

Automazione

13 febbraio 2024

Esercizio 1

In un sistema di automazione che opera a livello di coordinamento è necessario gestire:

- ogni 12 t.u., un task A_1 che impiega 5 t.u.;
- ogni 16 t.u., un task A_2 che impiega 3 t.u.;
- ogni 24 t.u., un task A_3 che impiega 8 t.u.

I suddetti task sono periodici e devono essere gestiti in modalità hard real time. C'è inoltre un task aperiodico, da gestire in modalità soft real time, che ha un activation time di 4 t.u., una deadline relativa di 40 t.u., e un computation time di 3 t.u. Si ipotizzi che tutti i task descritti siano indipendenti dal punto di vista funzionale l'uno dall'altro. Si risolvano i seguenti punti.

1. Verificare se sussiste la condizione necessaria di schedulabilità dei task periodici.
2. Verificare se sussiste almeno una delle condizioni sufficienti di schedulabilità dei task periodici equivalenti, utilizzando l'algoritmo RMPO.
3. Eseguire lo scheduling dei task periodici con RMPO e verificare se il processore è completamente utilizzato, motivando la risposta.
4. Eseguire lo scheduling dei task periodici con EDF e verificare se il processore è completamente utilizzato, motivando la risposta.
5. Utilizzando l'algoritmo di scheduling per cui il processore risulta essere non completamente utilizzato (in caso lo siano entrambi, scegliere a piacere l'algoritmo), verificare se sia possibile gestire il task aperiodico in maniera tale che sia eseguito entro la deadline assoluta applicando le seguenti politiche esattamente nell'ordine in cui sono proposte:
 - a) BACKGROUND;
 - b) POLLING SERVER caratterizzato da $T_{SRV} = 16$ t.u. e $C_{SRV} = 1$ t.u.;
 - c) DEFERRING SERVER caratterizzato da $T_{SRV} = 16$ t.u. e $C_{SRV} = 1$ t.u.

Esercizio 2

Una cella produttiva ha tre diverse macchine utensili (M_1 , M_2 e M_3) che possono lavorare ognuna un pezzo alla volta. All'ingresso della cella arrivano in maniera casuale tre tipi di pezzi grezzi (A , B e C) prodotti a monte della cella. La macchina M_1 può lavorare solo i pezzi A e B , la macchina M_2 i pezzi B e C e la macchina M_3 i pezzi A e C . I pezzi entrano uno per volta nella cella in modo regolato da un supervisore. L'istradamento dei pezzi all'interno della cella avviene in base alla prima disponibilità di una macchina appropriata (risolvendo eventuali conflitti in modo random).

- Modellare il funzionamento della cella mediante una rete ordinaria di Petri in modo che a regime ci siano in media almeno due macchine occupate in una lavorazione.
- Modificare quindi la rete in modo che ci possano essere periodi in cui tutte le macchine lavorano contemporaneamente se ci sono pezzi appropriati disponibili.

In entrambi i casi, evitare che possano insorgere situazioni di deadlock.

Esercizio 3

Si consideri la rete di Petri supervisionata in Fig. 1. Sono indicati in nero i posti e le transizioni del processo originale e in amaranto una struttura di supervisione con due posti monitor e relativi archi da/verso le transizioni del processo originale. Verificare che la rete supervisionata sia limitata, viva e reversibile, costruendo l'albero di raggiungibilità e determinando T-invarianti e P-invarianti. Ricavare due possibili disuguaglianze lineari nella forma $\mathbf{h}_i^T \mathbf{x} \leq k_i$, $i = 1, 2$, sulle marcature raggiungibili della rete di Petri originaria che determinino il supervisore presente nella figura (si tratta di un problema 'inverso' di sintesi del supervisore).

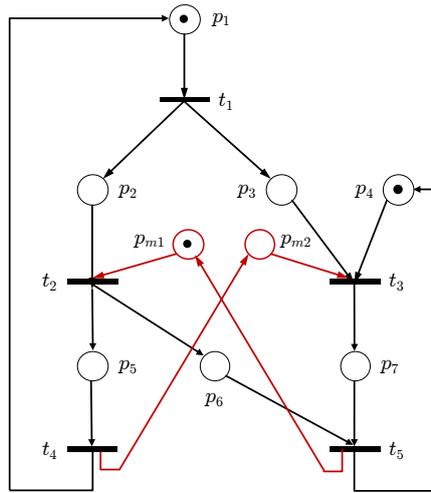


Figura 1: Una rete di Petri supervisionata con due posti monitor.

Esercizio 4

Si vuole dimensionare una linea di trasferta sincrona composta da stazioni multi-utensile e senza buffer intermedi, con le quali si devono eseguire $M = 9$ lavorazioni sui pezzi grezzi in ingresso. I tempi di esecuzione e le precedenze tra lavorazioni sono indicati nella Tab. 1. La linea deve garantire un tasso di produzione di 16 pezzi finiti su due turni di 8 ore. Si assegnino le lavorazioni in modo da minimizzare il numero N di stazioni necessario a raggiungere il target produttivo, tenendo conto dei vincoli di precedenza. Utilizzare l'euristica RPWT e verificare se fornisca una soluzione ottima o se esista invece una tecnica di assegnazione migliore. Determinare in ogni caso i tempi morti di ogni stazione, lo sbilanciamento medio rispetto al carico effettivo della linea (in durata e in percentuale), il tasso di produzione effettivo e il tempo di attraversamento a regime dell'intera linea.

lavorazioni	A	B	C	D	E	F	G	H	I
durata [in minuti]	40	30	50	40	6	25	15	20	18
immediatamente precedenti	-	A	A	B	B	C	C	D E	F G

Tabella 1: Tempi di esecuzione e precedenze per le 9 lavorazioni della linea.

[4 ore (per tutti gli esercizi), 3 ore (senza Esercizio 1); libri aperti]

Soluzione

13 febbraio 2024

Esercizio 1

Punto 1)

Per verificare la condizione necessaria si calcola il fattore di utilizzazione dei task periodici hard real time:

$$U = \frac{5}{12} + \frac{3}{16} + \frac{8}{24} = \frac{20 + 9 + 16}{48} = \frac{45}{48} = 0.9375 < 1.$$

Dal fattore di utilizzazione si può dedurre che ai task aperiodici soft real time possono essere dedicate al massimo 3 t.u. ogni 48.

Punto 2)

Verificata la condizione necessaria, controlliamo se esiste almeno una condizione sufficiente:

- sicuramente $U > \ln 2 \simeq 0.69$;
- inoltre, $U > U_{lsm}(\text{RMPO}) = n(2^{1/n} - 1) = 3(2^{1/3} - 1) \simeq 0.78$;
- infine, i task non sono legati tra loro da relazioni armoniche.

Non possiamo quindi dire a priori se RMPO è in grado di schedulare i task.

Punto 3)

L'esecuzione dello scheduling RMPO è mostrata in Fig. 2. Da questa si evince che RMPO è soluzione del problema di scheduling dei task periodici.

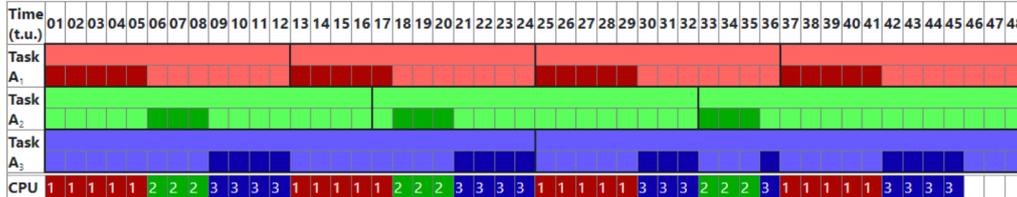


Figura 2: Scheduling con RMPO.

Per definizione, dato un algoritmo di scheduling e un insieme di task periodici, il processore viene detto completamente utilizzato se la schedulazione è fattibile e se un aumento comunque piccolo di uno qualsiasi dei computation time rende la schedulazione impossibile. Osservando la trama di scheduling è immediato osservare che un aumento comunque piccolo di uno qualsiasi dei computation time rende la schedulazione impossibile in quanto la prima occorrenza del task A_3 andrebbe necessariamente in timeout (cioè, eccederebbe la propria deadline assoluta).

Punto 4)

L'esecuzione dello scheduling EDF è riportata in Fig. 3.

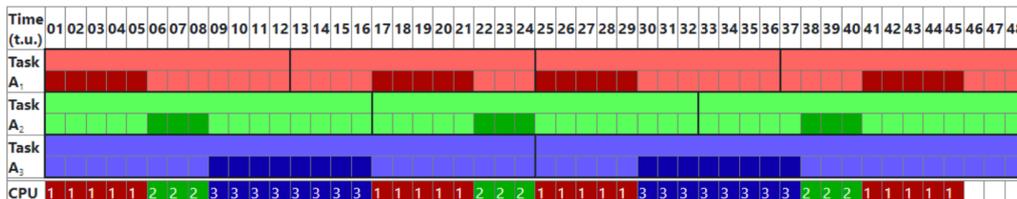


Figura 3: Scheduling con EDF.

Punto 5.c)

Attuando una politica di tipo DEFERRING SERVER si ottiene il risultato in Fig. 5, da cui si evince che la tale politica permette di eseguire il task aperiodico entro la deadline assoluta.

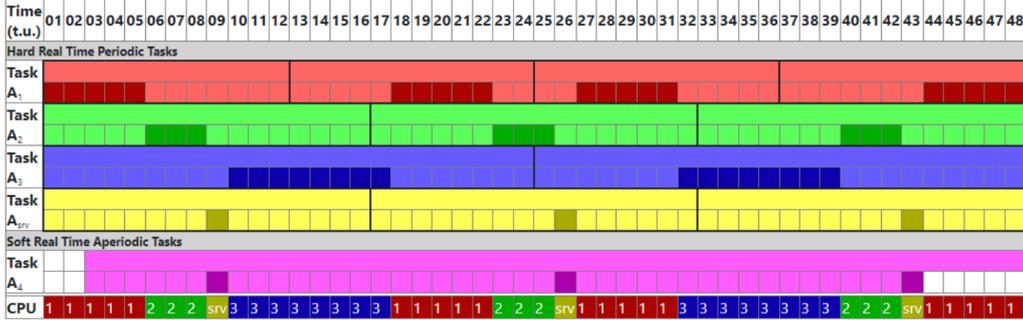


Figura 5: Scheduling con politica DEFERRING SERVER.

Esercizio 2

Si faccia riferimento alla rete di Petri in Fig. 6. La struttura della rete è modulare, ripetuta per ogni macchina e per ogni tipo di pezzo. La numerazione di posti e transizioni è fatta *ad hoc*, per evidenziare gli elementi costitutivi (macchine M_1 , M_2 e M_3 o pezzi A , B e C), insieme agli eventi connessi a coppie macchina/tipo di pezzo (*start* o *end* della lavorazione di un tipo di pezzo su una data macchina). Il significato dei 13 posti e delle 15 transizioni è il seguente:

- p_m = posto monitor del supervisore (vedi oltre sulla presenza di token T);
- $p_{A/B/C}$ = presenza di (uno o più) pezzi di tipo A , B o C in coda all'interno della cella;
- $p_{1/2/3}$ = disponibilità della macchina M_1 , M_2 o M_3 ;
- p_{ij} = pezzo j in lavorazione sulla macchina i , con $i = 1, 2, 3$ e $j = A, B, C$;
- $t_{A/B/C}$ = arrivo nella cella di un pezzo di tipo A , B o C ;
- $t_{ij,s}$ = inizio della lavorazione del pezzo j sulla macchina i ;
- $t_{ij,e}$ = fine della lavorazione del pezzo j sulla macchina i .

La marcatura iniziale è $\mathbf{x}_0 = (T, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Il posto p_m svolge il ruolo di supervisione dell'ingresso dei pezzi nella cella. In particolare, il numero di token T presenti in p_m in fase di inizializzazione regola il comportamento della cella:

- $T = 0$: la cella non è attiva;
- $T = 1$: nella cella lavora una sola macchina per volta (sul tipo di pezzo che dipende dagli arrivi);
- $T = 2$: a regime, lavorano in media due macchine contemporaneamente;
- $T = 3$: a regime, lavorano in media tutte e tre le macchine contemporaneamente;
- $T \geq 4$: si possono accumulare token (code) nei posti p_A , p_B e p_C di accesso alle tre macchine.

Infine, eliminando il posto p_m non c'è più alcuna supervisione sugli arrivi dei pezzi e il numero dei token nei tre posti di ingresso può crescere senza un limite di principio; l'aggiunta di posti buffer con capacità limitata è utile in questo caso.

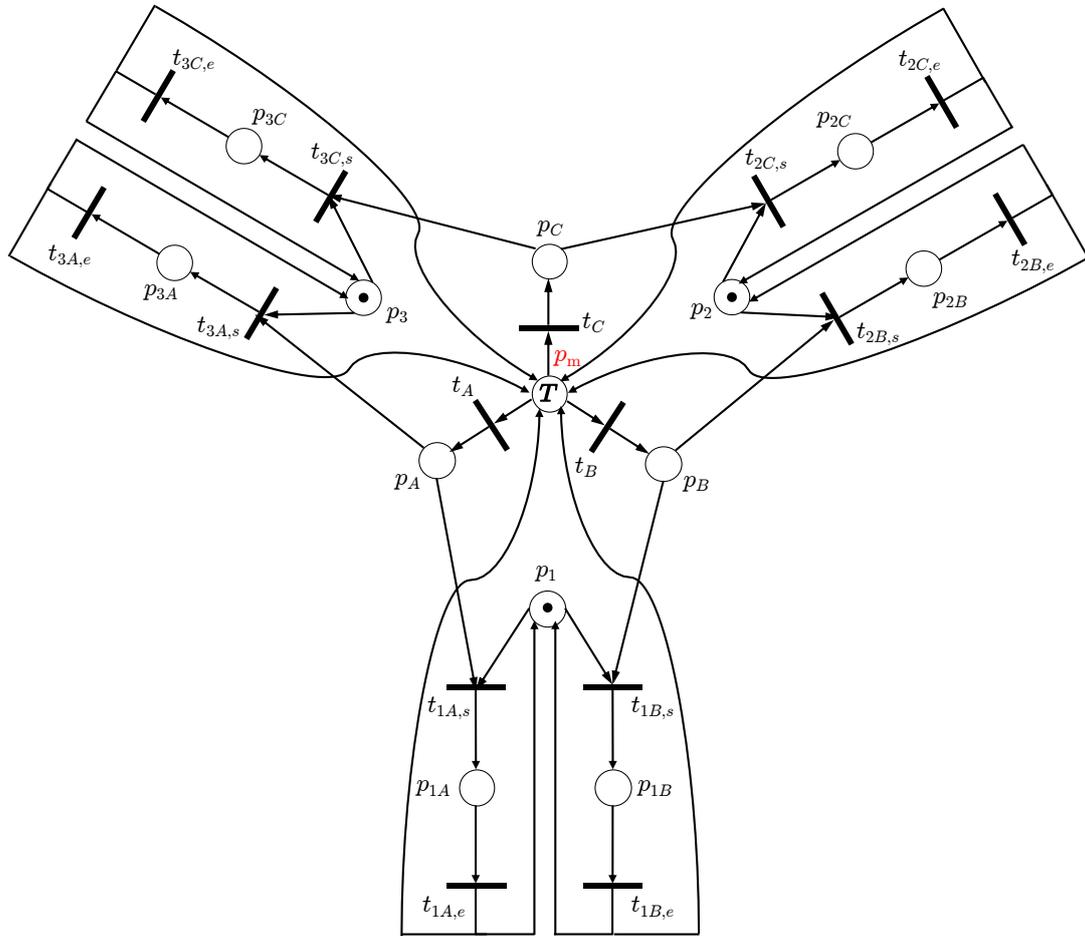


Figura 6: Modellistica della cella di lavorazione con una rete di Petri.

Esercizio 3

La rete di Petri supervisionata di Fig. 1 ha $p = 9$ posti (di cui due sono posti monitor del supervisore) e $t = 5$ transizioni. La sua matrice di incidenza C_s , di dimensioni $p \times t = 9 \times 5$, si può decomporre per righe nelle due parti C , relativa ai 7 posti del processo originale, e C_m , relativa ai 2 posti monitor del supervisore:

$$C_s = \begin{pmatrix} C \\ C_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Analogamente, anche la marcatura iniziale ha due parti $\mathbf{x}_{s0} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{m0}) = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$, con \mathbf{x}_{m0} di dimensione 2. E' facile verificare (anche senza MATLAB) che la matrice \mathbf{C}_s ha rango $\rho = 4$: sommando infatti tutte le colonne si ottiene il vettore $\mathbf{0}$ (le cinque colonne non sono quindi linearmente indipendenti); cancellando invece l'ultima colonna e le ultime cinque righe di \mathbf{C}_s , si ottiene una sotto-matrice 4×4 (la $\mathbf{C}_s(1:4, 1:4)$) il cui determinante è pari a 1.

Prima di individuare gli invarianti della rete supervisionata, conviene provare la costruzione dell'albero di raggiungibilità della rete. Se infatti questa costruzione va in porto, la limitatezza della rete è automaticamente dimostrata e dall'analisi dell'albero è anche immediato verificare le proprietà strutturali di vivezza e reversibilità. L'albero di raggiungibilità della rete supervisionata è riportato in Fig. 7: la rete è 2-limitata, viva e reversibile.

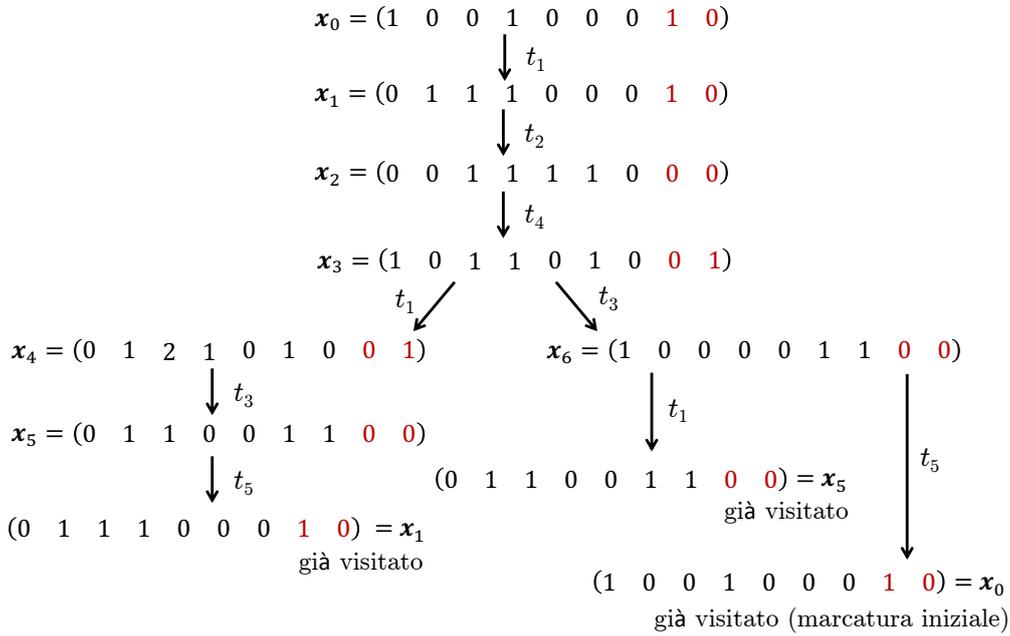


Figura 7: Albero di raggiungibilità della rete di Petri di Fig. 1.

Per quanto riguarda gli invarianti, osservando la struttura della matrice di incidenza \mathbf{C}_s in (1), è immediato il calcolo dell'unico T-invariante (essendo $t - \rho = 5 - 4 = 1$):

$$\mathbf{C}_s \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\eta} = \mu (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)^T, \quad \mu \in \mathbb{N}^+. \quad (2)$$

Per avere reversibilità è quindi necessario che tutte le transizioni scattino un numero uguale di volte. Una possibile sequenza ammissibile di transizioni a partire da \mathbf{x}_0 che riporta alla marcatura iniziale è $\{t_1, t_2, t_4, t_3, t_5\}$. Le altre sequenze ammissibili, a partire da ogni marcatura raggiungibile della rete, si possono ricavare seguendo i cammini che riportano alla marcatura iniziale \mathbf{x}_0 sull'albero in Fig. 7. Su questi cammini, il numero di scatti di ogni transizione è uguale (con μ eventualmente diverso sui diversi cammini) — in accordo con la (2).

Calcoliamo ora i P-invarianti $\boldsymbol{\gamma}_s$ della rete supervisionata. Si osservi anzitutto che:

$$\boldsymbol{\gamma}_s^T \mathbf{C}_s = \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C} + \boldsymbol{\gamma}_m^T \mathbf{C}_m = \mathbf{0}^T \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{C}_s^T \boldsymbol{\gamma}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{C}_m^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\gamma}_m \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Da questa partizione segue, come noto, che ai P-invarianti γ della rete originaria (che soddisfano $\gamma^T \mathbf{C} = \mathbf{0}^T$), una volta aggiunti zeri in coda in numero pari ai posti monitor, corrispondono altrettanti P-invarianti γ_s della rete supervisionata: nel caso presente, tali P-invarianti saranno della forma $\gamma_s = (\gamma, 0, 0)$, con γ di dimensione 7 e $\gamma_m = \mathbf{0}$ di dimensione 2. Per ricavare i P-invarianti γ della rete originale, si ha:¹

$$\mathbf{C}^T \gamma = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_1 &= 0 \\ \gamma_5 + \gamma_6 - \gamma_2 &= 0 \\ \gamma_7 - \gamma_3 - \gamma_4 &= 0 \\ \gamma_1 - \gamma_5 &= 0 \\ \gamma_4 - \gamma_6 - \gamma_7 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Essendo la dimensione dello spazio nullo di \mathbf{C}^T pari a $(p-2) - \rho = 7 - 4 = 3$, proviamo a esprimere tutte le soluzioni non banali delle cinque equazioni lineari omogenee (4) in termini di tre parametri interi e non negativi, α , β e δ , che possiamo assegnare rispettivamente alle tre componenti

$$\gamma_2 = \alpha, \quad \gamma_3 = \delta, \quad \gamma_4 = \beta.$$

Dalla prima, terza e quarta equazione in (4), ricaviamo quindi

$$\gamma_1 = \gamma_2 + \gamma_3 = \alpha + \delta, \quad \gamma_7 = \gamma_3 + \gamma_4 = \delta + \beta, \quad \gamma_5 = \gamma_1 = \alpha + \delta.$$

Dalla quinta equazione, utilizzando anche l'espressione di γ_7 , si ha però

$$\gamma_6 = \gamma_4 - \gamma_7 = \gamma_4 - (\gamma_3 + \gamma_4) = -\gamma_3.$$

Poiché siamo interessati a soluzioni intere e non negative, da questa identità segue necessariamente che $\gamma_6 = \gamma_3 = 0$ e quindi $\delta = 0$. Le soluzioni di interesse per questa parte del calcolo di P-invarianti sono perciò descritte dai soli due parametri α e β come

$$\gamma^T = (\alpha \quad \alpha \quad 0 \quad \beta \quad \alpha \quad 0 \quad \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^+.$$

La terza dimensione dello spazio nullo di \mathbf{C}^T non contiene soluzioni diverse da zero con le componenti non nulle che appartengano a \mathbb{N}^+ .

Tornando alla rete supervisionata, avendo posto $\gamma_m = \mathbf{0}$, due P-invarianti canonici e a supporto minimo sono quindi

$$\gamma_A^T = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 0 \quad 0), \quad \gamma_B^T = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad | \quad 0 \quad 0). \quad (5)$$

Completiamo ora l'analisi cercando altri P-invarianti γ_s per l'intera rete supervisionata in modo da coinvolgere anche elementi non nulli in $\gamma_m = (\gamma_8, \gamma_9)$. Si ha:

$$\mathbf{C}_s^T \gamma_s = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_1 &= 0 \\ \gamma_5 + \gamma_6 - \gamma_2 - \gamma_8 &= 0 \\ \gamma_7 - \gamma_3 - \gamma_4 - \gamma_9 &= 0 \\ \gamma_1 - \gamma_5 + \gamma_9 &= 0 \\ \gamma_4 - \gamma_6 - \gamma_7 + \gamma_8 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Manipolando queste cinque equazioni lineari omogenee (di cui solo quattro sono linearmente indipendenti), è possibile ricavare soluzioni in forma parametrica tra le quali individuare quelle di possibile interesse.

¹Il calcolo dei P-invarianti della rete originaria, descritta dalla matrice \mathbf{C} di dimensione 7×5 , è stato già risolto nell'Esercizio 3 del compito di Automazione del 19 gennaio 2024. La soluzione viene ripetuta qui per completezza.

In linea di principio, la procedura è supportata da due considerazioni:

- cerchiamo nuovi P-invarianti nei quali i due elementi di γ_m assumano coppie di valori (per esempio: $(1, 0)$, $(0, 1)$, o $(1, 1)$) che garantiscano indipendenza lineare una volta aggiunti ai precedenti P-invarianti;
- tra questi nuovi P-invarianti dovrebbero essercene alcuni che hanno una componente diversa da zero in corrispondenza ai posti p_3 e/o p_6 , in modo che i relativi insiemi di supporto, assieme a quelli dei P-invarianti già trovati in (5), completino la copertura di tutti i posti della rete supervisionata (tenendo conto del fatto che ne abbiamo già verificato la limitatezza).

E' possibile verificare che le seguenti due classi di P-invarianti, ognuna parametrizzata da quattro variabili definite sul dominio degli interi, sono soluzioni del sistema (6):

$$\gamma_C^T = (\theta \quad \theta + \psi - \phi + 1 \quad \phi - \psi - 1 \quad \varepsilon \quad \theta + \psi \quad 1 \quad \varepsilon + \phi - 1 \quad | \quad \phi \quad \psi), \quad \theta, \varepsilon, \phi, \psi \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

$$\gamma_D^T = (\theta \quad \theta - 1 \quad 1 \quad \varepsilon \quad \theta + \psi \quad \phi - \psi - 1 \quad 1 + \varepsilon + \psi \quad | \quad \phi \quad \psi), \quad \theta, \varepsilon, \phi, \psi \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Tali parametrizzazioni inglobano le due considerazioni precedenti, avendo forzato i valori $\gamma_6 = 1$ nel primo caso e $\gamma_3 = 1$ nel secondo caso e lasciato anche la possibilità di scelta diretta dei valori di $\gamma_8 = \phi$ e $\gamma_9 = \psi$. Dalle (7) e (8) si possono generare i seguenti due P-invarianti canonici e a supporto minimo:

$$\gamma_C^T = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 1 \quad 0), \quad \text{con } \theta = 0, \varepsilon = 0, \phi = 1, \psi = 0; \quad (9)$$

$$\gamma_D^T = (1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad | \quad 1 \quad 0), \quad \text{con } \theta = 1, \varepsilon = 0, \phi = 1, \psi = 0. \quad (10)$$

Tuttavia, esistono altri P-invarianti canonici e a supporto minimo che non sono ottenibili dalle precedenti espressioni generali, come ad esempio

$$\gamma_E^T = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad | \quad 1 \quad 1) \quad (11)$$

che ha valori nulli nei posti p_3 e p_6 , ma un insieme di supporto che copre ora anche il posto p_{m2} . Gli insiemi di supporto dei tre P-invarianti (9)–(11), assieme a quelli dei due P-invarianti (5) già trovati, ricoprono l'intera rete supervisionata, dimostrandone così di nuovo la limitatezza. E' facile inoltre verificare (per esempio con MATLAB) che i cinque P-invarianti canonici e a supporto minimo

$$\{\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C, \gamma_D, \gamma_E\}$$

sono linearmente indipendenti (la matrice 9×5 avente come colonne questi vettori ha rango pieno) e costituiscono quindi una base per l'intero sottospazio $\mathcal{N}\{\mathbf{C}_s^T\}$, esaurendo così la ricerca di P-invarianti per la rete supervisionata.

Viceversa, la semplice scelta complementare per $\gamma_m = (0, 1)$, se inserita nelle (7) e (8), conduce a valori negativi di almeno una componente nei P-invarianti risultanti, che non saranno quindi canonici. Per esempio:

$$\gamma_C^T = (0 \quad 2 \quad -2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 0 \quad 1), \quad \text{con } \theta = 0, \varepsilon = 1, \phi = 0, \psi = 1; \quad (12)$$

$$\gamma_D^T = (1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad -2 \quad 2 \quad | \quad 0 \quad 1), \quad \text{con } \theta = 1, \varepsilon = 0, \phi = 0, \psi = 1. \quad (13)$$

Tuttavia tali strutture possono tornare utili per rispondere all'ultima domanda dell'esercizio. A tale scopo, una volta accettata la presenza di componenti negative nelle soluzioni della $\gamma_s^T \mathbf{C}_s = \mathbf{0}^T$, è possibile ottenere dalla (8) una soluzione particolarmente semplice:

$$\gamma_D^T = (1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 0 \quad -1), \quad \text{con } \theta = 1, \varepsilon = 0, \phi = 0, \psi = -1. \quad (14)$$

I P-invarianti così determinati ci guidano nella soluzione del problema ‘inverso’ di sintesi del supervisore presente nella rete di Petri PN_s di Fig. 1, permettendo la definizione di due disuguaglianze sulle marcature raggiungibili della rete originale, qui denominata PN, e da queste la costruzione della struttura del supervisore (posti con relative marche e archi da/verso le transizioni) attraverso l’impiego della tecnica dei P-invarianti.

Da un punto di vista formale, occorre trovare due vettori riga \mathbf{h}_i^T a 7 componenti (pari al numero di posti della rete originale) che soddisfino le due relazioni

$$\mathbf{h}_i^T \mathbf{C} = -\mathbf{c}_{mi}^T, \quad i = 1, 2, \quad (15)$$

dove \mathbf{c}_{mi}^T sono le righe del blocco \mathbf{C}_m nella matrice di incidenza (1) della rete supervisionata. Confrontando la (15) con la partizione in (3) è chiaro che le soluzioni si possono trovare a partire da P-invarianti γ_s della rete supervisionata che abbiano come componenti γ_m rispettivamente (1, 0) e (0, 1) (o loro multipli), nel qual caso si può porre

$$\gamma_s^T \mathbf{C}_s = \gamma^T \mathbf{C} + \gamma_m^T \mathbf{C}_m = \mathbf{h}_i^T \mathbf{C} + \mathbf{c}_{mi}^T = \mathbf{0}^T$$

da cui

$$\mathbf{h}_i^T \mathbf{x} = -\mathbf{c}_{mi}^T \mathbf{x}_m \leq k_i. \quad \forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_m \end{pmatrix} \in R(PN_s),$$

dove l’ultima disuguaglianza è valida grazie alla limitatezza della rete supervisionata.

Si consideri quindi la disuguaglianza

$$x_6 \leq 1, \quad \forall \mathbf{x} \in R(PN) \quad (16)$$

e si noti che la marcatura iniziale $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ della rete originale soddisfa (strettamente) tale disuguaglianza. La (16) si riscrive nella forma generale

$$\mathbf{h}_1^T \mathbf{x} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0) \mathbf{x} \leq 1 = k_1, \quad \forall \mathbf{x} \in R(PN). \quad (17)$$

Si noti che \mathbf{h}_1 coincide esattamente con la prima parte (quella relativa ai posti della rete originale) del P-invariante γ_C in (9). Con la tecnica dei P-invarianti, la disuguaglianza (17) si traduce nell’aggiunta di un posto monitor p_{m1} collegato alle transizioni della rete originale con archi orientati, come specificato dalla riga aggiuntiva della matrice di incidenza da calcolarsi come

$$\mathbf{c}_{m1} = -\mathbf{h}_1^T \mathbf{C} = (0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1)$$

e da un numero iniziale di token in tale posto monitor dato da

$$x_{m1,0} = k_1 - \mathbf{h}_1^T \mathbf{x}_0 = 1 - 0 = 1.$$

Come si vede, si è ottenuta esattamente la struttura di supervisione del posto p_{m1} nella Fig. 1.

In modo analogo, la disuguaglianza

$$x_1 + x_3 + 2x_5 - 2x_6 + 2x_7 \leq 1, \quad \forall \mathbf{x} \in R(PN) \quad (18)$$

è anch’essa soddisfatta dalla marcatura iniziale e si riscrive nella forma generale

$$\mathbf{h}_2^T \mathbf{x} = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2 \ -2 \ 2) \mathbf{x} \leq 1 = k_2, \quad \forall \mathbf{x} \in R(PN), \quad (19)$$

con il vettore \mathbf{h}_2 che coincide con la prima parte del P-invariante γ_D in (13). La disuguaglianza (19) si traduce nella riga aggiuntiva della matrice di incidenza data da

$$\mathbf{c}_{m2} = -\mathbf{h}_2^T \mathbf{C} = (0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0)$$

e da un numero iniziale di token dato da

$$x_{m2,0} = k_2 - \mathbf{h}_2^T \mathbf{x}_0 = 1 - 1 = 0.$$

Anche qui si è ottenuta esattamente la struttura di supervisione del posto p_{m2} nella Fig. 1.

Come intuibile dalla molteplicità di P -invarianti trovati precedentemente, queste soluzioni non sono ovviamente le uniche possibili. In particolare, una soluzione più semplice per il posto p_{m2} si ottiene imponendo, invece della (18), la disuguaglianza

$$x_1 + x_3 \geq 1, \quad (20)$$

che risulta verificata dalla marcatura iniziale \mathbf{x}_0 della rete originaria. Si noti che questa può interpretarsi come una condizione che richiede un forma di ‘vivezza’ della rete originaria, piuttosto che come condizione che limita il numero di marche nel posto p_3 . Se si riscrive la disuguaglianza (20) come

$$-x_1 - x_3 \leq -1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{h}_2^T \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq -1 = k_2,$$

si vede che \mathbf{h}_2 coincide esattamente con *l’opposto* della prima parte del P -invariante γ_D in (14) — d’altronde abbiamo cambiato il verso della disuguaglianza! Procedendo, si ottiene

$$\mathbf{c}_{m2} = -\mathbf{h}_2^T \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e un numero iniziale di token dato da

$$x_{m2,0} = k_2 - \mathbf{h}_2^T \mathbf{x}_0 = -1 + 1 = 0,$$

che corrisponde nuovamente alla struttura di supervisione del posto p_{m2} nella Fig. 1.

Si noti infine che la struttura di supervisione del posto p_{m1} si ottiene anche utilizzando la disuguaglianza indotta dal P -invariante γ_C in (12), con $k_1 = 1$. Viceversa, il P -invariante γ_E in (11) induce una disuguaglianza che non porta a nessuna delle strutture dei due posti monitor nel supervisore di Fig. 1. Stesso discorso, a maggior ragione, per i due P -invarianti γ_A e γ_B in (5) della rete originaria.

In conclusione, il problema inverso di sintesi del supervisore è stato risolto appoggiandosi alla costruzione basata sulla tecnica dei P -invarianti, anche se nel secondo caso non si è utilizzato un P -invariante a componenti non negative.

Esercizio 4

La durata totale di tutte le $M = 9$ lavorazioni che devono essere eseguite dalle stazioni della linea di trasferta su ogni pezzo grezzo è pari a

$$T_{tot} = \sum_{i=1}^M T_i = 244 \text{ minuti.}$$

Il tasso di produzione richiesto è

$$TP = 16 \text{ pezzi}/(2 \times 8) \text{ h} = 1 \text{ pezzo}/60 \text{ minuti} \simeq 0.0166 \text{ pezzi/minuto.}$$

Il carico massimo teorico CMT di ogni stazione e il numero minimo teorico N_t di stazioni nella linea sono quindi

$$CMT = \frac{1}{TP} = \frac{1}{0.0166} = 60 \text{ minuti/pezzo} \quad \Rightarrow \quad N_t = \left\lceil \frac{T_{tot}}{CMT} \right\rceil = \left\lceil \frac{244}{60} \right\rceil = \lceil 4.066 \rceil = 5.$$

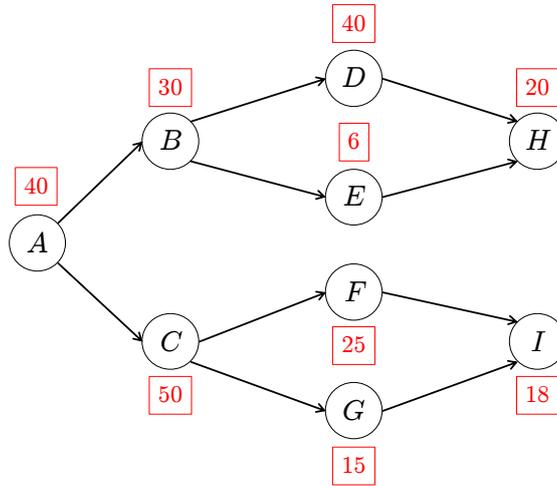


Figura 8: Grafo delle precedenze tra lavorazioni, con i tempi di esecuzione T_i in minuti.

Il grafo delle precedenze tra le lavorazioni è riportato in Fig. 8.

Per il dimensionamento della linea di trasferta, occorre determinare un'assegnazione delle lavorazioni alle stazioni della linea che sia ammissibile, ossia che soddisfi vincoli di precedenza del grafo e in cui le stazioni abbiano un carico $C_j \leq CMT$, $j = 1, \dots, N$, minimizzando il numero N di stazioni. Ovviamente sarà $N \geq N_t = 5$.

Volendo utilizzare l'euristica RPWT (Ranked Positional Weight Technique) per la soluzione, la Tab. 2 riporta gli insiemi S_i di tutte le lavorazioni successive a ogni singola lavorazione, con i relativi pesi posizionali PW_i definiti come

$$PW_i = T_i + \sum_{k \in S_i} T_k, \quad i = 1, \dots, 9.$$

Nella Tab. 3 le operazioni sono riordinate per peso posizionale PW_i decrescente. Si procede quindi all'assegnazione delle operazioni così ordinate alle stazioni della linea, fino a raggiungere il massimo carico C_j ammissibile per ciascuna stazione prima di passare a quella successiva (euristica RPWT). Il numero di stazioni così determinato è $N = 6$, un'unità in più rispetto al minimo teorico. La seconda stazione risulta essere la più carica, $C_2 = 50$, ossia 10 minuti in meno ($\simeq 16.6\%$) del massimo teorico ($CMT = 60$ minuti). All'interno delle stazioni 5 e 6, l'ordine di esecuzione delle lavorazioni è indifferente.

lavorazioni	A	B	C	D	E	F	G	H	I
durata [minuti]	40	30	50	40	6	25	15	20	18
S_i	tutte	D,E,H	F,G,I	H	H	I	I	–	–
PW_i [minuti]	244	96	108	60	26	43	33	20	18

Tabella 2: Insiemi S_i delle lavorazioni successive e dei pesi posizionali PW_i per le 9 lavorazioni.

lavorazioni	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>E</i>	<i>H</i>	<i>I</i>
PW_i	244	108	96	60	43	33	26	20	18
durata	40	50	30	40	25	15	6	20	18
carico [cumulativo per stazione]	40	50	30	40	25	40	46	20	38
stazioni	1	2	3	4	5	5	5	6	6

Tabella 3: Assegnazione delle lavorazioni alle stazioni della linea con l'euristica RPWT.

Il carico sulle singole stazioni è mostrato graficamente in Fig. 9. Il carico effettivo della linea è

$$C = \max_{i=j,\dots,N} C_j = 50.$$

Da questo si deduce il

$$(\text{massimo}) \text{ tasso di produzione} = \frac{1}{C} = \frac{1}{50} = 0.02 \text{ pezzi/minuto} = 19.2 \text{ pezzi/16h},$$

superiore del 20% al minimo richiesto (16 pezzi su due turni di 8h), come pure il

$$\text{tempo di attraversamento della linea (a regime)} = N \times C = 6 \times 50 = 300 \text{ minuti}.$$

In assenza di buffer intermedi, il più rapido avanzamento sincrono della linea di trasferta sarà quindi di 50 minuti: ogni 50 minuti entra un pezzo grezzo da lavorare e, a regime, esce un pezzo finito. Nella Fig. 9 sono indicati anche i tempi morti $d_j = C - C_j \geq 0$ di ciascuna stazione in questa condizione operativa. Lo sbilanciamento medio è quindi

$$d = \frac{\sum_{j=1}^N d_j}{N} = \frac{56}{6} \simeq 9.33 \text{ minuti},$$

pari a circa il 18.6% del carico effettivo della linea di trasferta.

In questo caso, il risultato ottenuto con l'euristica RPWT non è ottimo in termini di numero minimo di stazioni della linea di trasferta (né di sbilanciamento della linea). Infatti un'assegnazione ammissibile è effettivamente possibile anche utilizzando solo $N = N_t = 5$ stazioni, come mostrato graficamente nella Fig. 10.

Una volta completata la lavorazione *B*, la stazione 3 ha infatti ancora 30 minuti di tempo disponibile rispetto al carico massimo teorico. L'euristica RPWT porta alla scelta della lavorazione *D* (ossia quella con il PW_i maggiore tra le restanti) come la prossima da assegnare e quindi all'introduzione di una nuova stazione perché caricare *D* sulla terza stazione eccede il CMT. Viceversa, è possibile caricare la lavorazione *F* sulla stazione 3, essendo state già completate tutte le lavorazioni necessarie che la precedono. Analogamente, la nuova stazione 4 sarà caricata con le lavorazioni *D* e *G*, mentre l'ultima stazione — ora la quinta — avrà in aggiunta la lavorazione *E* (che deve precedere in esecuzione la lavorazione *H*). Il carico massimo della linea diventa quindi $C = C_3 = C_4 = 55$ minuti, sempre inferiore a $CMT = 60$ minuti. I parametri di produzione associati alla Fig. 10 sono:

$$(\text{massimo}) \text{ tasso di produzione} = \frac{1}{C} = \frac{1}{55} = 0.018 \text{ pezzi/minuto} = 17.45 \text{ pezzi/16h},$$

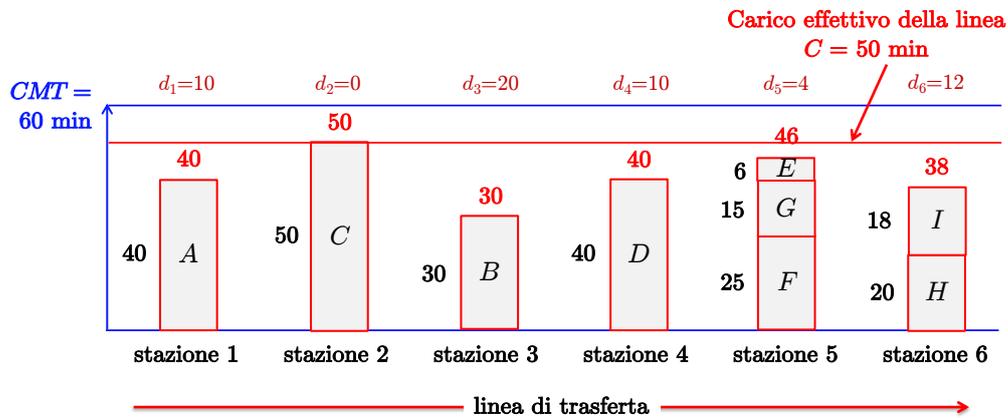


Figura 9: Carico di lavorazioni e tempi morti delle stazioni, con CMT e carico effettivo della linea.

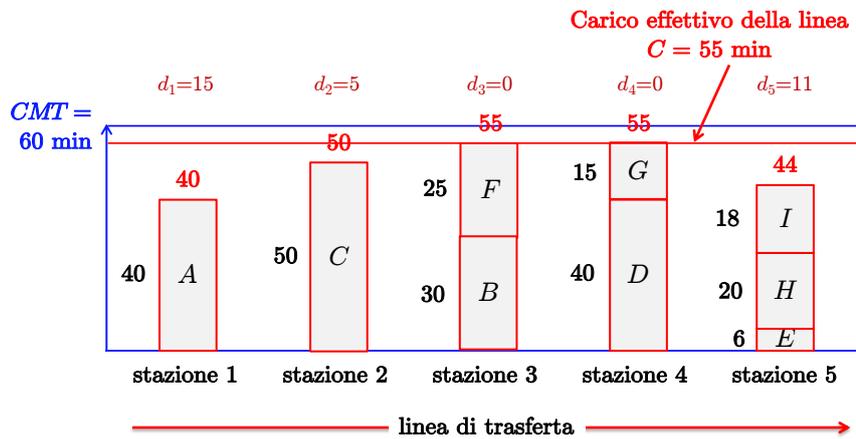


Figura 10: Altra assegnazione ammissibile delle lavorazioni, utilizzando solo $N_t = 5$ stazioni.

superiore di circa il 10% al minimo richiesto;

tempo di attraversamento della linea (a regime) = $N_t \times C = 5 \times 55 = 275$ minuti;

$$\text{sbilanciamento medio } d = \frac{\sum_{j=1}^{N_t} d_j}{N_t} = \frac{31}{5} \simeq 6.2 \text{ minuti,}$$

pari a circa l'11.3% del carico effettivo della linea.

* * * * *