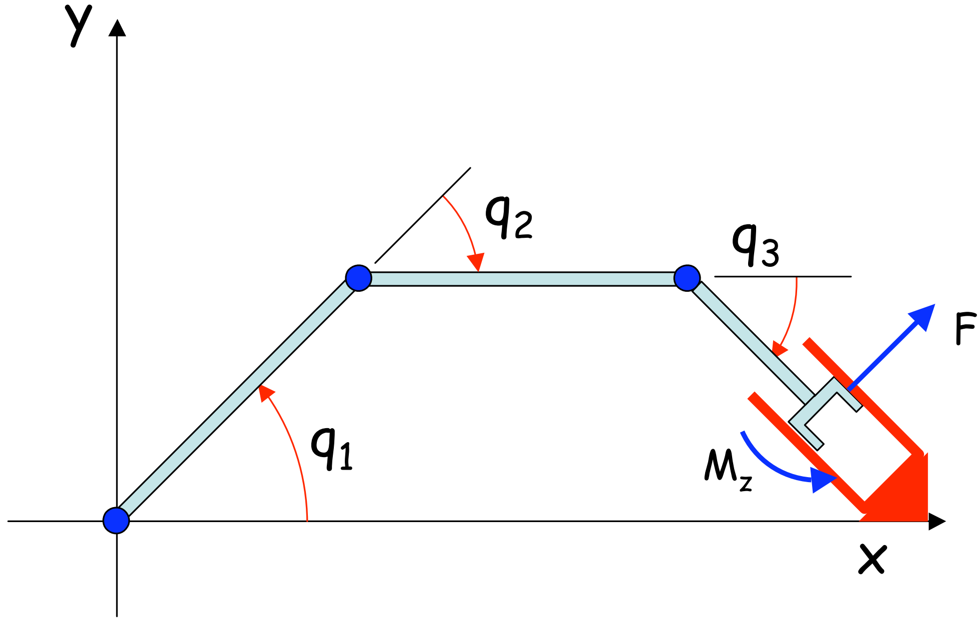
Prova Scritta di Robotica I

5 Aprile 2005

Esercizio 1

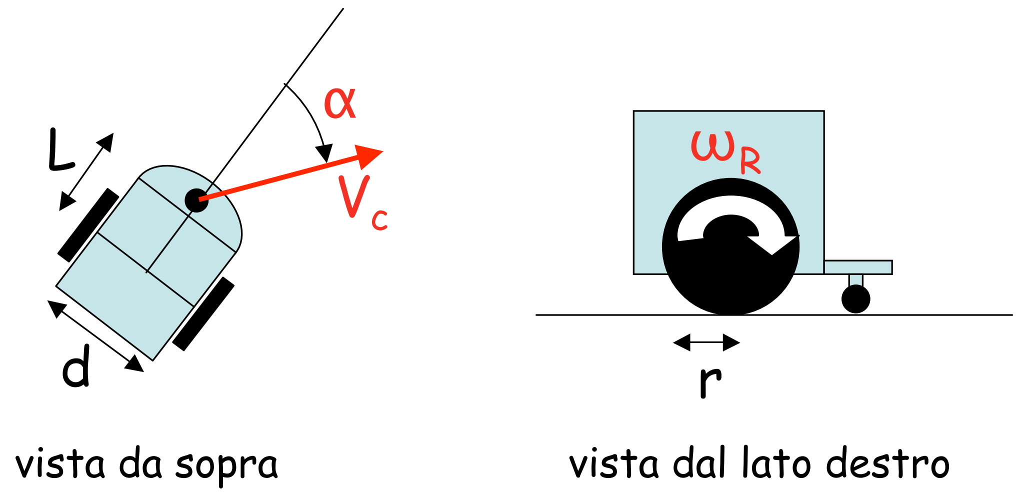
Si consideri un robot 3R planare il cui organo terminale è in contatto bilaterale con la cavità interna di una struttura fissa nell'ambiente, come mostrato in figura. Le lunghezze dei bracci del robot sono pari a $\ell_1 = \ell_2 = 1$ [m] e $\ell_3 = 0.5$ [m]. Nella configurazione illustrata si ha $q = (\pi/4, -\pi/4, -\pi/4) = \bar{q}$.



1. Si determini il valore delle coppie statiche ai giunti in grado di applicare sulla cavità una forza $F = 10$ [N] nella direzione indicata in figura ed un momento $M_z = 2$ [Nm] intorno ad un asse normale al piano.

2. A partire da robot fermo ($\dot{q} = 0$), quali accelerazioni di giunto sono necessarie per imporre all'organo terminale una accelerazione pari a di 1 [m/s^2] lungo la direzione di uscita dalla cavità?

Esercizio 2



Per il robot mobile in figura, l'azionamento istantaneo delle due ruote indipendenti deve imporre al punto d'appoggio anteriore, una sfera passiva utilizzata come castor, una velocità lineare $V_c = 1$ [m/s] nella direzione indicata (inclinata di un generico angolo α rispetto all'asse di avanzamento del veicolo). I dati geometrici del robot sono i seguenti: distanza interasse $d = 0.4$ [m]; distanza castor–asse delle ruote $L = 0.35$ [m]; raggio delle ruote $r = 0.15$ [m]. Quale deve essere il valore delle velocità di rotolamento ω_R e ω_L delle ruote destra e sinistra?

[150 minuti di tempo; libri aperti]

Soluzioni

5 Aprile 2005

Soluzione Esercizio 1

Poichè si richiede di applicare una forza nel piano (x, y) ed un momento intorno all'asse z, per utilizzare correttamente la teoria della dualità cinetostatica si deve considerare la cinematica diretta del braccio relativamente alle variabili di compito $r = (p_x, p_y, \alpha_z)$, dove α_z è l'angolo di orientamento dell'end-effector (terzo braccio) rispetto all'asse fisso x. Si ha

$$r = \begin{bmatrix} \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} + \ell_3 c_{123} \\ \ell_1 s_1 + \ell_2 s_{12} + \ell_3 s_{123} \\ q_1 + q_2 + q_3 \end{bmatrix},$$

con la notazione usuale $c_{123} = \cos(q_1 + q_2 + q_3)$. Dalla derivazione analitica si ottiene

$$\dot{r} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\ell_1 s_1 + \ell_2 s_{12} + \ell_3 s_{123}) & -(\ell_2 s_{12} + \ell_3 s_{123}) & -\ell_3 s_{123} \\ \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} + \ell_3 c_{123} & \ell_2 c_{12} + \ell_3 c_{123} & \ell_3 c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = J(q)\dot{q}.$$

Si noti che, essendo $\dot{\alpha}_z = \omega_z$ (moto planare), lo Jacobiano analitico 3×3 così determinato coincide con le tre righe di interesse nello Jacobiano geometrico. Pertanto le coppie ai giunti che permettono di applicare il vettore di forza $F = (F_x, F_y)$ ed il momento (scalare) M_z nella configurazione $\bar{q}$ indicata sono date da

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = J^T(\bar{q}) \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & 1 + \frac{3\sqrt{2}}{4} & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{10}{\sqrt{2}} \\ \frac{10}{\sqrt{2}} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 + \frac{10}{\sqrt{2}} \\ 7 + \frac{10}{\sqrt{2}} \\ 7 \end{bmatrix} \text{ [Nm]}.$$

Inoltre, dal legame in accelerazione $\ddot{r} = J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q)\dot{q}$, essendo $\dot{q} = 0$ si ha

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} = J^{-1}(\bar{q}) \begin{bmatrix} \ddot{p}_x \\ \ddot{p}_y \\ \ddot{\alpha}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 + \sqrt{2} & 1 & -\frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ -1 & -1 & \frac{2+\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ [rad/s}^2\text{]}.$$

Si noti che il robot non ha gradi di libertà ridondanti per tale compito di moto (è assegnata anche l'accelerazione angolare $\ddot{\alpha}_z = 0$, dato il contatto interno alla cavità).

Soluzione Esercizio 2

Si può procedere sia in modo analitico che geometrico, basandosi in questo secondo caso sul calcolo del centro istantaneo di rotazione (ICR) del robot. Seguendo la prima strada, si ha per la posizione del castor

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}.$$

Differenziando si ottiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + L\dot{\theta} \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \stackrel{\downarrow}{=} V_c\, R(\theta) \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}, \tag{1}$$

dove $R(\theta)$ è la matrice 2×2 di rotazione (planare) di un angolo θ e V_c è il modulo della velocità imposta al castor (si ricordi la convenzione sugli angoli, positivi in senso antiorario). Sostituendo nella (1) le equazioni della cinematica del robot

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \qquad \dot{\theta} = \omega,$$

le relazioni tra comandi lineari ed angolari del robot e velocità lineari al suolo delle due ruote

$$v = \frac{v_L + v_R}{2} \qquad \omega = \frac{v_R - v_L}{d},$$

e premoltiplicando la (1) per $R^T(\theta)$ si ottiene

$$V_c \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{L}{d} & -\frac{L}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_R \\ v_L \end{bmatrix}.$$

Risolvendo tale sistema (il che è possibile nell'ipotesi $L \neq 0$), poichè $\omega_R = v_R/r$ e $\omega_L = v_L/r$, si ottiene il risultato finale:

$$\omega_R = \frac{V_c}{r}\left(\cos\alpha + \frac{d}{2L}\sin\alpha\right) \qquad \omega_L = \frac{V_c}{r}\left(\cos\alpha - \frac{d}{2L}\sin\alpha\right). \tag{2}$$

Come casi particolari della (2), si noti che per $\alpha = 0$ risulta $\omega_R = \omega_L = V_c/r$ (atto di moto rettilineo) mentre per $\alpha = \pi/2$ si ha $\omega_R = -\omega_L = d\,V_c/(2rL)$ (rotazione sul posto). Inserendo infine i dati numerici del problema, la (2) diventa

$$\omega_R = \frac{20}{3}\left(\cos\alpha + \frac{4}{7}\sin\alpha\right) \qquad \omega_L = \frac{20}{3}\left(\cos\alpha - \frac{4}{7}\sin\alpha\right).$$