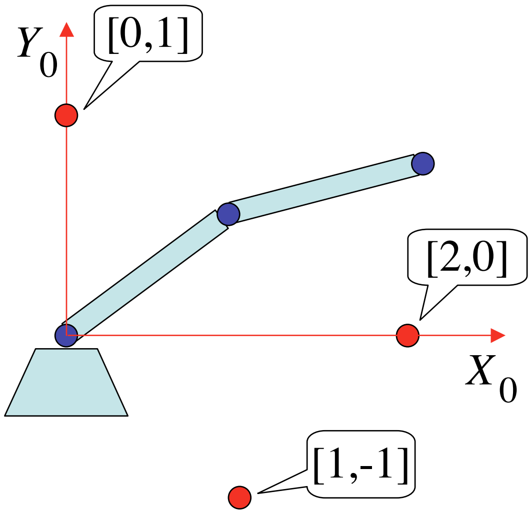
Prova Scritta di Robotica I[1]

6 Aprile 2004

Un robot planare $2R$, avente i due bracci di lunghezza l_1 ed l_2, deve eseguire un compito di movimentazione continua, ciclando ripetutamente tra i tre punti cartesiani riportati in figura nella sequenza $\ldots \to (0,1) \to (1,-1) \to (2,0) \to (0,1) \to \ldots$



Dimensionare le lunghezze l_1 ed l_2 e progettare una traiettoria nello spazio dei giunti in modo tale che:

- un ciclo di moto avvenga in 6 secondi;
- la traiettoria ciclica sia continua fino alla derivata temporale seconda;
- in ciascun ciclo, il robot passi almeno una volta in configurazione singolare e assuma i due tipi distinti di soluzione cinematica inversa in corrispondenza a due dei tre punti cartesiani di passaggio.

[90 minuti di tempo; libri aperti]

[1]Prima parte dello scritto di "Robotica Industriale"

Soluzione

6 Aprile 2004

Sono ovviamente possibili diverse scelte. La più semplice consiste nel determinare le lunghezze dei bracci in modo che il punto più lontano sia raggiunto in singolarità (braccio steso) e gli altri punti siano interni allo spazio di lavoro. Posto ad esempio $l_1 = l_2 = 1$ e denominati i punti con

$$A = [0, 1] \qquad B = [1, -1] \qquad C = [2, 0]$$

(la scelta del primo punto tra i tre è inessenziale, mentre il sequenziamento è quello assegnato), dalla cinematica inversa del robot $2R$ si ha:

$$\begin{aligned} q_A &= \begin{pmatrix} 150^\circ \\ -120^\circ \end{pmatrix} && \text{(configurazione gomito in alto/braccio sinistro)} \\ q_B &= \begin{pmatrix} -90^\circ \\ 90^\circ \end{pmatrix} && \text{(configurazione gomito in basso/braccio destro)} \\ q_C &= \begin{pmatrix} 0^\circ \\ 0^\circ \end{pmatrix} && \text{(configurazione singolare).} \end{aligned}$$

Il tempo di ciclo viene diviso (in modo arbitrario) in tre intervalli uguali di 2 secondi ciascuno. La specifica sulla continuità in accelerazione suggerisce l'uso di traiettorie *spline*, costituite da tre polinomi cubici nel tempo per ciascuno dei due giunti. Poichè si tratta di un compito ciclico, non vengono imposte condizioni al contorno sulle velocità (non ci sono nodi 'estremi') ma quelle di continuità in accelerazione su *tutti* i nodi. Come al solito, è possibile determinare le traiettorie spline separatamente giunto per giunto.

Sia allora la generica cubica tra due punti P_i e P_f espressa nella forma

$$\theta_{P_i,P_f}(\tau) = a\,\tau^3 + b\,\tau^2 + c\,\tau + d, \qquad \tau = \frac{t - t_i}{t_f - t_i} \in [0, 1],$$

con derivate temporali prima e seconda (rispetto a t)

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{P_i,P_f}(\tau) &= (3a\,\tau^2 + 2b\,\tau + c) \cdot \frac{1}{t_f - t_i} \\ \ddot{\theta}_{P_i,P_f}(\tau) &= (6a\,\tau + 2b) \cdot \frac{1}{(t_f - t_i)^2}. \end{aligned}$$

I coefficienti sono determinati dalle quattro condizioni al contorno

$$\theta_{P_i,P_f}(0) = q_i, \quad \dot{\theta}_{P_i,P_f}(0) = v_i, \quad \theta_{P_i,P_f}(1) = q_f, \quad \dot{\theta}_{P_i,P_f}(1) = v_f,$$

con velocità v_i e v_f incognite. Dalle prime due si ha $d = q_i$ e $c = v_i(t_f - t_i)$. Dalle seconde due si ottiene il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_f - q_i - v_i(t_f - t_i) \\ (v_f - v_i)(t_f - t_i) \end{pmatrix},$$

che fornisce $a = 2(q_i - q_f) + (v_i + v_f)(t_f - t_i)$, $b = 3(q_f - q_i) - (2v_i + v_f)(t_f - t_i)$. L'espressione della generica cubica e delle sue derivate è allora:

$$\begin{aligned}
\theta_{P_i,P_f}(\tau) &= [2(q_i - q_f) + (v_i + v_f)(t_f - t_i)]\,\tau^3 \\
&\quad + [3(q_f - q_i) - (2v_i + v_f)(t_f - t_i)]\,\tau^2 + [v_i(t_f - t_i)]\,\tau + q_i \\
\dot{\theta}_{P_i,P_f}(\tau) &= \left[\frac{6(q_i - q_f)}{(t_f - t_i)} + 3(v_i + v_f)\right]\tau^2 + \left[\frac{6(q_f - q_i)}{(t_f - t_i)} - 2(2v_i + v_f)\right]\tau + v_i \\
\ddot{\theta}_{P_i,P_f}(\tau) &= \left[\frac{12(q_i - q_f)}{(t_f - t_i)^2} + \frac{6(v_i + v_f)}{(t_f - t_i)}\right]\tau + \left[\frac{6(q_f - q_i)}{(t_f - t_i)^2} - \frac{2(2v_i + v_f)}{(t_f - t_i)}\right].
\end{aligned}$$

Le condizioni di continuità in accelerazione ai tre nodi A, B e C sono della forma $\ddot{\theta}_{P_1,P_2}(1) = \ddot{\theta}_{P_2,P_3}(0)$ (con $P_i \in \{A, B, C\}$). Ad esempio,

$$\ddot{\theta}_{A,B}(1) = \frac{6(q_A - q_B)}{(t_B - t_A)^2} + \frac{2v_A + 4v_B}{(t_B - t_A)} = \frac{6(q_C - q_B)}{(t_C - t_B)^2} - \frac{2(2v_B + v_C)}{(t_C - t_B)} = \ddot{\theta}_{B,C}(0).$$

Avendo suddiviso il tempo di ciclo totale (6 secondi) in tre intervalli uguali, si avrà $t_B - t_A = t_C - t_B = t_A - t_C = 2$. Si svolgeranno i calcoli per il primo ciclo, nel quale $t_A = 0$.

Primo giunto. Essendo $(q_A)_1 = 150$, $(q_B)_1 = -90$ e $(q_C)_1 = 0$, le tre cubiche sono:

$$\begin{aligned}
\theta_{A,B}(t) &= [480 + 2(v_A + v_B)]\left(\tfrac{t}{2}\right)^3 + [-720 - 2(2v_A + v_B)]\left(\tfrac{t}{2}\right)^2 + 2v_A\left(\tfrac{t}{2}\right) + 150 \\
\theta_{B,C}(t) &= [-180 + 2(v_B + v_C)]\left(\tfrac{t-2}{2}\right)^3 + [270 - 2(2v_B + v_C)]\left(\tfrac{t-2}{2}\right)^2 + 2v_B\left(\tfrac{t-2}{2}\right) - 90 \\
\theta_{C,A}(t) &= [-300 + 2(v_C + v_A)]\left(\tfrac{t-4}{2}\right)^3 + [450 - 2(2v_C + v_A)]\left(\tfrac{t-4}{2}\right)^2 + 2v_C\left(\tfrac{t-4}{2}\right).
\end{aligned}$$

Le tre condizioni di continuità in accelerazione si esplicitano in

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta}_{A,B}(1) = \ddot{\theta}_{B,C}(0) &\iff \tfrac{6}{4}\,240 + v_A + 2v_B = \tfrac{6}{4}\,90 - 2v_B - v_C \\
\ddot{\theta}_{B,C}(1) = \ddot{\theta}_{C,A}(0) &\iff -\tfrac{6}{4}\,90 + v_B + 2v_C = \tfrac{6}{4}\,150 - 2v_C - v_A \\
\ddot{\theta}_{C,A}(1) = \ddot{\theta}_{A,B}(0) &\iff -\tfrac{6}{4}\,150 + v_C + 2v_A = -\tfrac{6}{4}\,240 - 2v_A - v_B,
\end{aligned}$$

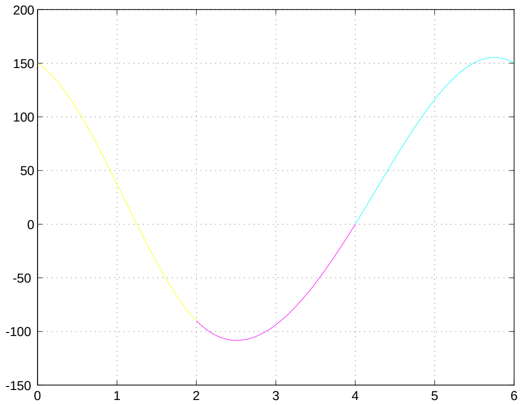
ossia

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -225 \\ 360 \\ -135 \end{pmatrix}$$

che risolta fornisce $v_A = -45$, $v_B = -75$, $v_C = 120$. La traiettoria spline per il primo giunto è dunque:

$$\begin{aligned}
\theta_{A,B}(t) &= 240\left(\tfrac{t}{2}\right)^3 - 390\left(\tfrac{t}{2}\right)^2 - 90\left(\tfrac{t}{2}\right) + 150, && t\in[0,2]\\
\theta_{B,C}(t) &= -90\left(\tfrac{t-2}{2}\right)^3 + 330\left(\tfrac{t-2}{2}\right)^2 - 150\left(\tfrac{t-2}{2}\right) - 90, && t\in[2,4]\\
\theta_{C,A}(t) &= -150\left(\tfrac{t-4}{2}\right)^3 + 60\left(\tfrac{t-4}{2}\right)^2 + 240\left(\tfrac{t-4}{2}\right), && t\in[4,6].
\end{aligned}$$

L'andamento del primo giunto è illustrato nella figura seguente.



Secondo giunto. Essendo $(q_A)_2 = -120$, $(q_B)_2 = 90$ e $(q_C)_2 = 0$, le tre cubiche sono

$$\theta_{A,B}(t) = [-420 + 2(v_A + v_B)]\left(\tfrac{t}{2}\right)^3 + [630 - 2(2v_A + v_B)]\left(\tfrac{t}{2}\right)^2 + 2v_A\left(\tfrac{t}{2}\right) - 120$$

$$\theta_{B,C}(t) = [180 + 2(v_B + v_C)]\left(\tfrac{t-2}{2}\right)^3 + [-270 - 2(2v_B + v_C)]\left(\tfrac{t-2}{2}\right)^2 + 2v_B\left(\tfrac{t-2}{2}\right) + 90$$

$$\theta_{C,A}(t) = [240 + 2(v_C + v_A)]\left(\tfrac{t-4}{2}\right)^3 + [-360 - 2(2v_C + v_A)]\left(\tfrac{t-4}{2}\right)^2 + 2v_C\left(\tfrac{t-4}{2}\right)$$

Le tre condizioni di continuità in accelerazione si esplicitano in

$$\begin{aligned}
\ddot\theta_{A,B}(1) = \ddot\theta_{B,C}(0) &\iff -\tfrac{6}{4}210 + v_A + 2v_B = -\tfrac{6}{4}90 - 2v_B - v_C\\
\ddot\theta_{B,C}(1) = \ddot\theta_{C,A}(0) &\iff \tfrac{6}{4}90 + v_B + 2v_C = -\tfrac{6}{4}120 - 2v_C - v_A\\
\ddot\theta_{C,A}(1) = \ddot\theta_{A,B}(0) &\iff \tfrac{6}{4}120 + v_C + 2v_A = \tfrac{6}{4}210 - 2v_A - v_B,
\end{aligned}$$

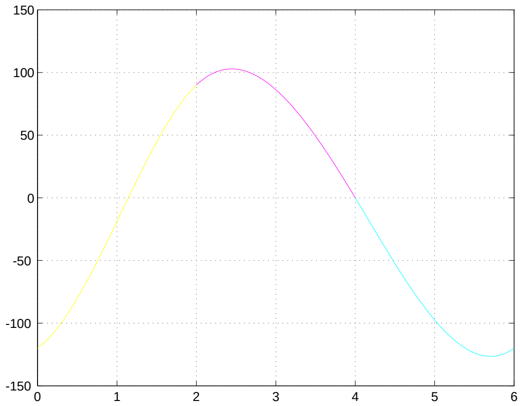
ossia

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_A\\ v_B\\ v_C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180\\ -315\\ 135\end{pmatrix}$$

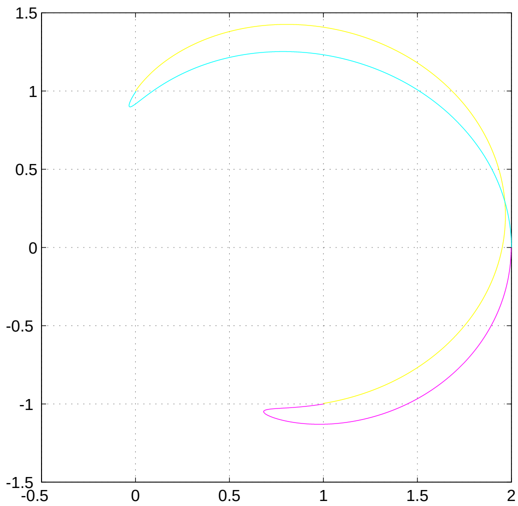
che risolta fornisce $v_A = 45$, $v_B = 60$, $v_C = -105$. La traiettoria spline per il secondo giunto è dunque:

$$
\begin{aligned}
\theta_{A,B}(t) &= -210\left(\frac{t}{2}\right)^3 + 330\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 90\left(\frac{t}{2}\right) - 120, && t \in [0,2] \\
\theta_{B,C}(t) &= 90\left(\frac{t-2}{2}\right)^3 - 300\left(\frac{t-2}{2}\right)^2 + 120\left(\frac{t-2}{2}\right) + 90, && t \in [2,4] \\
\theta_{C,A}(t) &= 120\left(\frac{t-4}{2}\right)^3 - 30\left(\frac{t-4}{2}\right)^2 - 210\left(\frac{t-4}{2}\right), && t \in [4,6].
\end{aligned}
$$

L'andamento del secondo giunto è illustrato nella figura seguente.



Il cammino cartesiano percorso dall'organo terminale in un ciclo (a partire dal punto A) è mostrato nella figura successiva.

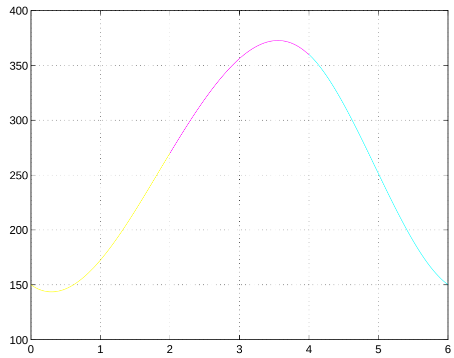


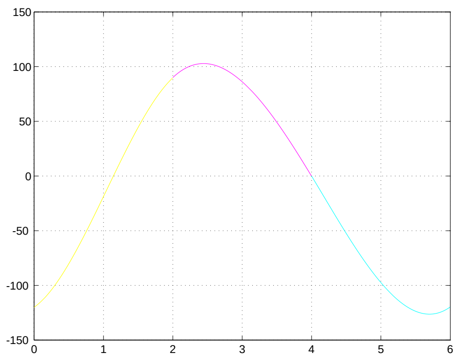
Dall'analisi degli andamenti delle variabili di giunto e del moto cartesiano si possono trarre le seguenti conclusioni:

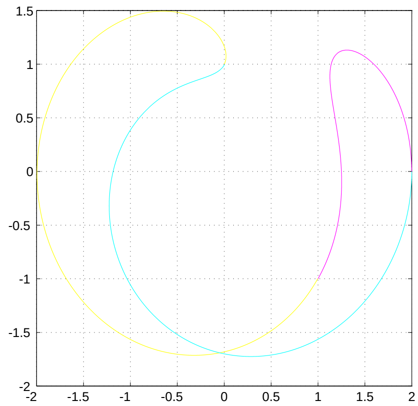
- il robot attraversa due singolarità (entambe a braccio steso) durante un ciclo: la prima nel tratto da A a B per $t \approx 1.15$ s, la seconda per costruzioone nel punto C per $t = 4$ s;
- il robot interpola i tre punti nella sequenza assegnata, ma il moto dell'organo terminale non è concorde: antiorario nei tratti da B a C e da C ad A, orario nel tratto da A a B;
- con le scelte fatte, la suddivisione del tempo totale di ciclo in intervalli uguali non appare appropriata: in particolare, il moto da A a B richiede velocità sensibilmente superiori a quelle negli altri due tratti;
- il moto cartesiano ottenuto, apparentemente anomalo, è in parte legato alla definizione 'modulo 2π' degli angoli di giunto (in particolare, del primo): ad esempio, un comportamento complessivo differente si ottiene definendo nel passaggio $C_k \to A_k \to B_k \to C_{k+1}$ al k-esimo ciclo le configurazioni di giunto

  $$q_{C_k} = \begin{pmatrix} 0° \\ 0° \end{pmatrix} \quad q_{A_k} = \begin{pmatrix} 150° \\ -120° \end{pmatrix} \quad q_{B_k} = \begin{pmatrix} 270° \\ 90° \end{pmatrix} \quad q_{C_{k+1}} = \begin{pmatrix} 360° \\ 0° \end{pmatrix},$$

  ossia con $q_{C_{k+1}} = q_{C_k} \bmod(2\pi)$; i risultati riportati nelle figure seguenti mostrano di nuovo due passaggi per la configurazione a braccio steso, con moto dell'organo terminale in senso antiorario nel tratto da A a B, alternato da B ad C, e in senso orario nel tratto da C ad A;







- si intuisce come alla base di tali moti discordi dell'organo terminale ci siano ostruzioni topologiche, evitabili solo rinunciando al salto di tipo di soluzione cinematica inversa nel passaggio da A e B; infatti, con la scelta

$$q_A = \begin{pmatrix} 150° \\ -120° \end{pmatrix} \quad q_B = \begin{pmatrix} 0° \\ -90° \end{pmatrix} \quad q_C = \begin{pmatrix} 0° \\ 0° \end{pmatrix},$$

si ottiene il cammino cartesiano decisamente più regolare della figura seguente (moto completamente antiorario).