

Automazione

20 Gennaio 2017

Esercizio 1

Si consideri un sistema di automazione operante a livello di coordinamento che deve gestire i seguenti task periodici:

1. Ogni 5 t.u. viene etichettato il prodotto, impiegando 2 t.u.
2. Ogni 8 t.u. il prodotto viene imballato in 3 t.u.

C'è inoltre un task aperiodico di controllo della qualità a campione, caratterizzato dal fatto che due istanze consecutive si presentano almeno dopo 10 t.u., e il cui tempo di esecuzione per ogni istanza non supera mai le 2 t.u.

Si ipotizzi che i task sopra menzionati siano indipendenti. Tali task devono essere gestiti con una modalità di scheduling hard real time.

Un ulteriore task aperiodico soft real time è caratterizzato da $a_4(1) = 30$ t.u., $D_4(1) = 45$ t.u. e $C_4(1) = 2$ t.u. Si chiede di:

1. Verificare se sussiste la condizione necessaria di schedulabilità dei task hard real time.
2. Verificare se sussiste almeno una delle condizioni sufficienti di schedulabilità, utilizzando l'algoritmo RMPO.
3. Eseguire lo scheduling RMPO. Nel caso in cui RMPO non sia in grado di schedulare i task in maniera hard real time, eseguire lo scheduling utilizzando l'algoritmo EDF.
4. Utilizzando l'algoritmo di scheduling scelto nel punto precedente, verificare se il task aperiodico riesce ad essere eseguito in maniera hard real time utilizzando uno scheduling in background. In caso ciò non sia possibile, verificare se il task aperiodico può essere eseguito in maniera hard real time utilizzando un processo polling server caratterizzato da $T_{SRV} = 40$ t.u. e $C_{SRV} = 1$ t.u.
5. Spiegare come sarebbe cambiato lo scheduling EDF di cui sopra, se l'activation time del task aperiodico fosse stato $a_4(1) = 35$.

Esercizio 2

Si consideri la rete di Petri in Fig. 1.

- Determinare la matrice di incidenza C della rete.
- Calcolare i P -invarianti canonici della rete. La rete è conservativa?
- Scrivere le equazioni di invarianza.
- Calcolare i T -invarianti della rete.
- Determinare il vettore delle occorrenze corrispondente alla sequenza di scatti che porta la rete dalla marcatura $(0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0)^T$ alla marcatura $(2\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1)^T$.
- Disegnare l'albero di raggiungibilità/copertura della rete.
- Discutere le proprietà di k -limitatezza, vivezza e reversibilità di questa rete, giustificando le risposte.

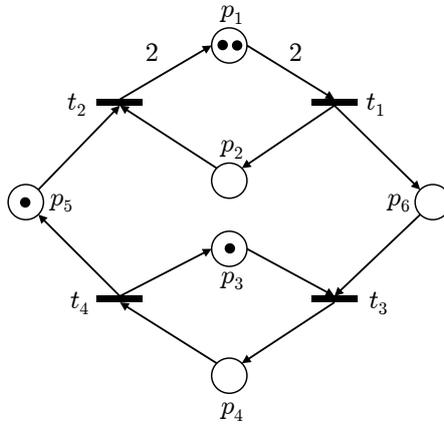


Figura 1: Una rete di Petri con la marcatura iniziale \mathbf{x}_0 .

Esercizio 3

Per un sistema meccanico a doppia massa con elasticità, i due grafici nella Fig. 2 mostrano rispettivamente la risposta ad anello aperto dell'uscita di velocità ad un comando di coppia a gradino unitario e la risposta a un riferimento di velocità unitario quando è presente un anello di controllo puramente proporzionale con guadagno $K = 0.1$. Progettare un regolatore digitale di tipo *PID* (o sua sottoclasse, motivandone la scelta) in modo da mantenere la stabilità asintotica, avere errore nullo a regime permanente per riferimenti costanti di velocità e ottenere buone caratteristiche nei transitori. Scegliere un opportuno passo di campionamento dell'intero sistema di controllo e fornire il valore dei guadagni del regolatore digitale. Disponendo di un encoder incrementale con decodifica in quadratura e contatore a 12 bit per la misura della posizione, montato sull'asse del motore a monte di un riduttore 50:1, determinare la risoluzione nella misura della velocità controllata.

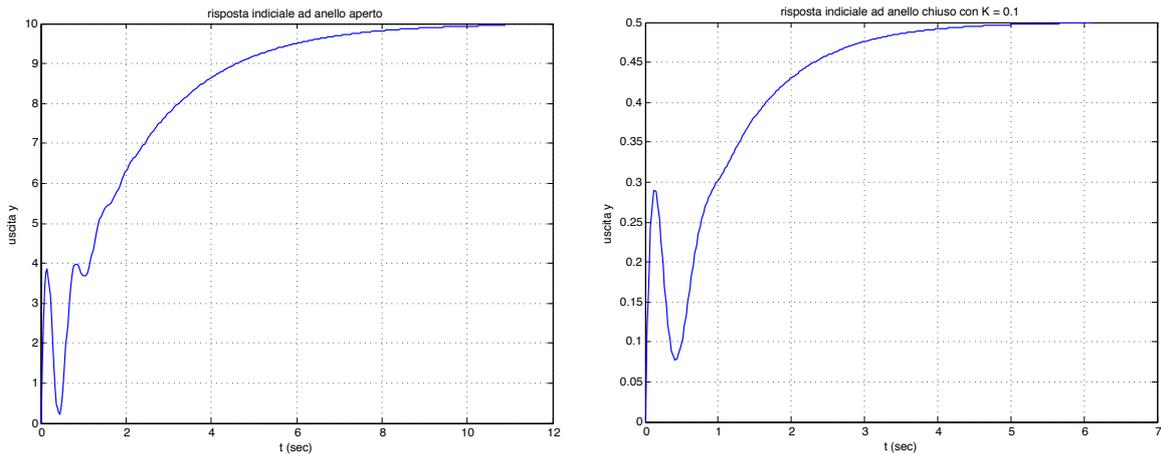


Figura 2: Risposte indiciali di un sistema meccanico ad anello aperto [a sinistra] e ad anello chiuso con un controllore proporzionale [a destra].

[150 minuti; libri aperti]

Verificata la condizione necessaria e sufficiente per EDF, la soluzione dello scheduling nelle prime 40 t.u. è identica a quella precedente.

Le successive 40 t.u. sono schedulate come in Fig. 5. Pertanto il processo polling server mette a disposizione le t.u. 73 e 113 per l'esecuzione del task aperiodico soft real-time. È facile verificare che in entrambi i casi ($a_4(1) = 30$ e $a_4(1) = 35$) il task aperiodico soft real-time viene eseguito oltre la deadline assoluta (rispettivamente $d_4(1) = 75$ e $d_4(1) = 80$) che è inferiore al 113.

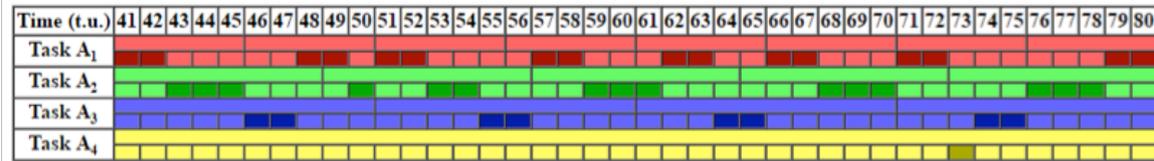


Figura 5: Seconda parte dello scheduling dei task con EDF, una volta aggiunto il processo server.

Osservazione. Se il processo server fosse stato di tipo deferring, le time unit messe a disposizione dei task aperiodici soft real-time sarebbero state 33, 73, 113, ecc. Quindi se $a_4(1) = 30$, il task sarebbe stato eseguito entro la deadline, se $a_4(1) = 35$, il task non sarebbe stato eseguito entro la deadline.

Esercizio 2

- La matrice di incidenza della rete di Petri in Fig. 1 è

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

il cui rango è $\rho = 3$, come si può facilmente verificare: la seconda riga è proporzionale alla prima, la quarta alla terza, la matrice quadrata ottenuta eliminando seconda e quarta riga ha determinante nullo ed esiste (almeno) un minore 3×3 non nullo. Lo spazio nullo di C^T ha quindi dimensione $|P| - \rho = 6 - 3 = 3$, mentre lo spazio nullo di C è mono-dimensionale ($|T| - \rho = 4 - 3 = 1$).

- Il calcolo dei P -invarianti

$$\gamma^T C = 0^T \Rightarrow \begin{cases} -2\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_6 = 0 \\ 2\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_5 = 0 \\ -\gamma_3 + \gamma_4 - \gamma_6 = 0 \\ \gamma_3 - \gamma_4 + \gamma_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_5 = \gamma_6 \\ 2\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_5 = 0 \\ \gamma_3 - \gamma_4 + \gamma_5 = 0 \end{cases}$$

fornisce le tre soluzioni canoniche:

$$\begin{aligned} \gamma^1 &= (1 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \\ \gamma^2 &= (0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0)^T \\ \gamma^3 &= (1 \ 0 \ 0 \ 2 \ 2 \ 2)^T. \end{aligned}$$

Dato che ogni posto compare nel supporto di almeno un P -invariante, la rete è conservativa e pertanto limitata.

- Le equazioni di invarianza della rete (della forma $\gamma^T \mathbf{x} = \gamma^T \mathbf{x}_0$) sono

$$\begin{aligned}x(p_1) + 2x(p_2) &= 2 \\x(p_3) + x(p_4) &= 1 \\x(p_1) + 2x(p_4) + 2x(p_5) + 2x(p_6) &= 4.\end{aligned}$$

- Il calcolo dei T -invarianti fornisce

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} -2\eta_1 + 2\eta_2 = 0 \\ \eta_1 - \eta_2 = 0 \\ -\eta_3 + \eta_4 = 0 \\ \eta_3 - \eta_4 = 0 \\ -\eta_2 + \eta_4 = 0 \\ \eta_1 - \eta_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta_1 = \eta_2 \\ \eta_2 = \eta_3 \\ \eta_3 = \eta_4. \end{cases}$$

Pertanto, come previsto, esiste il solo T -invariante:

$$\boldsymbol{\eta} = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^T.$$

Il T -invariante $\boldsymbol{\eta}$ è un vettore delle occorrenze associato ad esempio alla sequenza (ammissibile) di scatti $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, che rende la rete reversibile.

- Per determinare il vettore delle occorrenze \mathbf{s} , si può utilizzare l'equazione di evoluzione della rete

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix}$$

Svolgendo i calcoli (eliminando le ridondanze) si ottiene

$$\begin{cases} s_1 - s_2 = -1 \\ s_3 - s_4 = -1 \\ s_1 - s_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{ponendo, ad esempio, } s_3 = 0 \Rightarrow \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Associata al vettore delle occorrenze \mathbf{s} così trovato, c'è la sequenza (ammissibile) di scatti $\{t_2, t_1, t_4, t_2\}$. Questa sequenza si sarebbe potuta determinare anche dall'albero di raggiungibilità ricavato al punto successivo.

- L'albero di raggiungibilità della rete di Petri è riportato in Fig. 6. Si noti che l'albero deve essere costruito con una logica 'depth first'. Inoltre si considera l'ordine lessicografico delle etichette delle transizioni: ad esempio, nella marcatura $(0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1)^T$, la transizione t_2 si espande prima di t_3 e così via.
- Analizzando l'albero di raggiungibilità si può verificare che la rete è 2-limitata, viva e reversibile.

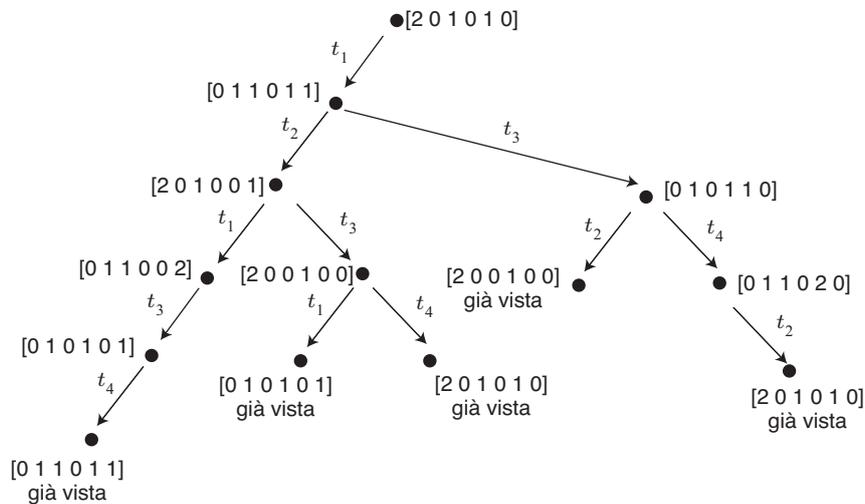


Figura 6: Albero di raggiungibilità della rete di Petri di Fig. 1.

Esercizio 3

Il problema si risolve procedendo con un'analisi grafica qualitativa della risposta indiciale del sistema *ad anello aperto* e applicando le regole del primo metodo di Ziegler e Nichols per la sintonizzazione dei guadagni del regolatore. Si potrebbe in alternativa utilizzare la risposta del sistema in cui è presente un primo anello di controllo puramente proporzionale. Questa seconda scelta è necessaria nel caso in cui il sistema originario sia instabile (mentre il sistema può essere quanto meno stabilizzato da una semplice retroazione). La presenza di un primo anello di feedback maschera però in parte le dinamiche del sistema originario. E' quindi preferibile l'uso della risposta del sistema ad anello aperto quando questo sia già asintoticamente stabile, come nel caso presente.

Dal grafico di sinistra nella Fig. 2 si deduce che occorre un termine integrale nel regolatore per eliminare l'errore a regime in risposta a ingressi di riferimento costanti. Per avere infatti un guadagno unitario ad anello chiuso, deve esserci un polo nell'origine nella catena diretta del sistema di controllo. Tale azione integrale non è presente nel sistema (altrimenti la risposta indiciale divergerebbe) e va quindi introdotta nel controllore. D'altra parte, il fatto che il grafico di destra nella Fig. 2 mostri un valore non unitario dell'uscita a regime in risposta a un gradino unitario conferma che una legge di controllo solo proporzionale all'errore non è sufficiente a realizzare il comportamento richiesto. La scelta più semplice sarà pertanto quella di un regolatore *PI*, senza azione derivativa. Quest'ultima serve in generale ad attenuare eventuali oscillazioni del transitorio, che allungano il tempo di assestamento nella risposta. Dall'analisi del grafico non appare qui necessario aggiungere un termine derivativo sull'errore: la rapida oscillazione nella fase iniziale della risposta nel tempo è dovuta infatti esclusivamente alla presenza di una anti-risonanza/risonanza nel processo. Questa situazione è evidente dal grafico del modulo della risposta armonica¹ del sistema originale che è riportato in Fig. 7. L'andamento della risposta indiciale nella successiva fase di avvicinamento al valore di regime è già del tutto privo di oscillazioni. Si può quindi fare a meno dell'azione derivativa, il che semplifica la legge di controllo in quanto non è neanche necessario aggiungere un polo in alta frequenza per avere la fisica realizzabilità del regolatore.

¹I diagrammi di Bode non erano disponibili nel testo del problema e sono forniti qui per completezza di analisi.

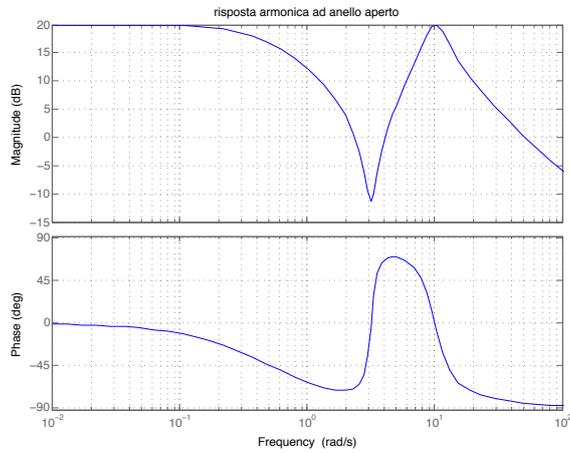


Figura 7: Diagrammi di Bode della risposta armonica del sistema ad anello aperto.

Si utilizzerà allora un regolatore PI (a tempo continuo):

$$u(t) = K_P \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right), \quad e = y_d - y. \quad (1)$$

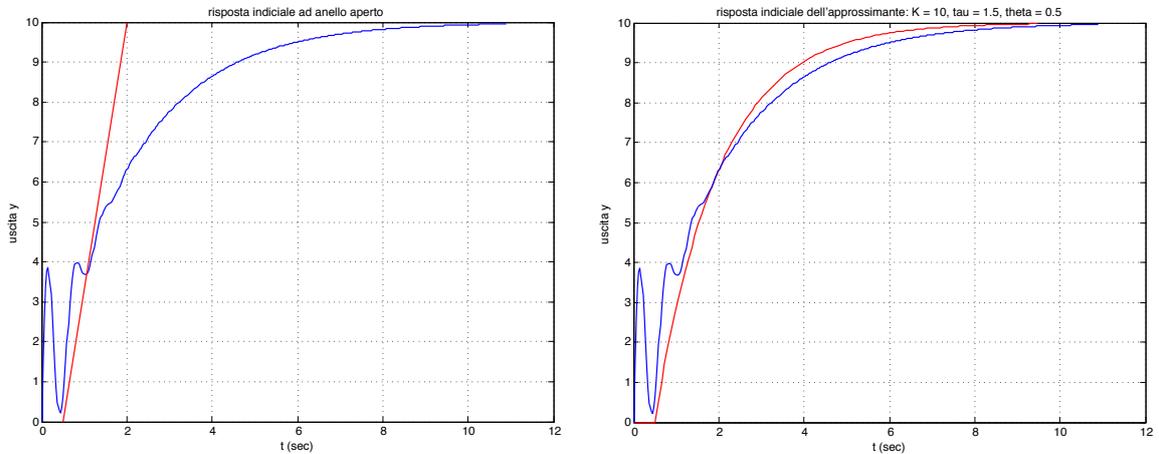


Figura 8: Tracciamento della pendenza approssimante (in rosso) utilizzata nel primo metodo di Ziegler-Nichols [a sinistra]. Confronto tra le risposte indicali del sistema originale (in blu) e di quello approssimante (in rosso) della forma (2) utilizzato ai fini della sintesi del regolatore [a destra].

La Figura 8 mostra i passi qualitativi per la scelta dei guadagni nel regolatore. Sul grafico di sinistra, è riportato in rosso un segmento della retta tangente alla risposta, approssimativamente nel punto di massima pendenza. L'intersezione di tale retta con l'asse delle ascisse fornisce il tempo di ritardo $\theta \geq 0$, l'intersezione con l'asse orizzontale al valore di regime (in $t_1 = \theta + \tau$) fornisce la

Anche la risposta armonica, al pari di quella indiciale, è facilmente ottenibile tramite esperimenti sul sistema.

costante di tempo $\tau > 0$ di un polo reale semplice, mentre il valore di regime dell'uscita (essendo l'ingresso unitario) fornisce il guadagno $K > 0$ per un processo approssimante della forma

$$P(s) = K \frac{e^{\theta s}}{1 + \tau s}. \quad (2)$$

Con i seguenti valori ricavati graficamente

$$K = 10, \quad \theta = 0.5 \text{ [s]}, \quad \tau = 1.5 \text{ [s]},$$

la risposta indiciale del processo (2) è in buona sintonia con quella del sistema originario (vedi gli andamenti nella parte destra della Fig. 8). Dalla tabella del primo metodo di Ziegler-Nichols si ha quindi per il regolatore PI in (1):

$$K_P = \frac{0.9}{K} \left(\frac{\tau}{\theta} \right) = 0.27, \quad T_i = 3.33 \theta = 1.665 \text{ [s]}.$$

La risposta del sistema ad anello chiuso con questo regolatore PI è mostrata in Fig. 9. L'andamento è molto soddisfacente, essendo il valore a regime quello desiderato e la risposta nel transitorio sufficientemente pronta, senza sovraelongazione e priva di oscillazioni finali.

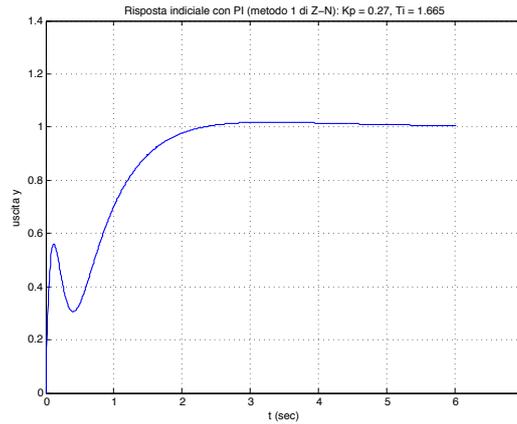


Figura 9: Risposta indiciale ad anello chiuso con il regolatore PI a tempo continuo sintetizzato con il primo metodo di Ziegler-Nichols.

Per l'implementazione digitale della legge (1), usando la notazione $x_k = x(t_k)$ per i segnali negli istanti di campionamento $t_k = kT_c$, si ha la forma ricorsiva

$$u_{i,k} = u_{i,k-1} + \frac{K_P T_c}{T_i} e_k, \quad u_k = K_P e_k + u_{i,k}. \quad (3)$$

Occorre definire anzitutto un valore opportuno del passo di campionamento $T_c > 0$. Valori eccessivamente piccoli di T_c risultano onerosi dal punto di vista dell'organizzazione dei calcoli e, al contempo, il sensore utilizzato potrebbe fornire dati instabili (o addirittura errati) se interrogato a frequenze troppo elevate. Viceversa, valori troppo grandi di T_c rischiano di destabilizzare il comportamento previsto e progettato a tempo continuo, mancando di rilevare le dinamiche proprie del sistema soggetto al controllo. Un buon compromesso si ottiene con un campionamento dei segnali

effettuato a una frequenza f_c che sia per lo meno² maggiore o uguale al doppio della massima frequenza caratteristica f_{max} del sistema, ossia

$$f_c = \frac{1}{T_c} = \frac{\omega_c}{2\pi} \geq \frac{\omega_{max}}{\pi} = 2f_{max} \text{ [Hz]}.$$

Per determinare f_{max} si può osservare che, nei primi istanti della risposta indiciale del sistema originario (grafico di sinistra in Fig. 2), l'uscita effettua una oscillazione completa di durata pari a circa $T_p = 0.6$ s. Il gradino in ingresso ha quindi eccitato un modo caratteristico del sistema a pulsazione $\omega = 2\pi/T_p \approx 10$ rad/s. A riconferma, questa pulsazione corrisponde infatti alla risonanza nel diagramma di Bode di Fig. 7. Si può quindi scegliere il passo di campionamento (con un certo margine conservativo) come

$$T_c \leq \frac{1}{2f_{max}} = \frac{T_p}{2} = 0.3 \quad \Rightarrow \quad T_c = 0.25 \text{ [s]}. \quad (4)$$

Dalla (4), applicando l'usuale modifica dei parametri di Ziegler-Nichols per un'implementazione digitale, si ottengono i nuovi guadagni

$$\theta' = \theta + \frac{T_c}{2} = 0.625 \text{ [s]} \quad \Rightarrow \quad K_P = \frac{0.9}{K} \left(\frac{\tau}{\theta'} \right) = 0.216, \quad T_i = 3.33 \theta' = 2.081. \quad (5)$$

La Figura 10 mostra un confronto tra la risposta indiciale ottenuta con un regolatore PI a tempo continuo (1) che utilizza i guadagni modificati come in (5) e l'uscita campionata quando si utilizza invece il regolatore PI digitale (3) con gli stessi guadagni.

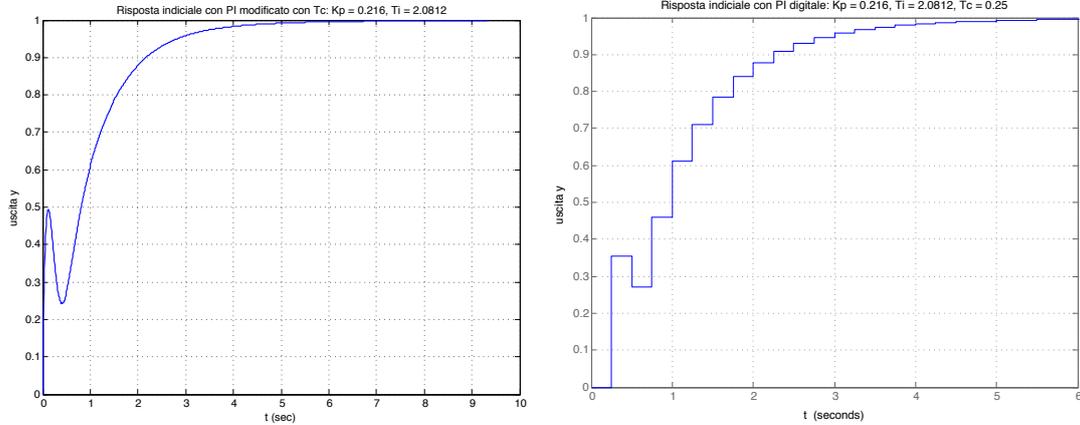


Figura 10: Confronto tra le risposte indiciali ad anello chiuso con il regolatore PI continuo e guadagni modificati come in (5) [a sinistra] e con il regolatore PI digitale (3) e stessi guadagni, a valle del campionamento in uscita [a destra].

Per quanto riguarda infine la risoluzione nella misura in uscita al sistema, un contatore a 12 bit può contare al massimo 2^{12} impulsi/giro prodotti da un encoder incrementale (a prescindere dalla presenza o meno di una decodifica in quadratura). Assumendo che i componenti siano stati ben dimensionati (ossia che l'encoder non abbia una risoluzione intrinseca molto più scarsa), possiamo

²Spesso ci si spinge anche più in là, prevedendo una frequenza di campionamento superiore di un ordine di grandezza a quella massima caratteristica del sistema.

assumere che il campo di conteggio del contatore a 12 bit sia utilizzato a pieno e quindi avere come minimo incremento di posizione angolare misurabile sul lato motore e sul lato carico

$$\Delta\theta_m = \frac{360^\circ}{2^{12}} = \frac{360^\circ}{4096} \approx 0.09^\circ \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta = \frac{\Delta\theta_m}{N_r} = \frac{0.09^\circ}{50} = 0.0018^\circ.$$

Pertanto, la risoluzione nella misura della velocità angolare per il sistema di controllo campionato sarà pari a

$$\Delta\dot{\theta} = \frac{\Delta\theta}{T_c} = \frac{0.0018^\circ}{0.25} = 0.0072 \text{ [°/s]}.$$
