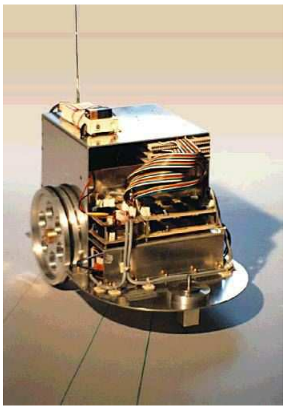
# Prova Scritta di Robotica I

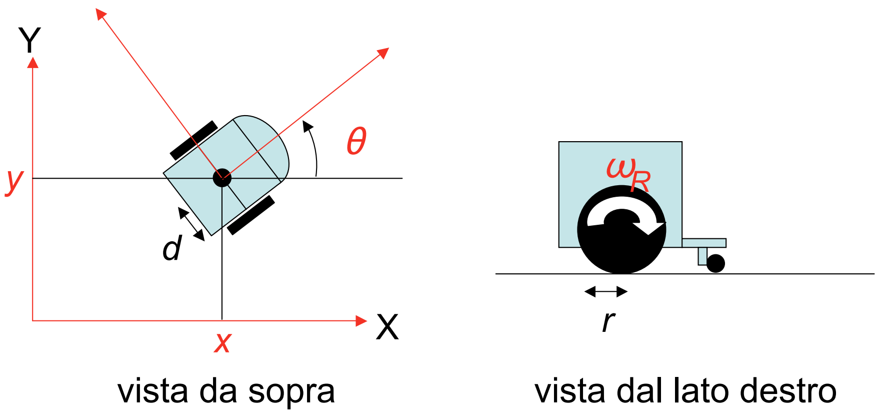
## 25 Marzo 2004

### Esercizio 1

Si consideri un robot mobile a due ruote ad orientamento fisso (ed una passiva riorientabile e non centrata di appoggio) comandate indipendentemente in velocità angolare di rotolamento. Un esempio di tale cinematica è dato dal veicolo *SuperMARIO* del Laboratorio di Robotica del DIS mostrato in foto.



Con riferimento alla figura seguente, sia $r = 0.2$ [m] il raggio delle due ruote e $d = 0.2$ [m] la lunghezza del semiasse delle ruote. Le coordinate del punto centrale dell'asse delle ruote nella terna assoluta $(X, Y)$ sono $(x, y)$ e l'orientamento del veicolo è individuato da un angolo $\theta$ rispetto all'asse $X$.




I comandi di velocità di rotolamento delle ruote ($R$ = right, $L$ = left) sono limitati:

$$|\omega_R| \leq 1 \,\text{giro/sec}, \qquad |\omega_L| \leq 1 \,\text{giro/sec}.$$

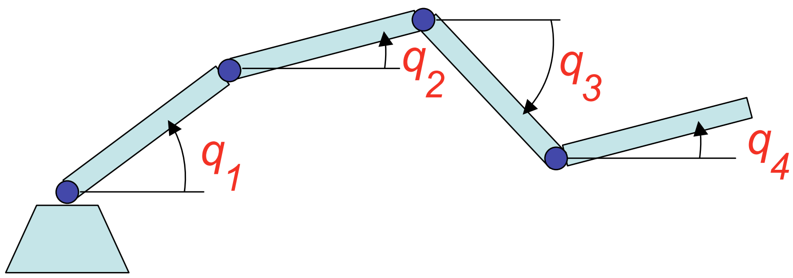
Al tempo $t = 0$, il robot è nell'origine: $(x(0), y(0), \theta(0)) = (0, 0, 0)$. Si consideri la seguente sequenza di comandi:

$$\begin{array}{lll} \omega_R(t) = 1\,\text{giro/sec}, & \omega_L(t) = 0.5\,\text{giro/sec} & t \in [0, 0.5)\,\text{sec} \\ \omega_R(t) = 1\,\text{giro/sec}, & \omega_L(t) = 1\,\text{giro/sec} & t \in [0.5, 1.5)\,\text{sec} \\ \omega_R(t) = 1\,\text{giro/sec}, & \omega_L(t) = 0.5\,\text{giro/sec} & t \in [1.5, 2)\,\text{sec.} \end{array}$$

- Quale posa $(x_f, y_f, \theta_f)$ raggiunge il robot in corrispondenza all'istante finale $T_f = 2$ sec?
- Determinare il tempo di moto dall'origine a tale posa finale quando la sequenza di comandi è invece quella a tempo minimo (con i vincoli esistenti su $\omega_R$ e $\omega_L$). Si ricorda che il moto a tempo minimo è ottenuto mediante tre manovre elementari: *i)* ruotare sul posto il robot fino a puntare verso la posizione finale; *ii)* muovere il robot in linea retta fino al raggiungimento della posizione finale; *iii)* ruotare il robot in tale posizione fino a raggiungere l'orientamento finale.

## Esercizio 2

Il robot planare $4R$ in figura deve eseguire compiti di posizionamento dell'organo terminale sul piano. Le lunghezze dei bracci sono tutte unitarie.




Utilizzando le coordinate generalizzate indicate, determinare:

- tutte le configurazioni singolari per i compiti richiesti;
- l'insieme dei punti cartesiani dello spazio di lavoro dove il robot può posizionare l'organo terminale e trovarsi (certamente o eventualmente) in singolarità;
- una configurazione a massima manipolabilità.

[180 minuti di tempo; libri aperti]

## Soluzioni

25 Marzo 2004

### Soluzione Esercizio 1

I comandi $\omega_R$ e $\omega_L$ di velocità angolare di rotolamento delle due ruote (espressi in giri/sec) si traducono in velocità lineari al suolo pari a

$$v_R = 2\pi r\,\omega_R \text{ [m/sec]}, \qquad v_L = 2\pi r\,\omega_L \text{ [m/sec]}$$

che equivalgono ad una velocità lineare $v$ del punto centrale dell'asse delle ruote e ad una velocità angolare $\omega$ del robot pari rispettivamente a

$$\begin{aligned} v &= \frac{v_R + v_L}{2} = \pi r\,(\omega_R + \omega_L)\ \left[\frac{\text{m}}{\text{sec}}\right], \\ \omega &= \frac{v_R - v_L}{2d} = \frac{\pi r}{d}\,(\omega_R - \omega_L)\ \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right]. \end{aligned}$$

Quando $\omega_L = \omega_R$ si ha $\omega = 0$ ed il robot procede in linea retta ad orientamento costante con velocità lineare $v = 2\pi r\,\omega_R$. Quando $\omega_L = -\omega_R$ si ha $v = 0$ ed il robot ruota sul posto con velocità angolare $\omega = \frac{2\pi r}{d}\,\omega_R$. In tutte le altre situazioni si ha $v \neq 0$ e $\omega \neq 0$ ed il punto centrale dell'asse delle ruote percorre un arco di circonferenza di raggio $\rho = \frac{v}{\omega}$. Queste considerazioni geometriche si possono anche dedurre integrando le equazioni cinematiche del moto

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v\cos\theta \\ \dot{y} &= v\sin\theta \\ \dot{\theta} &= \omega. \end{aligned}$$

La sequenza assegnata di comandi fa quindi descrivere al robot i seguenti movimenti.

- In $\Delta t_1 = 0.5$ sec, un primo arco di circonferenza di raggio $\rho_1$ e lunghezza $L_1$ pari a

  $$\rho_1 = \frac{v_1}{\omega_1} = \frac{0.3\,\pi}{0.5\,\pi} = 0.6 \text{ [m]}, \quad L_1 = \rho_1\,\Delta\theta_1 = 0.6\,\frac{\pi}{4} = 0.15\,\pi \text{ [m]}$$

  essendo il riorientamento del robot pari a $\Delta\theta_1 = \omega_1 \Delta t_1 = \frac{\pi}{2} \cdot 0.5 = \frac{\pi}{4}$ [rad].

- In $\Delta t_2 = 1$ sec, un segmento rettilineo di lunghezza

  $$L_2 = v_2\,\Delta t_2 = 0.4\pi \text{ [m]}$$

  con orientamento costante pari a $\theta = \frac{\pi}{4}$ [rad].

- In $\Delta t_3 = 0.5$ sec, un analogo secondo arco di circonferenza di raggio $\rho_3$ e lunghezza $L_3$ pari a

$$\rho_3 = \frac{v_3}{\omega_3} = \frac{0.3\,\pi}{0.5\,\pi} = 0.6 \text{ [m]}, \quad L_3 = \rho_3\,\Delta\theta_3 = 0.6\,\frac{\pi}{4} = 0.15\,\pi \text{ [m]}$$

essendo il riorientamento del robot pari a $\Delta\theta_3 = \omega_3 \Delta t_3 = \frac{\pi}{2} \cdot 0.5 = \frac{\pi}{4}$ [rad].

Al termine del primo tratto circolare, la posizione e l'orientamento del robot saranno

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} + \rho_1 \begin{bmatrix} \sin\Delta\theta_1 \\ 1 - \cos\Delta\theta_1 \end{bmatrix} = 0.6 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$
$$\theta_1 = \theta(0) + \Delta\theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

Al termine del tratto rettilineo, la posizione e l'orientamento del robot saranno

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + L_2 \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.4\pi + 0.6)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ (0.4\pi - 0.6)\frac{\sqrt{2}}{2} + 0.6 \end{bmatrix}$$
$$\theta_2 = \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

Al termine del secondo tratto circolare, la posizione e l'orientamento del robot saranno infine

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_f \\ y_f \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \rho_3 \,\mathrm{Rot}(\theta_2) \begin{bmatrix} \sin\Delta\theta_3 \\ 1 - \cos\Delta\theta_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (0.4\pi + 0.6)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ (0.4\pi - 0.6)\frac{\sqrt{2}}{2} + 0.6 \end{bmatrix} + 0.6 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\ &= (0.6 + 0.4\pi\tfrac{\sqrt{2}}{2}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$
$$\theta_f = \theta_2 + \Delta\theta_3 = \frac{\pi}{2}$$

La strategia a tempo minimo per portare il robot dall'origine ad $(x_f, y_f, \theta_f)$ è composta da tre fasi.

- Un primo riorientamento per puntare alla posizione finale. È richiesta quindi una rotazione

$$\Delta\theta_I = \arctan\left(\frac{y_f}{x_f}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \text{ [rad]}$$

da effettuarsi alla massima velocità angolare (positiva) $\omega_{max} = 2\pi$ [rad/sec] consentita al robot (ottenuta con $\omega_R = 1$, $\omega_L = -1$ [giri/sec]). Il tempo richiesto è

$$\Delta t_I = \frac{\Delta\theta_I}{\omega_{max}} = 0.125 \text{ [sec]}.$$

- Un movimento rettilineo a massima velocità lineare (positiva) $v_{max} = 0.4\pi$ [m/sec] consentita al robot (ottenuta con $\omega_R = 1$, $\omega_L = 1$ [giri/sec]) fino al raggiungimento della posizione finale $(x_f, y_f)$. Il tempo richiesto è

$$\Delta t_{II} = \frac{\sqrt{x_f^2 + y_f^2}}{v_{max}} = 1.6752 \text{ [sec]}.$$

- Un riorientamento finale per ottenere $\theta_f$. È richiesta quindi una rotazione

$$\Delta\theta_{III} = \theta_f - \Delta\theta_I = \frac{\pi}{4} \text{ [rad]}$$

da effettuarsi alla massima velocità angolare (ancora positiva) $\omega_{max} = 2\pi$ [rad/sec] consentita al robot (ottenuta con $\omega_R = 1$, $\omega_L = -1$ [giri/sec]). Il tempo richiesto è

$$\Delta t_{III} = \frac{\Delta\theta_{III}}{\omega_{max}} = 0.125 \text{ [sec]}.$$

Il tempo totale ottimo è quindi $T_{opt} = \Delta t_I + \Delta t_{II} + \Delta t_{III} = 1.9252 < 2 = T_f$.

**Soluzione Esercizio 2**

La posizione dell'organo terminale è data da:

$$p = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \\ s_1 + s_2 + s_3 + s_4 \end{bmatrix},$$

dove $s_i = \sin q_i$, $c_i = \cos q_i$. Lo Jacobiano (analitico) associato è:

$$J(q) = \frac{\partial p}{\partial q} = \begin{bmatrix} -s_1 & -s_2 & -s_3 & -s_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}.$$

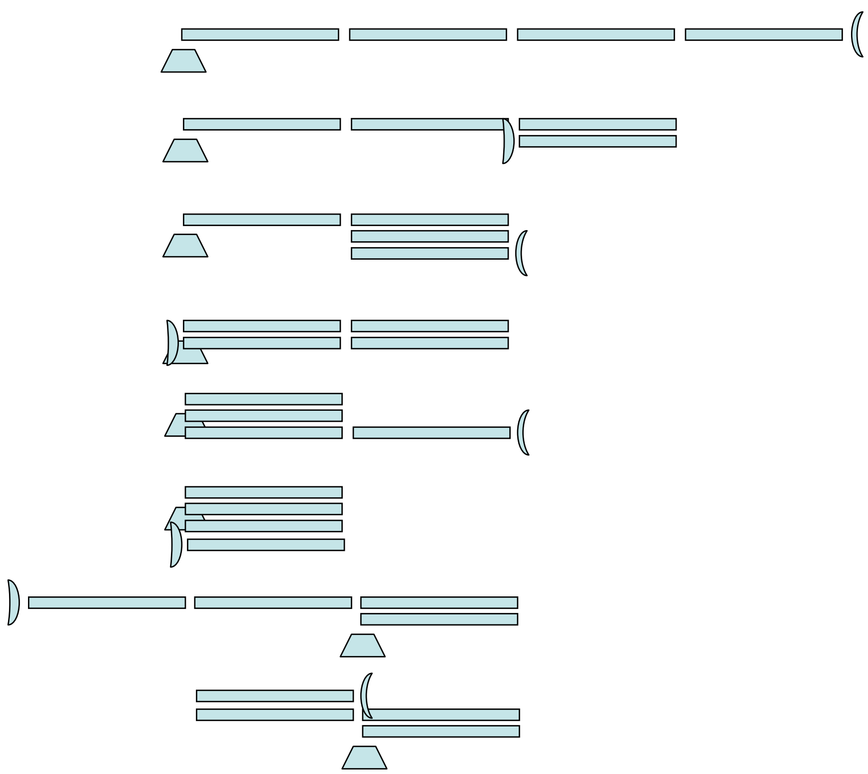
La funzione di manipolabilità del robot è definita dalla

$$H_{man}(q) = \sqrt{\det\left(J(q)J^T(q)\right)}$$
$$= \sqrt{(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2)(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2) - (s_1c_1 + s_2c_2 + s_3c_3 + s_4c_4)^2}$$
$$= \sqrt{s_{2-1}^2 + s_{3-1}^2 + s_{4-1}^2 + s_{3-2}^2 + s_{4-2}^2 + s_{4-3}^2}$$
$$= \sqrt{\sin^2\theta_2 + \sin^2(\theta_2+\theta_3) + \sin^2(\theta_2+\theta_3+\theta_4) + \sin^2\theta_3 + \sin^2(\theta_3+\theta_4) + \sin^2\theta_4},$$

dove $s_{i-j} = \sin(q_i - q_j)$ e nell'ultima espressione si sono utilizzati gli angoli relativi $\theta_i$ (di Denavit-Hartenberg), risultando $q_i = \sum_{j=1}^{i} \theta_j$. Si noti che, come aspettato, la manipolabilità è indipendente dal primo angolo $q_1 (= \theta_1)$.
In corrispondenza a configurazioni singolari ($H_{man}(q) = 0$) devono quindi annullarsi contemporaneamente tutti gli addendi sotto radice. Questo accade se e solo se

$$\theta_2 = \{0, \pm\pi\}, \quad \theta_3 = \{0, \pm\pi\}, \quad \theta_4 = \{0, \pm\pi\}.$$

Gli otto tipi di configurazioni singolari risultanti sono illustrate nella figura seguente (per $q_1 = 0$) e corrispondono ai possibili ripiegamenti del robot in modo che i bracci siano tutti allineati su un asse radiale uscente dall'origine.



Nel primo tipo di singolarità l'organo terminale si trova a distanza 4 dall'origine, al confine dello spazio di lavoro. Tale singolarità è l'unica inevitabile. Nel secondo, terzo, quinto e settimo tipo di singolarità l'organo terminale si trova a distanza 2 dall'origine. Infine, nel quarto, sesto e ottavo tipo di singolarità l'organo terminale si trova nell'origine. Pertanto il luogo dei punti cartesiani per l'organo terminale dove il robot può trovarsi in singolarità è costituito da una circonferenza di raggio 4 centrata nel'origine (robot certamente in singolarità), una circonferenza di raggio 2 centrata nel'origine (robot eventualmente in singolarità) e l'origine stessa (robot eventualmente in singolarità).

Per determinare configurazioni del robot a massima manipolabilità, occorre massimizzare, in modo non vincolato, la $H_{man}(q)$ o, equivalentemente, la $H^2_{man}(\theta)$. Le condizioni necessarie di ottimalità si calcolano dalle

$$\frac{\partial H^2_{man}(\theta)}{\partial \theta_2} = \frac{\partial H^2_{man}(\theta)}{\partial \theta_3} = \frac{\partial H^2_{man}(\theta)}{\partial \theta_4} = 0,$$

che si possono sviluppare senza difficoltà. È facile verificare che, ad esempio, alle due configurazioni

$$\theta_1 = \text{arbitrario}, \quad \theta_2 = \pi/2, \quad \theta_3 = \pi/2, \quad \theta_4 = \pi/2$$

e

$$\theta_1 = \text{arbitrario}, \quad \theta_2 = \pi/2, \quad \theta_3 = -\pi/2, \quad \theta_4 = -\pi/2$$

corrispondono due massimi locali di $H^2_{man}(\theta)$ (le condizioni sufficienti del secondo ordine sono verificate). In entrambi i casi, si ha $H^2_{man}(\theta) = 4$. È anche possibile, anche se non immediato, verificare che tale valore è un massimo *globale*.