accelerazione/decelerazione, caratteristiche di un moto complessivamente più rapido, sono congiunte da transizioni di tipo polinomiale, per garantire la necessaria continuità all'intera traiettoria.

* * * * *