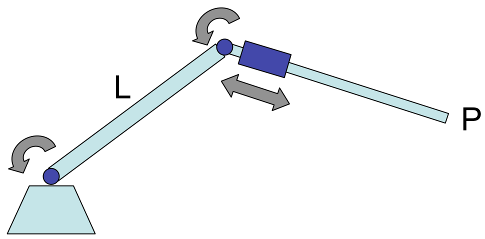
Prova Scritta di Robotica I

8 Gennaio 2004

Esercizio 1

Il robot planare in figura è costituito da due giunti rotatori ed uno prismatico.



- Assegnare le terne di riferimento secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg, in modo che gli assi x_i, $i = 0, \ldots, 3$, siano tutti nel piano del moto. Si utilizzino i parametri variabili come coordinate di giunto $q = (q_1, q_2, q_3)$.
- Determinare il valore del vettore di forze generalizzate ai giunti $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ (due coppie ed una forza) in modo da bilanciare staticamente una forza lineare applicata sull'end-effector pari a ${}^0F = (0 \;\; -1)^T$ [N] nella configurazione $q = (\pi/4, \pi/4, 0.5)$ [rad,rad,m].
- Posto $L = 1$ [m], determinare il valore del vettore di velocità di giunto $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$ *a norma minima* che realizza una velocità lineare dell'end-effector pari a ${}^0v = (0 \;\; 1)^T$ [m/sec] nella configurazione $q = (0, \pi/2, 0.5)$ [rad,rad,m].

Esercizio 2

Per un polso sferico di un robot manipolatore, si pianifichi una traiettoria nello spazio cartesiano che interpoli in $T = 5$ sec i due orientamenti iniziale e finale

$$
{}^0R_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad {}^0R_f = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

con velocità angolare iniziale e finale nulla. Quanto vale il vettore di velocità angolare ${}^0\omega$ all'istante intermedio?

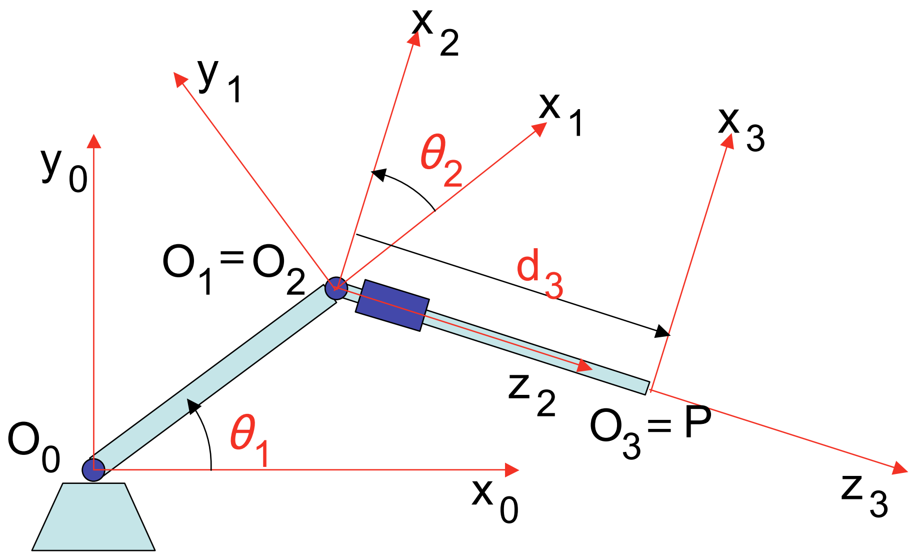
[180 minuti di tempo; libri aperti]

Soluzioni

8 Gennaio 2004

Soluzione Esercizio 1

L'assegnazione richiesta delle terne SR_i, con $i = 0, 1, 2, 3$, è riportata in figura. Gli assi z_0 e z_1 sono uscenti dal piano, mentre z_2 e z_3 sono coincidenti.



La tabella di Denavit-Hartenberg è:

i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	0	L	0	q_1
2	$\frac{\pi}{2}$	0	0	q_2
3	0	0	q_3	0

Nella configurazione $q = (0, \pi/2, s)$, il manipolatore è quindi disteso lungo l'asse x_0 con il punto P a distanza $L + s$ dall'origine O_0.

La cinematica diretta d'interesse è quella relativa alla posizione del punto P nel piano

$$^0p = \left[\begin{array}{c} ^0p_x \\ ^0p_y \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} L\cos q_1 + q_3 \sin(q_1 + q_2) \\ L\sin q_1 - q_3 \cos(q_1 + q_2) \end{array} \right].$$

La velocità lineare del punto P si ottiene per differenziazione

$$^0v = \frac{d\,^0p}{dt} = \frac{\partial\,^0p}{\partial q}\frac{dq}{dt} = J(q)\dot{q},$$

dove

$$J(q) = \begin{bmatrix} -L\sin q_1 + q_3\cos(q_1+q_2) & q_3\cos(q_1+q_2) & \sin(q_1+q_2) \\ L\cos q_1 + q_3\sin(q_1+q_2) & q_3\sin(q_1+q_2) & -\cos(q_1+q_2) \end{bmatrix}.$$

Lo Jacobiano $J(q)$ cade di rango (singolarità cinematica) se e solo se risulta $q_3 = 0$ e $q_2 = \{0, \pi\}$, cioè quando si annullano contemporaneamente i tre minori 2×2 estraibili dalla $J(q)$.

Dal principio dei lavori virtuali, una forza F applicata nel punto P equivale ad una forza generalizzata ai giunti pari a

$$\tau = J^T(q)F.$$

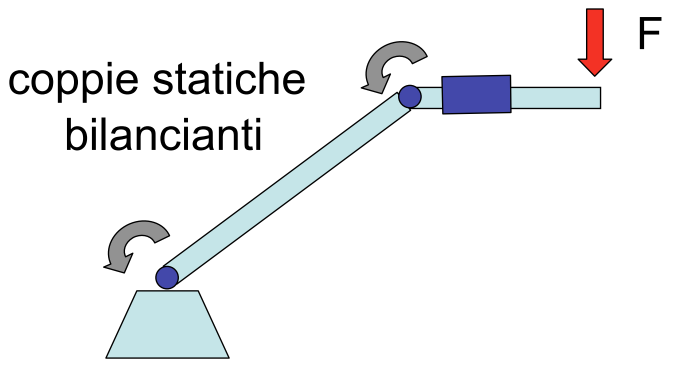
In condizioni di equilibrio statico, gli attuatori ai giunti devono quindi fornire una forza generalizzata $\tau_{\text{stat}} = -J^T(q)F$. Essendo tutte le grandezze cartesiane in gioco espresse in terna 0, si ha

$$\tau_{\text{stat}} = -J^T(q)\,^0F = -J^T(q)\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L\cos q_1 + q_3\sin(q_1+q_2) \\ q_3\sin(q_1+q_2) \\ -\cos(q_1+q_2) \end{bmatrix}.$$

Nella configurazione $q = (\pi/4, \pi/4, 0.5)$ [rad,rad,m] si ottiene

$$\tau_{\text{stat}} = \begin{bmatrix} L\frac{\sqrt{2}}{2} + 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

con il terzo attuatore (del giunto prismatico) che non deve fornire forza ed i primi due che forniscono coppie positive (antiorarie).



Poichè il robot è ridondante, la soluzione cinematica differenziale inversa con velocità di giunto a norma minima (tra le ∞^1 possibili) è fornita tramite pseudoinversione dello Jacobiano

$$\dot{q}_{\min} = J^{\#}(q)\,{}^0v = J^T(q)\left[J(q)J^T(q)\right]^{-1}{}^0v,$$

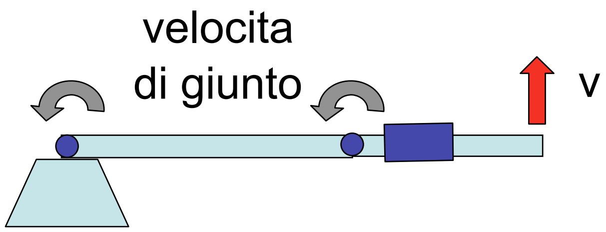
dove la seconda uguaglianza è valida solo al di fuori di singolarità cinematiche. Pur essendo possibile in tal caso fornire l'espressione simbolica degli elementi della matrice pseudoinversa, conviene qui lavorare con i dati numerici a disposizione. Posto $L = 1$, nella configurazione non singolare $q = (0, \pi/2, 0.5)$ si ha

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\dot{q}_{\min} = J^T\left[JJ^T\right]^{-1}\,{}^0v = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

con $\dot{q}_{\min}$ che minimizza la norma $\|\dot{q}\|$ tra tutte le $\dot{q}$ tali che $J\dot{q} = {}^0v$.



Soluzione Esercizio 2

Il metodo più diretto per risolvere il problema è quello di utilizzare la rappresentazione asse/angolo. In alternativa, si possono utilizzare gli angoli di Eulero ma occorre scegliere con cautela una rappresentazione minimale dell'orientamento che sia priva di singolarità, in particolare nell'orientamento iniziale e finale.

Metodo asse/angolo

La rotazione necessaria per portare una terna con l'orientamento iniziale assegnato a sovrapporsi con una terna avente l'orientamento finale desiderato è data dalla matrice

$${}^iR_f = {}^0R_i^T\,{}^0R_f = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

i cui singoli elementi verranno indicati con r_{ij}. A questa matrice di rotazione relativa è possibile associare un versore k (asse invariante nel riorientamento) ed un angolo θ_f in modo che sia ${}^iR_f = R(k, \theta_f)$ (rappresentazione asse/angolo). Si ha:

$$\begin{aligned}\theta_f &= \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2} - 2}{4}\right) \\ &= 1.7178\,[\text{rad}] = 98.42^\circ\end{aligned}$$

$$k = \frac{1}{2\sin\theta_f}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{1.9784}\begin{bmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8629 \\ -0.3574 \\ 0.3574 \end{bmatrix}.$$

Si noti che il versore k è anche l'autovettore associato all'autovalore $+1$ della matrice di rotazione ${}^iR_f$.

La traiettoria in orientamento sarà allora data da una rotazione $\theta(t)$ intorno all'asse fisso k, con le condizioni al contorno richieste

$$\theta(0) = 0 \quad \theta(T) = \theta_f \qquad \dot\theta(0) = \dot\theta(T) = 0,$$

dove $T = 5$ sec. È sufficiente quindi scegliere il polinomio cubico

$$\theta(t) = \theta_f\left[-2\left(\frac{t}{T}\right)^3 + 3\left(\frac{t}{T}\right)^2\right].$$

L'orientamento del polso rispetto alla terna base in un generico istante $t \in [0, T]$ sarà infine dato da ${}^0R_i R(k, \theta(t))$.

La derivata temporale della $\theta(t)$ è

$$\dot\theta(t) = \frac{\theta_f}{T}\left[-6\left(\frac{t}{T}\right)^2 + 6\left(\frac{t}{T}\right)\right]$$

ed ha un massimo in $t = T/2$ pari a $3\theta_f/2T = 0.5153$ rad/sec. La velocità angolare espressa nella terna di partenza è ${}^i\omega(t) = k\dot\theta(t)$, mentre espressa in terna base è ${}^0\omega(t) = {}^0R_i\,{}^i\omega(t)$. Nell'istante intermedio si ha:

$${}^0\omega\left(\frac{T}{2}\right) = {}^0R_i\,k\,\dot\theta\left(\frac{T}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.4447 \\ -0.1842 \\ 0.1842 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4447 \\ 0.1842 \\ 0.1842 \end{bmatrix}.$$

La norma euclidea di questo vettore vale

$$\left\|{}^0\omega\left(\frac{T}{2}\right)\right\| = \left\|{}^i\omega\left(\frac{T}{2}\right)\right\| = \left|\dot\theta\left(\frac{T}{2}\right)\right| = 0.5153,$$

essendo la norma invariante rispetto a rotazioni e $\|k\| = 1$.

Metodo con gli angoli di Eulero

Si noti anzitutto che la matrice di rotazione relativa all'orientamento iniziale è una singola rotazione di $-\pi/2$ intorno all'asse x_0. Questo vuol dire che tra le 12 possibili sequenze distinte di angoli (α, β, γ) di Eulero, sono escluse le sequenze XYX e XZX che risultano singolari quando il secondo angolo β è zero. Analogamente, poichè la matrice di rotazione relativa all'orientamento finale è una singola rotazione di $\pi/4$ intorno all'asse z_0, vanno escluse anche le sequenze ZXZ e ZYZ. In tutte queste rappresentazioni, solo la somma $\alpha+\gamma$ sarebbe determinata rispettivamente nell'orientamento iniziale o finale. Se da un lato questo può permettere una scelta oculata (tra le ∞^1 possibili) di tali due angoli, ad esempio in modo da avere la 'minima variazione possibile' tra valori iniziali e finali, il vero problema si presenta in fase di inversione della velocità angolare, quando sarebbe necessario invertire una matrice di trasformazione singolare (all'inizio o alla fine del moto). Ai fini del controllo del moto stesso, è quindi più opportuno evitare l'uso di tali rappresentazioni. Per lo stesso motivo, nell'uso di un'altra rappresentazione minimale occorre comunque verificare che essa rimanga non singolare anche *durante* il moto pianificato (ossia per ogni $t \in [0, T]$).

Un altra modalità di impiego degli angoli di Eulero è quella di definirli *relativamente* all'orientamento iniziale e non in termini assoluti, in maniera analoga a quanto fatto con il metodo asse/angolo. In tal caso, i valori iniziali sarebbero $(\alpha, \beta, \gamma)_i = (0, 0, 0)$ (ossia assenza di rotazione rispetto a ${}^0R_i$) mentre quelli finali $(\alpha, \beta, \gamma)_f$ dovrebbero realizzare la matrice ${}^iR_f$. Valgono ancora tutte le considerazioni precedenti sulle singolarità (in particolare, vanno escluse tutte le rappresentazioni che sono singolari per $\beta = 0$).

A scopo esemplificativo, verrà qui di seguito utilizzata la sequenza YZY di angoli (assoluti) di Eulero, denominati rispettivamente α (intorno ad y_0), β (intorno all'asse z risultante dalla prima rotazione) e γ (intorno all'asse y risultante dalla precedenti rotazioni). La matrice di rotazione associata è

$$R_{YZY}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha s\beta & c\alpha c\beta s\gamma + s\alpha c\gamma \\ s\beta c\gamma & c\beta & s\beta s\gamma \\ -s\alpha c\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha s\beta & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma \end{bmatrix}.$$

Anzitutto si estraggono i valori iniziali e finali di tali angoli (in radianti) dalle matrici ${}^0R_i$ (di elementi $r_{hk,i}$) e ${}^0R_f$ (di elementi $r_{hk,f}$):

$$
\begin{aligned}
\alpha_i &= \operatorname{atan2}(r_{32,i}\,, -r_{12,i}) = -\frac{\pi}{2}\\
\beta_i &= \operatorname{atan2}\left(\sqrt{r_{21,i}^2 + r_{23,i}^2}\,, r_{22,i}\right) = \frac{\pi}{2}\\
\gamma_i &= \operatorname{atan2}(r_{23,i}\,, r_{21,i}) = \frac{\pi}{2}\\
\alpha_f &= \operatorname{atan2}(r_{32,f}\,, -r_{12,f}) = 0\\
\beta_f &= \operatorname{atan2}\left(\sqrt{r_{21,f}^2 + r_{23,f}^2}\,, r_{22,f}\right) = \frac{\pi}{4}\\
\gamma_f &= \operatorname{atan2}(r_{23,f}\,, r_{12,f}) = 0.
\end{aligned}
$$

Occorre quindi interpolare i valori iniziali e finali dei tre angoli con polinomi cubici in modo da soddisfare le condizioni al contorno richieste:

$$
\begin{aligned}
\alpha(0) &= \alpha_i \qquad \alpha(T) = \alpha_f\\
\beta(0) &= \beta_i \qquad \beta(T) = \beta_f\\
\gamma(0) &= \gamma_i \qquad \gamma(T) = \gamma_f\\
\dot\alpha(0) &= \dot\alpha(T) = \dot\beta(0) = \dot\beta(T) = \dot\gamma(0) = \dot\gamma(T) = 0,
\end{aligned}
$$

dove $T = 5$ sec. Si avrà dunque

$$
\alpha(t) = \alpha_i + (\alpha_f - \alpha_i)\left[-2\left(\frac{t}{T}\right)^3 + 3\left(\frac{t}{T}\right)^2\right]
$$

ed analoghe per gli angoli $\beta(t)$ e $\gamma(t)$. Si nota che $\beta(t)$ rimane sempre positivo (rappresentazione mai singolare). L'orientamento del polso rispetto alla terna base in un generico istante $t \in [0, T]$ è dato dalla matrice $R_{YZY}(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$.

La derivata temporale della $\alpha(t)$ è pari a

$$
\dot\alpha(t) = \frac{\alpha_f - \alpha_i}{T}\left[-6\left(\frac{t}{T}\right)^2 + 6\left(\frac{t}{T}\right)\right]
$$

ed in modo analogo si ottengono le $\dot\beta(t)$ e $\dot\gamma(t)$. Tali funzioni hanno tutte un massimo (in valore assoluto) in $t = T/2$:

$$
\begin{bmatrix} \dot\alpha\left(\frac{T}{2}\right) \\ \dot\beta\left(\frac{T}{2}\right) \\ \dot\gamma\left(\frac{T}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \frac{3}{2T} = \begin{bmatrix} 0.4712 \\ -0.2356 \\ -0.4712 \end{bmatrix}.
$$

Il calcolo della velocità angolare (direttamente espressa nella terna di base) è leggermente più laborioso rispetto al metodo asse/angolo.

Si ha infatti:

$$
{}^0\omega(t) = T_{YZY}(\alpha(t), \beta(t)) \begin{bmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \\ \dot{\gamma}(t) \end{bmatrix},
$$

con

$$
T_{YZY}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \sin\beta \\ 1 & 0 & \cos\beta \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \sin\beta \end{bmatrix}.
$$

Essendo

$$
\alpha\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{\alpha_f + \alpha_i}{2} = -\frac{\pi}{2} \qquad \beta\left(\frac{T}{2}\right) \frac{\beta_f + \beta_i}{2} = -\frac{3\pi}{8},
$$

nell'istante intermedio si ha:

$$
{}^0\omega\left(\frac{T}{2}\right) = T_{YZY}\left(\alpha\left(\frac{T}{2}\right), \beta\left(\frac{T}{2}\right)\right) \begin{bmatrix} \dot{\alpha}\left(\frac{T}{2}\right) \\ \dot{\beta}\left(\frac{T}{2}\right) \\ \dot{\gamma}\left(\frac{T}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4745 \\ 0.2909 \\ 0.1412 \end{bmatrix}.
$$

Si noti che la norma euclidea di questo vettore vale

$$
\left\| {}^0\omega\left(\frac{T}{2}\right) \right\| = 0.5742
$$

ed è *superiore* di circa il 10% rispetto al caso precedente.

Nota finale: È disponibile il file MATLAB con i calcoli ed i grafici della $\theta(t)$ e delle $(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$ di questo esercizio.