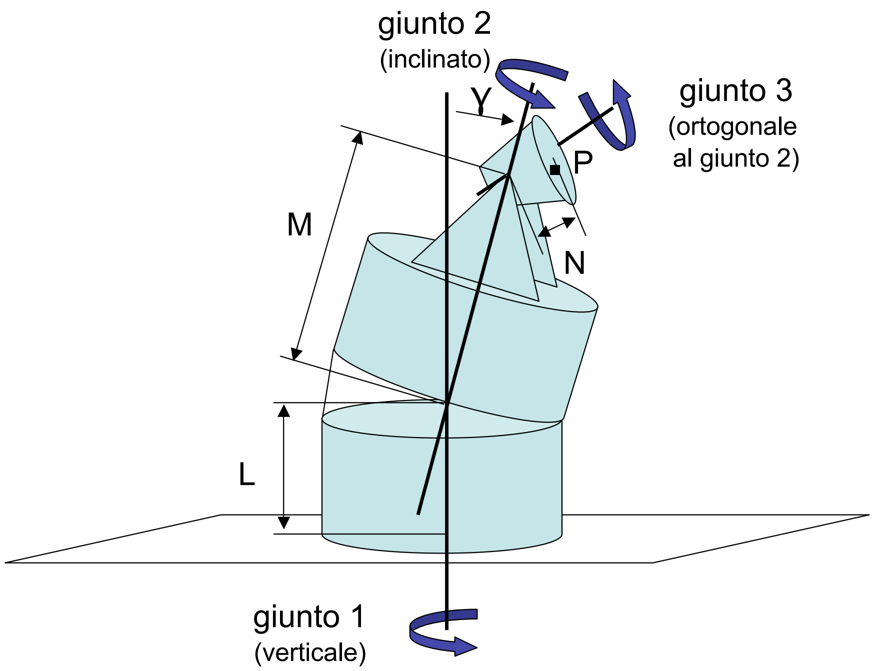
Prova Scritta di Robotica I

11 Dicembre 2003

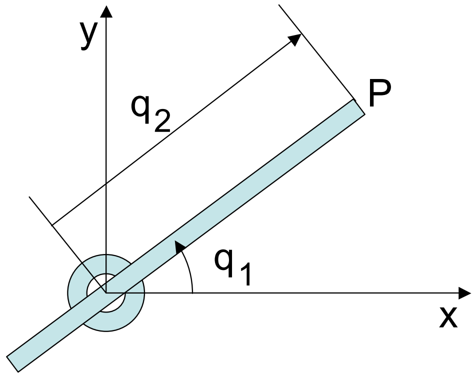
Esercizio 1

La struttura in figura è una colonnina di puntamento a tre gradi di libertà rotazionali.



- Assegnare le terne di riferimento e ricavare la tabella dei parametri secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg.
- Determinare l'espressione dei coseni direttori dell'asse finale di puntamento e della posizione del punto P in funzione delle variabili di giunto.
- Qual è il vantaggio di questa struttura ridondante per il compito di puntamento spaziale rispetto ad una avente due soli giunti (escludendo il secondo inclinato)?

Esercizio 2



Per il robot planare RP in figura, si vuole pianificare una traiettoria cartesiana rettilinea $p = p(t)$ di durata T tra i punti

$$P_i = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad \mapsto \quad P_f = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \qquad [\text{m}],$$

con velocità e accelerazione iniziale e finale nulla e continuità nel tempo almeno fino alla derivata seconda nell'intervallo $t \in [0, T]$. Determinare una legge oraria ed il minimo tempo di moto T ad essa associato in modo che i vincoli

$$\|\ddot{p}(t)\| \leq 4 \ [\text{m/s}^2], \qquad |\dot{q}_1(t)| \leq 2 \ [\text{rad/s}], \qquad |\dot{q}_2(t)| \leq 2 \ [\text{m/s}]$$

siano soddisfatti $\forall t \in [0, T]$.

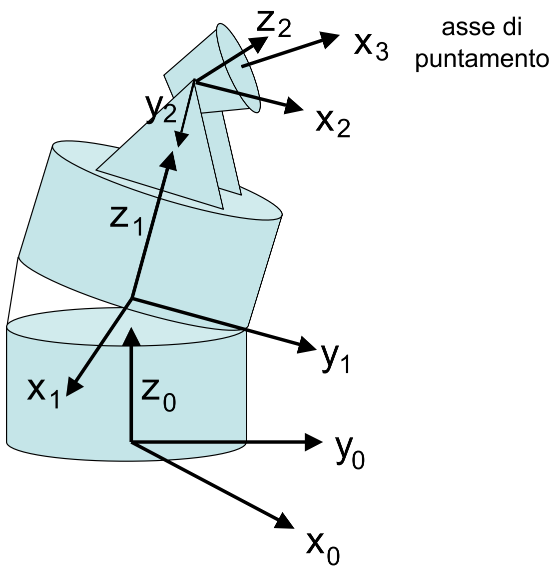
[180 minuti di tempo; libri aperti]

Soluzioni

11 Dicembre 2003

Soluzione Esercizio 1

L'assegnazione delle terne SR_i, con $i = 0, 1, 2, 3$, è riportata in figura. Dell'ultima terna viene mostrato solo l'asse x_3 di puntamento. L'asse x_1 è sempre orizzontale, l'asse y_2 coincide con $-z_1$, l'asse z_2 è orizzontale solo quando l'angolo θ_2 tra gli assi x_1 e x_2 (intorno a z_1) è pari a $\pm\pi/2$, l'asse z_3 coincide con z_2 (per la scelta fatta).



La tabella di Denavit-Hartenberg è:

i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	$-\gamma$	0	L	q_1
2	$-\frac{\pi}{2}$	0	M	q_2
3	0	N	0	q_3

Le matrici di trasformazione omogenea sono:

$$
{}^0A_1(q_1) = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 c_\gamma & -s_1 s_\gamma & 0 \\ s_1 & c_1 c_\gamma & c_1 s_\gamma & 0 \\ 0 & -s_\gamma & c_\gamma & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
{}^1A_2(q_2) = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & M \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
{}^2A_3(q_3) = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & Nc_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & Ns_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

in cui si è posto $s_i = \sin q_i$, $c_i = \cos q_i$ $(i = 1, 2, 3)$ e $s_\gamma = \sin\gamma$, $c_\gamma = \cos\gamma$.

Nella cinematica diretta si ha:

$$
T = {}^0A_1(q_1)\,{}^1A_2(q_2)\,{}^2A_3(q_3) = \begin{bmatrix} R & p \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \quad s \quad a & p \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}.
$$

Svolgendo i prodotti, interessa solo il versore $n = {}^0x_3$

$$
n = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1c_2c_3 - s_1s_2c_3c_\gamma + s_1s_3s_\gamma \\ s_1c_2c_3 + c_1s_2c_3c_\gamma - c_1s_3s_\gamma \\ -(s_2c_3s_\gamma + s_3c_\gamma) \end{bmatrix},
$$

mentre per la posizione del punto P si ha

$$
p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(c_1c_2c_3 - s_1s_2c_3c_\gamma + s_1s_3s_\gamma) - Ms_1s_\gamma \\ N(s_1c_2c_3 + c_1s_2c_3c_\gamma - c_1s_3s_\gamma) + Mc_1s_\gamma \\ L + Mc_\gamma - N(s_2c_3s_\gamma + s_3c_\gamma) \end{bmatrix}.
$$

Si noti che si può scrivere anche

$$
p = \begin{bmatrix} Nn_x - Ms_1s_\gamma \\ Nn_y + Mc_1s_\gamma \\ (L + Mc_\gamma) + Nn_z \end{bmatrix},
$$

di più immediata interpretazione geometrica.

Una struttura di puntamento a due soli gradi di libertà (con primo giunto ad asse verticale ed secondo giunto ad asse ortogonale e sempre orizzontale) ha una singolarità inevitabile quando il puntamento è verso lo zenit (velocità angolari normali al piano formato dall'asse del secondo giunto e dall'asse di puntamento non sono realizzabili istantaneamente). Anche con tre giunti si hanno configurazioni singolari, ma queste sono evitabili sfruttando opportunamente il grado di libertà ridondante durante il moto di puntamento.

Soluzione Esercizio 2

La traiettoria cartesiana desiderata $p = p(t)$ è costituita da un cammino rettilineo espresso in forma parametrica

$$p = p(s) = P_i + s\frac{P_f - P_i}{L}, \qquad L = \|P_f - P_i\|, \qquad s \in [0, L]$$

e da una legge oraria $s = s(t)$, $t \in [0, T]$. La scelta più semplice (anche se non l'unica) per quest'ultima è un polinomio quintico che impone

$$s(0) = 0, \quad s(T) = L, \quad \dot{s}(0) = \dot{s}(T) = 0, \quad \ddot{s}(0) = \ddot{s}(T) = 0,$$

da cui

$$s(t) = L\left[6\left(\frac{t}{T}\right)^5 - 15\left(\frac{t}{T}\right)^4 + 10\left(\frac{t}{T}\right)^3\right].$$

Differenziando rispetto al tempo si ha

$$\dot{s}(t) = \frac{L}{T}\left[30\left(\frac{t}{T}\right)^4 - 60\left(\frac{t}{T}\right)^3 + 30\left(\frac{t}{T}\right)^2\right]$$

e

$$\ddot{s}(t) = \frac{L}{T^2}\left[120\left(\frac{t}{T}\right)^3 - 180\left(\frac{t}{T}\right)^2 + 60\left(\frac{t}{T}\right)\right].$$

La velocità e l'accelerazione cartesiane sono

$$\dot{p}(t) = \frac{dp}{ds}\dot{s}(t) = \frac{P_f - P_i}{L}\dot{s}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\dot{s}(t)$$

e

$$\ddot{p}(t) = \frac{d^2p}{ds^2}\dot{s}^2(t) + \frac{dp}{ds}\ddot{s}(t) = \frac{P_f - P_i}{L}\ddot{s}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\ddot{s}(t).$$

Occorre allora studiare l'andamento delle funzioni $\dot{s}(t)$ e $\ddot{s}(t)$ nell'intervallo $[0, T]$. La $\dot{s}(t)$ è sempre positiva nell'intervallo aperto $(0, T)$ e, data la simmetria del moto, ha un massimo in $t = T/2$ (uno dei tre istanti in cui si annulla il polinomio cubico $\ddot{s}(t)$, essendo gli altri due per costruzione $t = 0$ e $t = T$):

$$\dot{s}_{\max} = \dot{s}\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{30L}{16T}.$$

La $\ddot{s}(t)$ ha un andamento speculare rispetto all'istante mediano ed è positiva durante la prima metà del moto e negativa durante la seconda. I massimi ed i minimi di $\ddot{s}(t)$ si ottengono nei due istanti in cui

$$\frac{d^3s}{dt^3} = \frac{L}{T^3}\left[360\left(\frac{t}{T}\right)^2 - 360\left(\frac{t}{T}\right) + 60\right] = 0,$$

ossia in

$$t_1 = \frac{T}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \qquad t_2 = \frac{T}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Pertanto si ha:

$$\ddot{s}_{\max} = \ddot{s}(t_1) = -\ddot{s}(t_2) = \frac{10L}{\sqrt{3}T^2}.$$

Il vincolo sulla accelerazione cartesiana per $t \in [0, T]$ diventa quindi:

$$\|\ddot{p}(t)\| \leq 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ddot{s}_{\max} \leq 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad T \geq \sqrt{\frac{10L}{4\sqrt{3}}}.$$

Per quanto riguarda i vincoli nello spazio dei giunti, occorre considerare la cinematica del robot RP. Si ha:

$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 \cos q_1 \\ q_2 \sin q_1 \end{bmatrix}$$

e

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_2 \sin q_1 & \cos q_1 \\ q_2 \cos q_1 & \sin q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = J(q)\dot{q},$$

con $\det J(q) = -q_2$. La cinematica inversa è fornita dalle

$$q_1 = \text{ATAN2}\{p_y, p_x\}, \qquad q_2 = \sqrt{p_x^2 + p_y^2},$$

dove si è considerata solo una delle due soluzioni. Si noti che q_1 non è definita solo quando $p = 0$ (ossia per $q_2 = 0$, in singolarità cinematica). Il moto cartesiano richiesto non attraversa l'origine e quindi non ci sono problemi di inversione del moto. Per la cinematica differenziale inversa si ha:

$$\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{p} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sin q_1}{q_2} & \dfrac{\cos q_1}{q_2} \\ \cos q_1 & \sin q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{bmatrix}.$$

Si noti che la traiettoria cartesiana desiderata ha la struttura

$$p_x = K > 0, \quad p_y = p_y(s), \quad \dot{p}_x = 0, \quad \dot{p}_y = -\dot{s},$$

da cui

$$\dot{q} = -\begin{bmatrix} \dfrac{\cos q_1}{q_2} \\ \sin q_1 \end{bmatrix} \dot{s}.$$

Poichè dalle relazioni cinematiche si ha

$$\cos q_1 = \frac{K}{q_2}, \quad \sin q_1 = \frac{p_y(s)}{q_2}, \quad q_2^2 = K^2 + p_y^2(s),$$

si ottiene infine

$$\dot{q}_1 = -\frac{K}{K^2 + p_y^2(s)}\,\dot{s}, \qquad \dot{q}_2 = -\frac{p_y(s)}{\sqrt{K^2 + p_y^2(s)}}\,\dot{s}.$$

Il massimo (in valore assoluto) di $\dot{q}_1(t)$ si ottiene sempre per $t = T/2$, quando i due fattori a prodotto sono infatti entrambi massimi ($\dot{s}(T/2) = \dot{s}_{\max}$, mentre per la frazione ciò avviene quando al denominatore $p_y(t)|_{t=T/2} = p_y(s)|_{s=L/2} = 0$). Il vincolo sulla velocità del giunto rotatorio per $t \in [0, T]$ diventa quindi:

$$|\dot{q}_1(t)| \leq 2 \iff \left|\dot{q}_1\left(\frac{T}{2}\right)\right| = \left|-\frac{1}{K}\right|\dot{s}_{\max} \leq 2 \iff T \geq \frac{15L}{16K}.$$

Per la $\dot{q}_2(t)$ non vale purtroppo un ragionamento analogo, poichè $\dot{q}_2(T/2) = 0$ è proprio il valore di inversione del moto (il giunto ha velocità negativa nella prima metà del moto e positiva nella seconda); la velocità massima (in valore assoluto) si avrà invece in due istanti simmetrici rispetto a $t = T/2$ difficili da determinare analiticamente. Si può però operare una semplice maggiorazione:

$$|\dot{q}_2(t)| = \left|-\frac{p_y(s)}{\sqrt{K^2 + p_y^2(s)}}\right| |\dot{s}(t)| < |\dot{s}(t)| \leq \dot{s}_{\max}.$$

Da questa si ottiene, $\forall t \in [0, T]$, la condizione sufficiente:

$$\dot{s}_{\max} = \frac{30L}{16T} \leq 2 \qquad \iff \qquad T \geq \frac{15L}{16} \qquad \Rightarrow \qquad |\dot{q}_2(t)| \leq 2.$$

Fintanto che $K \leq 1$, con i limiti dati sulle velocità, il soddisfacimento del vincolo sulla velocità massima del primo giunto implica il soddisfacimento del vincolo sulla velocità massima del secondo.

Posto $L = \|P_f - P_i\| = 1$ e $K = 0.5$ dai dati numerici del problema, il tempo minimo di moto sul cammino cartesiano assegnato e con la legge oraria polinomiale scelta è quindi pari a

$$T = \max\left\{\sqrt{\frac{10}{4\sqrt{3}}}, \frac{30}{16}\right\} = 1.875,$$

con il solo vincolo sulla velocità massima del primo giunto saturato nell'istante $t = T/2 = 0.9375$ (con $\dot{q}_1(T/2) = -2$ rad/s).

Nota finale: È disponibile il file MATLAB con i grafici degli andamenti delle variabili cartesiane e di giunto di questo esercizio.