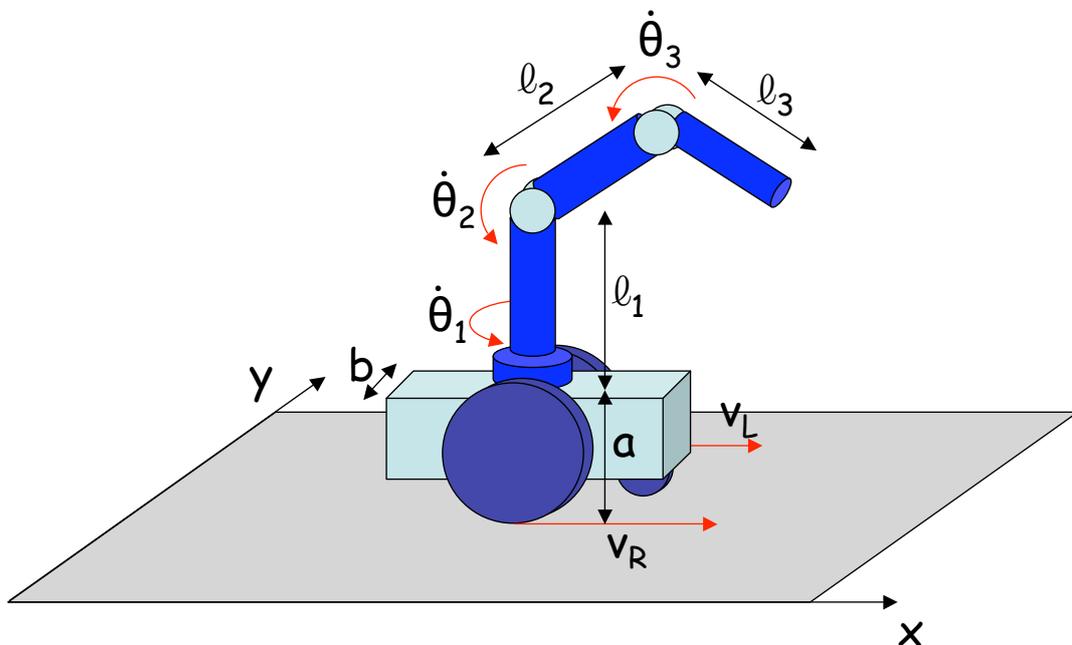


Prova Scritta di Robotica I

12 Gennaio 2005

Esercizio 1

Si consideri il robot (un manipolatore su base mobile) in figura, in moto sul piano (x, y) . La base mobile è dotata di due ruote fisse poste a distanza b su di un asse comune e comandate indipendentemente con velocità (lineari al suolo) v_R e v_L , e di una ruota passiva d'appoggio, orientabile e non centrata (castor). Il braccio manipolatore è un $3R$ a struttura antropomorfa, comandato con velocità (angolari) di giunto $\dot{\theta}_1$ (piantone), $\dot{\theta}_2$ (spalla) e $\dot{\theta}_3$ (gomito). Il manipolatore è montato nel centro di simmetria della base (alta a da terra), con asse del piantone passante per l'asse comune delle due ruote attuate.



1. Fornire l'espressione analitica della posizione dell'organo terminale del robot in funzione delle coordinate generalizzate del robot.
2. Determinare la relazione tra le cinque velocità di comando e la velocità lineare (un vettore tridimensionale) dell'organo terminale.
3. Illustrare in modo schematico i passi necessari per determinare tutte le singolarità cinematiche dell'intera struttura robotica. Individuare almeno due configurazioni singolari, sfruttando intuitivamente la proprietà di perdita di mobilità direzionale dell'organo terminale in tali configurazioni.
4. Impostare uno schema di controllo cinematico basato sull'inversione differenziale del moto cartesiano desiderato.

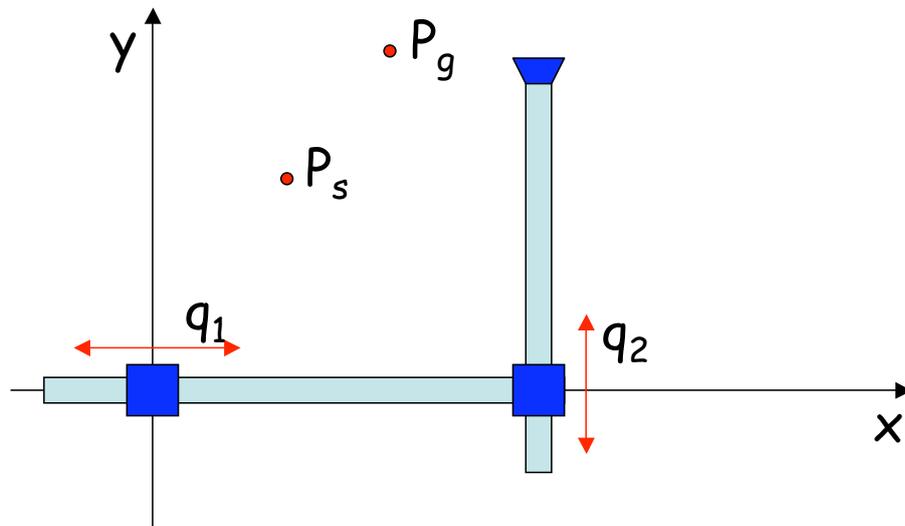
Esercizio 2

Gli attuatori del robot planare cartesiano in figura sono soggetti ai vincoli

$$|\ddot{q}_i| \leq A, \quad i = 1, 2,$$

con accelerazione/decelerazione massima uguale per i due giunti.

1. Determinare la struttura (cammino e legge oraria) del moto a tempo minimo da fermo a fermo tra due punti cartesiani generici P_s e P_g .
2. Determinare la legge oraria a tempo minimo per lo stesso compito del punto 1., ma su un cammino cartesiano rettilineo congiungente P_s con P_g .
3. Quale dei due moti precedenti avviene in modo “coordinato” a livello dei giunti? Qual è più rapido?
4. Discutere le modifiche nel caso in cui siano presenti i vincoli aggiuntivi di velocità $|\dot{q}_i| \leq V$, $i = 1, 2$, con velocità massima (in modulo) uguale per i due giunti.



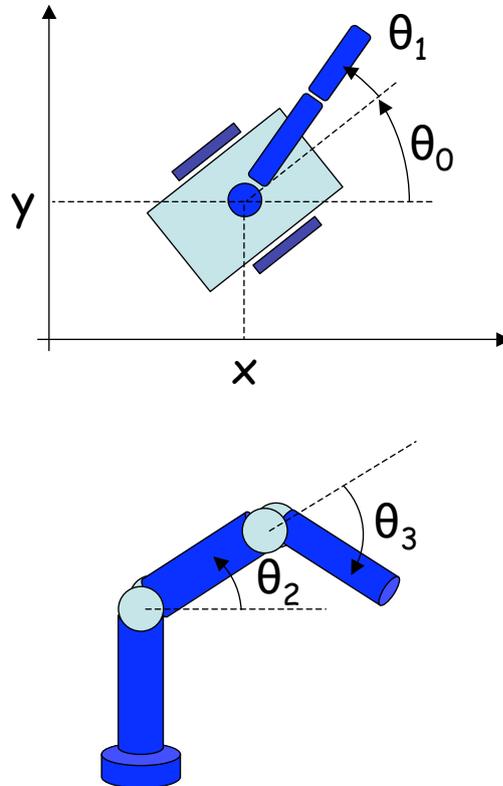
[210 minuti di tempo; libri aperti]

Soluzioni

12 Gennaio 2005

Soluzione Esercizio 1

Le coordinate generalizzate sono mostrate nelle due figure seguenti (vista del robot dall'alto e vista laterale del solo manipolatore), dove (x, y) è la posizione del centro dell'asse delle ruote, θ_0 è l'orientamento della base rispetto all'asse delle ascisse, l'angolo θ_1 del piantone è riferito all'asse di avanzamento della base mobile, l'angolo θ_2 del gomito è riferito all'asse orizzontale e quello θ_3 della spalla è rispetto all'asse del secondo braccio. Si pone $q = (x, y, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$.



La cinematica diretta relativa alla posizione p dell'organo terminale si calcola con facilità:

$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + (\ell_2 \cos \theta_2 + \ell_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \cos(\theta_0 + \theta_1) \\ y + (\ell_2 \cos \theta_2 + \ell_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \sin(\theta_0 + \theta_1) \\ a + \ell_1 + \ell_2 \sin \theta_2 + \ell_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Tale risultato si può ricavare a partire dalla cinematica del solo manipolatore (assegnando le terne di Denavit-Hartenberg ed utilizzando le matrici di trasformazione

omogenea associate), avendo scelto nella terna SR_0 l'asse x_o orientato nella direzione di avanzamento della base mobile e l'origine O_0 sul piano superiore della base. Si ottiene

$$\begin{aligned} {}^0T_3 &= {}^0A_1(\theta_1){}^1A_2(\theta_2){}^2A_3(\theta_3) = \begin{bmatrix} {}^0R_3 & {}^0p_3 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^0R_3 & (\ell_2 \cos \theta_2 + \ell_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \cos \theta_1 \\ & (\ell_2 \cos \theta_2 + \ell_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \sin \theta_1 \\ & \ell_2 \sin \theta_2 + \ell_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Per tener conto del posizionamento ed orientamento della base mobile rispetto al sistema di riferimento globale SR_w , occorre utilizzare la matrice di trasformazione omogenea

$${}^wT_0(x, y, \theta_0) = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 & 0 & x \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e comporre le trasformazioni

$${}^wT_0(x, y, \theta_0){}^0T_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{bmatrix} {}^wR_3 & {}^w p_3 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Il risultato $p = {}^w p_3$ è quello fornito dalla (1). Si noti che θ_0 e θ_1 compaiono in (1) esclusivamente come somma (agiscono di fatto nello stesso modo). La struttura ha quindi certamente degli automovimenti di ampiezza arbitraria.

Per il calcolo del legame differenziale tra i cinque comandi di velocità e la velocità lineare $v = \dot{p}$ dell'organo terminale, si deve tenere conto delle caratteristiche di anolonomia della base mobile che inducono un vincolo scalare tra alcune derivate delle coordinate generalizzate. Differenziando infatti il legame (1) si ottiene

$$v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = J(q) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

con la matrice $J(q) = \partial p(q)/\partial q$, di dimensioni (3×6) , data da

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -(\ell_2 c_2 + \ell_3 c_{23}) s_{01} & -(\ell_2 c_2 + \ell_3 c_{23}) s_{01} & -(\ell_2 s_2 + \ell_3 s_{23}) c_{01} & -\ell_3 s_{23} c_{01} \\ 0 & 1 & (\ell_2 c_2 + \ell_3 c_{23}) c_{01} & (\ell_2 c_2 + \ell_3 c_{23}) c_{01} & -(\ell_2 s_2 + \ell_3 s_{23}) s_{01} & -\ell_3 s_{23} s_{01} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ell_2 c_2 + \ell_3 c_{23} & \ell_3 c_{23} \end{bmatrix},$$

dove si è usata al solito la notazione compatta $s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$, $c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$. Come previsto, la terza e quarta colonna sono identiche.

Le equazioni del moto della base anolonomia sono

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & 0 \\ s_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \omega \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} w \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{b} & -\frac{1}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_R \\ v_L \end{bmatrix}$$

dove w e ω sono le velocità lineare e angolare della base. Combinando si ottiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix} = G(\theta_0) \begin{bmatrix} v_R \\ v_L \end{bmatrix}, \quad (3)$$

con la matrice (3×2)

$$G(\theta_0) = \begin{bmatrix} \frac{c_0}{2} & \frac{c_0}{2} \\ \frac{s_0}{2} & \frac{s_0}{2} \\ \frac{1}{b} & -\frac{1}{b} \end{bmatrix}.$$

Sostituendo la (3) nella (2) si ottiene il legame cercato

$$v = H(q) \begin{bmatrix} v_R \\ v_L \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

dove la matrice (3×5)

$$H(q) = J(q) \begin{bmatrix} G(\theta_0) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 2} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

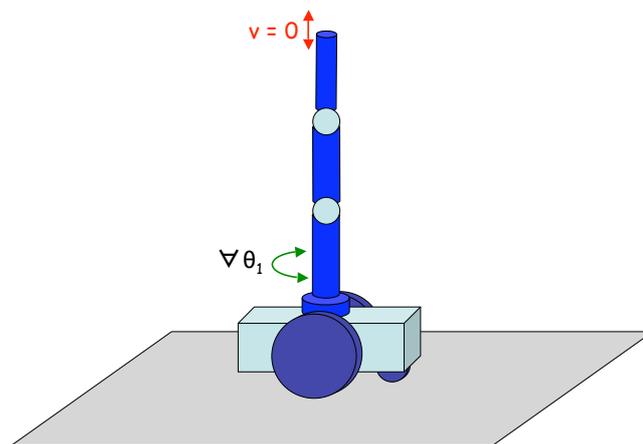
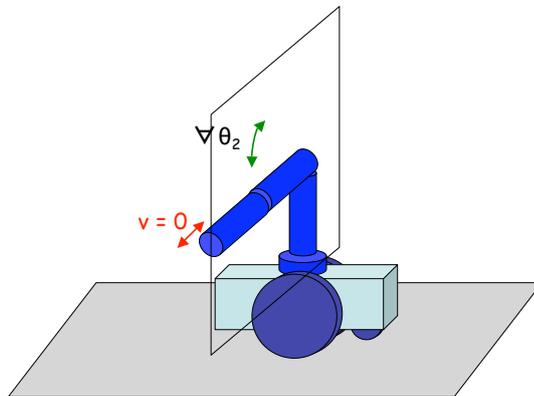
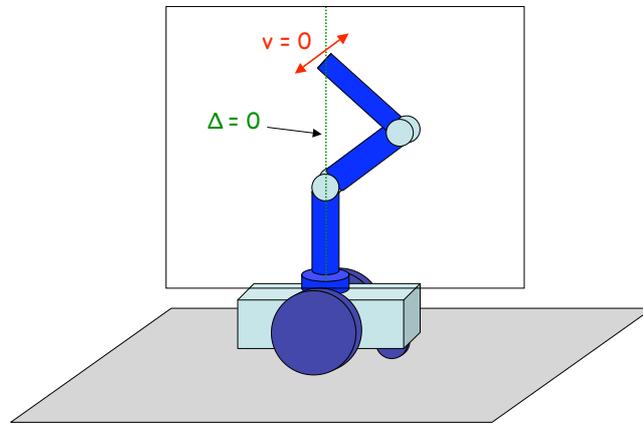
assume l'espressione

$$H(q) = \begin{bmatrix} \frac{c_0}{2} - \frac{\ell_2 c_2 + \ell_3 c_{23}}{b} s_{01} & \frac{c_0}{2} + \frac{\ell_2 c_2 + \ell_3 c_{23}}{b} s_{01} & -(\ell_2 c_2 + \ell_3 c_{23}) s_{01} \\ \frac{s_0}{2} + \frac{\ell_2 c_2 + \ell_3 c_{23}}{b} c_{01} & \frac{s_0}{2} - \frac{\ell_2 c_2 + \ell_3 c_{23}}{b} c_{01} & (\ell_2 c_2 + \ell_3 c_{23}) c_{01} \\ 0 & 0 & 0 \\ & & -(\ell_2 s_2 + \ell_3 s_{23}) c_{01} & -\ell_3 s_{23} c_{01} \\ & & -(\ell_2 s_2 + \ell_3 s_{23}) s_{01} & -\ell_3 s_{23} s_{01} \\ & & \ell_2 c_2 + \ell_3 c_{23} & \ell_3 c_{23} \end{bmatrix}.$$

Per lo studio delle singolarità cinematiche, la matrice $H(q)$ svolge il ruolo dello Jacobiano. Si noti in particolare che tale matrice è indipendente da x ed y . La struttura robotica complessiva ha grado di ridondanza pari a $r = 5 - 3 = 2$ per il compito di moto (posizionale) dell'organo terminale. Pertanto, $H(q)$ cade di rango se e solo se tutti i minori (3×3) da essa estraibili si annullano contemporaneamente.

Prima di procedere ad una determinazione analitica delle singolarità (cosa non richiesta dal testo), si osservi che: *i*) le singolarità di una struttura robotica (in particolare cinematicamente ridondante) sono caratterizzate da perdita di mobilità dell'organo terminale; *ii*) le configurazioni singolari di un manipolatore mobile sono un sottoinsieme (immerso in uno spazio di dimensione superiore, pari a 5 nel caso in questione) di quelle dello stesso braccio manipolatore con base fissa; *iii*) i gradi di mobilità aggiuntivi della base possono servire ad eliminare almeno una parte delle singolarità del braccio manipolatore considerato da solo (evidentemente, se la base non viene mossa si è proprio in questa situazione). È noto che il manipolatore $3R$ antropomorfo è in singolarità quando il terzo braccio è allineato con il secondo ($\sin \theta_3 = 0$) o quando l'organo terminale è posto sulla verticale del piantone ($\Delta := \ell_2 \cos \theta_2 + \ell_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) = 0$) o quando si verificano entrambe tali condizioni (singolarità doppia). Nel primo caso, l'organo terminale non può avere una velocità istantanea diversa da zero lungo la direzione di estensione di braccio e avambraccio; nel secondo caso, la direzione inaccessibile è quella orizzontale e ortogonale al piano di moto del secondo e terzo braccio; nel terzo caso, le due direzioni suddette e le loro combinazioni vettoriali definiscono un piano nel quale la mobilità dell'organo terminale è persa.

Pertanto, basterà verificare se gli atti di moto istantanei dell'organo terminale impediti in ciascuna di tali configurazioni possano essere invece prodotti quando si utilizzano anche i comandi di velocità della base. Se ciò è possibile, la configurazione in questione non sarà più singolare per l'intera struttura robotica. Tale possibilità potrà in generale dipendere dal valore di altre variabili di configurazione, nello specifico dalla variabile θ_1 . In base alle precedenti considerazioni, si deduce che le singolarità cinematiche sono tutte e sole quelle illustrate nelle tre figure seguenti.



La prima corrisponde alla perdita di mobilità lungo la direzione ortogonale al piano di moto (sempre verticale) del secondo e terzo braccio *limitatamente a quando tale piano include l'asse di avanzamento della base mobile*. La seconda corrisponde alla perdita di mobilità istantanea lungo la direzione di estensione del secondo e terzo braccio *limitatamente al piano normale all'asse di avanzamento della base*

mobile. La terza è una configurazione singolare per ogni valore di θ_1 e include due casi particolari delle precedenti.

Procedendo ora ad una verifica analitica, occorre considerare in tutto $\binom{5}{3} = 10$ sottomatrici (3×3) della $H(q)$, che si riducono subito a 9 in quanto il minore ottenuto eliminando la quarta e quinta colonna è identicamente nullo. Indicando con $\{ijk\}$ la sottomatrice formata estraendo le tre colonne i, j e k dalla $H(q)$, è semplice calcolare i tre minori

$$\det\{124\} = -\frac{1}{b}\Delta^2 c_1, \quad \det\{134\} = \det\{234\} = \frac{1}{2}\Delta^2 c_1,$$

che si annullano per $\Delta = \ell_2 c_2 + \ell_3 c_{23} = 0$ e/o per $c_1 = 0$, ed i tre minori analoghi

$$\det\{125\} = -\frac{\ell_3}{b}\Delta c_{23} c_1, \quad \det\{135\} = \det\{235\} = \frac{\ell_3}{2}\Delta c_{23} c_1,$$

che si annullano per $\Delta = 0$ e/o per $c_1 = 0$ e/o per $c_{23} = 0$. Il calcolo dei restanti tre minori è più laborioso e fornisce

$$\det\{145\} = \ell_2 \ell_3 s_3 \left(\frac{s_1}{2} - \frac{\Delta}{b} \right), \quad \det\{245\} = \ell_2 \ell_3 s_3 \left(\frac{s_1}{2} + \frac{\Delta}{b} \right), \quad \det\{345\} = \ell_2 \ell_3 s_3 \Delta,$$

che si annullano insieme solo per $s_3 = 0$ e/o per $\Delta = 0$ e contemporaneamente $s_1 = 0$. Si noti, in particolare, che le condizioni di singolarità risultano tutte indipendenti anche da θ_0 . Dall'analisi complessiva di tali condizioni, si deduce che il robot è in singolarità se e solo se

$$\Delta = 0 \quad \text{AND} \quad \sin \theta_1 = 0$$

oppure

$$\cos \theta_1 = 0 \quad \text{AND} \quad \sin \theta_3 = 0$$

oppure

$$\Delta = 0 \quad \text{AND} \quad \sin \theta_3 = 0,$$

che ricoprono tutte le situazioni illustrate nelle figure precedenti. Si noti che la configurazione con il manipolatore steso lungo la verticale del piantone corrisponde ad una singolarità doppia solo se $\sin \theta_1 = 0$.

Infine, per eseguire un movimento con velocità desiderata $\dot{p}_d(t)$ per l'organo terminale è sufficiente scegliere una soluzione a norma minima (basata sulla pseudoinversa della $H(q)$)

$$\begin{bmatrix} v_R \\ v_L \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = H^\#(q) [\dot{p}_d + K(p_d - p)],$$

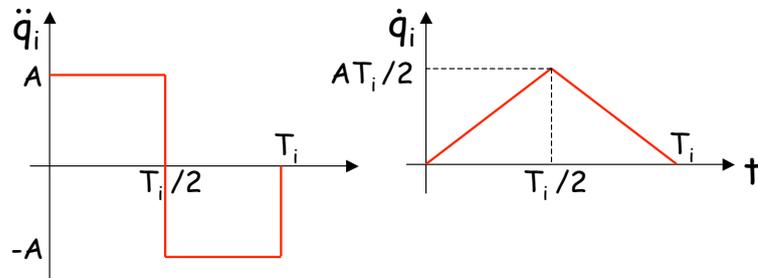
dove la matrice (diagonale) $K > 0$ è introdotta per la correzione in feedback dell'errore cartesiano di traiettoria.

Soluzione Esercizio 2

Per il robot cartesiano considerato si ha

$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = q,$$

con Jacobiano pari alla matrice identica. Lavorare nello spazio cartesiano o in quello dei giunti è quindi equivalente. Per ogni componente, il moto da fermo a fermo in tempo minimo consiste in una fase di massima accelerazione A seguita da una, di pari durata, a massima decelerazione $-A$ (o viceversa, se occorre decrementare la posizione del giunto in questione). Per il giunto i -esimo, il profilo di una tale accelerazione “bang-bang” e della velocità risultante sono mostrati nella figura seguente, dove T_i è il tempo di completamento del moto.



L'area $AT_i^2/2$ sottesa dal profilo di velocità deve essere pari allo spostamento del giunto $|q_{gi} - q_{si}|$, da cui

$$T_i = \sqrt{\frac{2|q_{gi} - q_{si}|}{A}}.$$

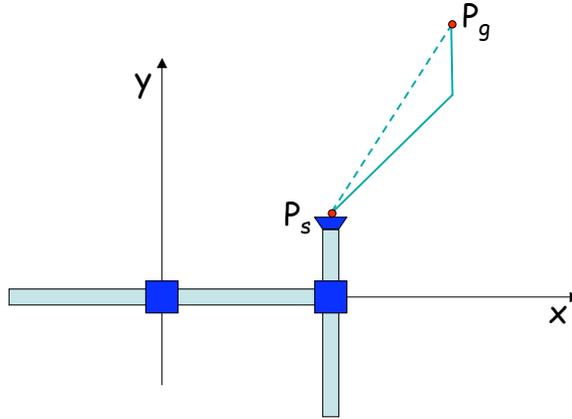
Quando entrambi i giunti completano indipendentemente il proprio spostamento in tempo minimo, il tempo totale del moto è

$$T = \max\{T_1, T_2\}.$$

Il giunto che deve percorrere meno spazio terminerà per primo il proprio moto, fermandosi quindi in attesa che l'altro completi il suo movimento. Sia ad esempio (senza perdita di generalità)

$$T_1 < T_2 = T \quad \iff \quad |q_{g1} - q_{s1}| < |q_{g2} - q_{s2}|.$$

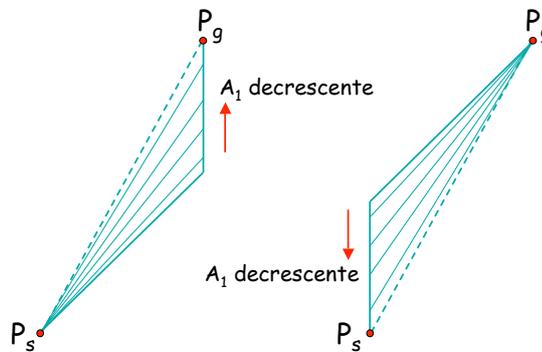
Il cammino percorso, mostrato in figura, non è rettilineo ma è una spezzata formata da due tratti rettilinei (il robot arriva al punto angolare all'istante T_1). Il moto risultante non è di tipo coordinato (cioè avviene viceversa quando tutti i giunti partono e si fermano contemporaneamente).



Nel caso illustrato, il primo giunto può evidentemente eseguire un moto ancora di tipo bang-bang, ma scalato (qui, rallentato) su un tempo T'_1 , con $T_1 < T'_1 \leq T_2 = T$, senza compromettere il tempo totale minimo di completamento del moto. Si avrà allora

$$T'_1 = \sqrt{\frac{2|q_{g1} - q_{s1}|}{A_1}} \leq T_2, \quad \text{con} \quad \frac{|q_{g1} - q_{s1}|}{|q_{g2} - q_{s2}|} A \leq A_1 < A$$

e al diminuire del valore dell'accelerazione A_1 (ossia al crescere di T'_1) verranno percorsi cammini del tipo mostrato nella parte sinistra della figura seguente. Tutti questi cammini richiedono lo stesso tempo di completamento (pari al minimo).



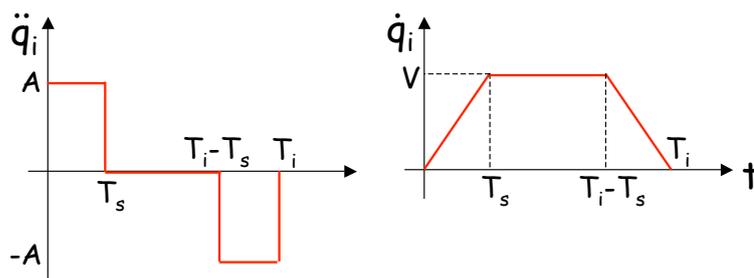
Il primo giunto potrebbe anche essere tenuto fermo per un tempo $\Delta T = T_2 - T_1$ e poi fatto muovere a massima accelerazione/decelerazione $\pm A$, oppure rimanere fermo per un tempo minore e poi eseguire un moto bang-bang con $\pm A_1$ ridotta come prima. I cammini risultanti sono mostrati nella parte destra della figura. Il caso intermedio (tratteggiato) si ha quando $T'_1 = T_2$, ossia per

$$A_1 = \frac{|q_{g1} - q_{s1}|}{|q_{g2} - q_{s2}|} A,$$

corrispondente ad un moto in tempo minimo (sempre lo stesso valore!) su cammino rettilineo. In tal caso il moto dei giunti è coordinato. La legge oraria è dunque

ancora di tipo bang-bang, ma scalata opportunamente in accelerazione per il giunto che deve percorrere meno spazio.

L'aggiunta del vincolo sulla velocità massima (comune) dei giunti non cambia sostanzialmente la situazione nel caso di moto coordinato (rettilineo), tranne che per la determinazione del tempo minimo. Per il giunto i -esimo, il profilo di accelerazione “bang-coast-bang” e della velocità trapezoidale risultante sono mostrati nella figura seguente, dove il tempo di salita $T_s = V/A$ è uguale per i due giunti.



Per semplicità di analisi, si assuma che i dati A , V e lo spostamento (sufficientemente ampio) richiesti ai singoli giunti permettano l'esecuzione di profili trapezoidali completi (con fase di “coast” presente). Per il calcolo del tempo di moto, dall'area sottesa dal profilo di velocità

$$(T_i - T_s)V = \left(T_i - \frac{V}{A}\right)V = |q_{gi} - q_{si}|$$

si ottiene

$$T_i = \frac{|q_{gi} - q_{si}|}{V} + \frac{V}{A}$$

e ancora $T = \max\{T_1, T_2\}$. Sia ad esempio, come prima, $T_1 < T_2 = T$. Per avere un moto coordinato in linea retta, il profilo di velocità deve mantenersi trapezoidale con identici tempi di salita e discesa sui due giunti e si dovrà quindi in generale scalare sia l'accelerazione massima (ad A_1) che la velocità massima (a V_1) del giunto che ha minor percorso da effettuare (qui, il giunto 1). Dalla relazione

$$(T - T_s)V_1 = |q_{g1} - q_{s1}|,$$

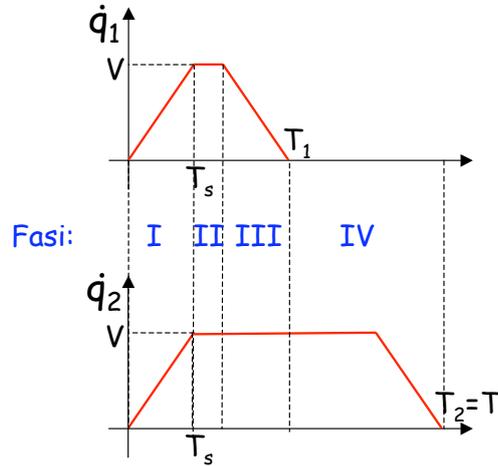
poichè $T_s = V_1/A_1 = V/A$ e $T = T_2 = |q_{g2} - q_{s2}|/V + V/A$, risolvendo si ottiene

$$V_1 = \frac{|q_{g1} - q_{s1}|}{|q_{g2} - q_{s2}|} V \quad (< V)$$

e quindi $A_1 = (V_1/V)A$. Si noti che il rapporto tra le velocità dei due giunti si mantiene costante in ogni istante (moto rettilineo lungo la congiungente i due punti P_s e P_g).

Quando però il moto non è coordinato ed ogni giunto completa il proprio spostamento in tempo minimo, il cammino risultante cambia leggermente di forma

(rispetto alla spezzata del caso senza velocità massima). Ciò è dovuto essenzialmente alla variazione (continua) del rapporto tra le velocità dei due giunti durante una delle fasi del moto. Si considerino infatti i profili trapezoidali di velocità in figura ($T_1 < T_2$).



Sono individuate quattro fasi: accelerazione di entrambi i giunti (fase I), velocità costante di entrambi i giunti (fase II), decelerazione del solo primo giunto (fase III), primo giunto fermo e secondo ancora in moto (fase IV). Il rapporto tra le velocità di giunto varia come segue:

$$\frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1} = \frac{dq_2}{dq_1} = \frac{dy}{dx} = \begin{cases} 1, & \text{fase I} & t \in [0, T_s); \\ 1, & \text{fase II} & t \in [T_s, T_1 - T_s); \\ \frac{T_s}{T_1 - t}, & \text{fase III} & t \in [T_1 - T_s, T_1); \\ \infty, & \text{fase IV} & t \in [T_1, T]. \end{cases}$$

La tangente al cammino (ovvero la sua pendenza) cresce con continuità durante la fase III, passando dal valore unitario all'infinito (pendenza verticale). Il cammino complessivo, con tale raccordo, è mostrato nella figura finale.

